# 中心化ベッセル過程によるウィナー積分*

針谷 祐† (九大数理)

この講義の主な目標は，舟木・Hirsch・Yor の三氏と共同で行なった「中心化された Bessel 過程による Wiener 型の積分」の構成に関する一連の研究 ([1]–[4]) の結果について紹介することである．[2] で用いられた Brascamp-Lieb 不等式によるアプローチについては舟木氏が報告する．ここでは [1] と [3] において扱った話題について，Hardy の $L^2$ 不等式に関連した部分を中心に紹介したい．また，時間が許せば，[4] に基づいて Fourier 解析の観点からも問題を論じる予定である．

## 1 問題の背景

増大情報系 (filtration) の入った確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \geq 0), P)$ の上に定義された実数値確率過程 $(X_t, 0 \leq t \leq 1)$ を $(\mathcal{F}_t)$-適合 (adapted) な連続 semi-martingale とし，その semi-martingale 分解が

$$X_t = M_t + V_t, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{1.1}$$

で与えられているものとしよう．ただし $M$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合で連続な 2 乗可積分 martingale, $V$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合で連続な有界変動過程とする．いま，可測関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ について，$f$ の $X$ による Wiener 型の積分:

$$I(f; X) = \int_0^1 f(u)\, dX_u$$

を定義することを考えると，その最も自然な方法は，(1.1) を用いて

$$I(f; X) = \int_0^1 f(u)\, dM_u + \int_0^t f(u)\, dV_u$$

と定義するというものだろう．右辺第一項に関しては，

$$E[\int_0^1 f(u)^2\, d\langle M\rangle_u] < \infty \tag{1.2}$$

*平成 18 年 8 月 1 日．ヤングサマーセミナーに参加される方々には遅くなってしまい，大変申し訳ありません．

†学振特別研究員 PD

という条件を課せば確率積分 (stochastic integral) $(\int_0^t f(u)\,dM_u, 0 \le t \le 1)$ が定義でき，従ってその $t=1$ での値としてこの項をとらえることができる．一方第二項については，

$$\int_0^1 |f(u)||dV_u| < \infty \quad \text{a.s.} \tag{1.3}$$

という条件の下通常の Stieltjes 積分として定義可能である．従って，この二つの条件(1.2), (1.3) が満たされれば，Wiener 積分 $I(f;X)$ が定義できることになる．ところが必ずしも(1.3) が成り立たなくても $\int_0^1 f(u)\,dV_u$ が意味を持ち，従って Wiener 積分が定義できる場合があり，舟木氏の講義でまず紹介されるように，例えば原点から出発する中心化された 3 次元以上の Bessel 過程がそのような例を与える (この場合には条件(1.2) は $f \in L^2([0,1];du)$ である)．このような確率過程の例は他にもあって，最も簡単なものとして例えば，原点から出発する 1 次元 Brown 運動 $(B_t, t \ge 0)$ に対して次のように与えられる semi-martingale を考えてみよう:

$$\beta_t = B_t - \int_0^t \frac{B_u}{u}\,du, \tag{1.4}$$

すなわち，(1.1) において $X$ を $\beta$ とみなして

$$M_t = B_t, \quad V_t = -\int_0^t \frac{B_u}{u}\,du,$$

ととる．$\langle M \rangle_t = t$ であるから(1.2) に対応する条件はこの場合も $f \in L^2([0,1];du)$ である．一方(1.3) の条件は，いわゆる Jeulin の補題から ([6, p.44]; 舟木先生の予稿 §A.1 も参照),

$$\int_0^1 \frac{|f(u)|}{\sqrt{u}}\,du < \infty \tag{1.3$'$}$$

と同値となる．実際，スケーリング則から $|B_u|/\sqrt{u}$ の分布が $u$ によらないことに注意すれば，Jeulin の補題は(1.3′) と

$$\int_0^1 |f(u)| \frac{|B_u|}{u}\,du < \infty \quad \text{a.s.} \tag{1.5}$$

との同値関係を与える．さて，舟木氏の予稿の例 1.1 にもあるように，$f \in L^2([0,1];du)$ であって(1.3′) を満たさないものが存在する．ところが，いま考えている確率過程 $\beta$ は $B$ に関して線型であるので Gaussian であり，共分散を計算すれば $\beta$ は実は Brown 運動であることが分かる．従って実際は任意の $f \in L^2([0,1];du)$ について Wiener 積分 $I(f;\beta)$ は定義可能であるし，形式的な表現:

$$\int_0^1 f(u) \frac{B_u}{u}\,du$$

についても次のように意味がつく:

$$\int_0^1 f(u)\frac{B_u}{u}\,du := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 f(u)\frac{B_u}{u}\,du. \tag{1.6}$$

極限は $P$-a.s. かつ $L^2(\Omega,P)$ での収束の意味で存在する．これは，

$$\int_\varepsilon^1 f(u)\frac{B_u}{u}\,du = \int_\varepsilon^1 f(u)\,dB_u - \int_\varepsilon^1 f(u)\,d\beta_u$$

と書け，$B,\beta$ がともに Brown 運動であることから明らかだろう．

このように絶対収束(1.5)が成り立たなくても条件収束(1.6) する理由としては，Brown 運動 $B$ が原点付近においても正にも負にも等しく振動しているということが考えられるだろう．つまり，中心化という人為的な補正 (compensation) を加えた Bessel 過程の場合と異なり，この場合は Brown 運動自身が補正を行なっていると考えられる．

(1.4) で与えられる確率過程 $\beta$ はピン留め Brown 運動を情報系の拡大 (enlargement of filtrations) の観点から論じる際にしばしば付随して扱われる; 例えば [12, Chap. 12] と [11, p.3] の Theorem 1.1 の証明内のコメントを参照．また，[11, p.10] で紹介されているように，$\beta$ が Brown 運動であるという事実を用いて，いわゆる Hardy の $L^2$ 不等式の確率論的な証明を与えることができる．この不等式については舟木氏の予稿 §2.3 においても紹介されているので，あらためてその主張を繰り返す必要はないかも知れないが，証明を紹介する上でもここで振り返っておこう:

**Hardy の $L^2$ 不等式**: $L^2([0,1];du)$ から $L^2([0,1];du)$ への Hardy 変換

$$(Tf)(u) = \frac{1}{u}\int_0^u f(v)\,dv, \quad 0\le u\le 1,$$

について，

$$\|Tf\|_{L^2([0,1];du)} \le 2\|f\|_{L^2([0,1];du)}$$

が成り立つ．

**証明.** $\beta$ を(1.4) で定めた Brown 運動とすると，まず有界な $f$ について

$$\int_0^1 f(u)\frac{B_u}{u}\,du = \int_0^1 f(u)\,dB_u - \int_0^1 f(u)\,d\beta_u. \tag{1.7}$$

ところで左辺は $T$ の随伴変換:

$$(\widetilde{T}f)(u) = \int_u^1 \frac{f(v)}{v}\,dv, \quad f\in L^2([0,1];du),$$

を用いて

$$\int_0^1 (\widetilde{T} f)(u)\, dB_u$$

と書き換えられるので，(1.7) の両辺の 2 次モーメントを考えれば

$$\|\widetilde{T} f\|^2_{L^2([0,1];du)} \le 4\|f\|^2_{L^2([0,1];du)},$$

よって結論が得られる． □

この節を締めくくるにあたり，このノートの以降の構成について触れておこう:

- §2 ではまず Bessel 過程の定義を思い出した上で，その semi-martingale 分解について振り返る．
- §3 では，3 次元 Bessel 過程を題材に，このノートで用いられる手法について概観する．
- §4 では Hardy の $L^2$ 不等式のある一般化を述べ，§3 において用いられるある簡単な式変形に基づいた証明を紹介する．
- §5 では次元が 1 以上の中心化 Bessel 過程についても任意の $f \in L^2([0,1];du)$ について Wiener 積分が定義可能であることをみる．また，もっと一般に，それが semi-martingale となる場合において，0 よりも大きい次元の Bessel 過程のべき乗から定まる中心化過程に対しても，条件(1.2) から定まる重みつきの $L^2$ 空間の任意の元について Wiener 積分が定義できることを示す．
- §6 では，pseudo-Bessel 過程と呼ばれる，あるスケーリング則を満たす semi-martingale のクラスを導入し，それによる Wiener 積分について考察する．

表記上の注意として，以降では $L^2([0,1];du)$ を単に $L^2([0,1])$ と表すこととする．また，今後登場する確率変数や確率過程についても，断りのない限り全て確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で定義されているものとし，$P$ についての期待値を $E$ で表す．

## 2 Bessel 過程について

本論に入る前に，この節では (自然数とは限らない) 一般の次元の Bessel 過程に関し，その定義及びその semi-martingale 分解について振り返っておこう．この節の内容については詳しくは，例えば [8, Chap. XI] とこの節内で挙げられる文献を参照のこと．

## 2.1 Bessel 過程の定義

まず $\delta$ は自然数として，$\delta$ 次元 Brown 運動 $W_t = (W_t^i)_{1 \le i \le \delta}$ について $z_t = |W_t|^2$ とおく ($|\cdot|$ は Euclid ノルム)．すると伊藤の公式から

$$z_t = z_0 + 2\sum_{i=1}^{\delta} \int_0^t W_u^i \, dW_u^i + \delta t. \tag{2.1}$$

ここで確率過程 $(B_t, t \ge 0)$ を，$\delta \ge 2$ に対して

$$B_t = \sum_{i=1}^{\delta} \int_0^t \frac{W_u^i}{\sqrt{z_u}} \, dW_u^i$$

(2 次元以上であれば Brown 運動は原点に戻ってこないのでこれは定義可能)，また $\delta = 1$ については

$$B_t = \int_0^t \mathrm{sgn} W_u \, dW_u$$

と定めよう．するとその 2 次変分は $\langle B \rangle_t = t$ であり，従って $B$ は 1 次元 Brown 運動である．この Brown 運動を用いて(2.1) を書き直せば，$z_t$ は

$$z_t = z_0 + 2\int_0^t \sqrt{z_u} \, dB_u + \delta t$$

という確率微分方程式 (SDE) を満たすことが分かる．そこで，一般の $\delta \ge 0$ についても，(今度はあらかじめ 1 次元 Brown 運動 $B$ が与えられたとして)

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{|Z_u|} \, dB_u + \delta t \tag{2.2}$$

という SDE を考えよう．ただし初期値 $x \ge 0$ とする．この SDE は唯一の強解 $Z_t \equiv Z_t(B)$ を持つことが知られている (実際，この SDE の係数は pathwise uniqueness を成り立たせるための条件を満たし，従って山田-渡辺の定理から解は強解となる)．より正確にいうならば，上の積分方程式(2.2) を満たす確率過程の組 $(Z, B)$, $B$ は Brown 運動, を $Z_t$ が $B$ の時刻 $t$ までの汎関数となるようにとることができる．$\delta = x = 0$ のときは明らかに $Z \equiv 0$ が解であり，従って 1 次元 SDE についての比較定理 (これについては舟木先生の講義の中でも言及されます) から，任意の $\delta, x \ge 0$ について $Z_t \ge 0$ となる．そこで

$$\boxed{R_t := \sqrt{Z_t}, \ t \ge 0}$$

と定め，これを $\delta$ 次元 Bessel 過程と呼ぶ (一方 $Z_t$ は squared Bessel 過程と呼ばれる)．この定義から明らかなように，$\delta$ が自然数のときは，$|W_0| = \sqrt{x}$ なる $\delta$ 次元 Brown 運動 $W_t$ に対して

$$(R_t, t \ge 0) \overset{(d)}{=} (|W_t|, t \ge 0)$$

となっている．$\delta = 0$ で $x > 0$ の場合の squared Bessel 過程について少し触れておくと，この確率過程は，期待値は無限大だが a.s. に有限な時間[1] で原点に到達する．到達した後ずっと原点に留まることは方程式の形から明らかだろう．定義からこの性質は 0 次元 Bessel 過程にもそのまま当てはまる．このように 0 次元の場合，squared Bessel 過程および Bessel 過程はかなり特殊で以下でも扱わないので，断りのない限り今後は $\delta > 0$ とする．最後に，$Z$ は非負であるから上の SDE (2.2) において絶対値は外してよいということを注意しておこう．

## 2.2 Bessel 過程の semi-martingale 分解

さて，$R_t = \sqrt{Z_t}$ と定義したので，$\sqrt{Z_t}$ に伊藤の公式を適用することを考えてみよう．もちろんそのままでは原点に特異性が出て来てしまうので，$\varepsilon > 0$ について $[0, \infty)$ 上の $C^2$ 級関数 $g_\varepsilon$ を例えば

$$g_\varepsilon(z) = \begin{cases} \frac{3}{8}\sqrt{\varepsilon} + \frac{3}{4\sqrt{\varepsilon}}z - \frac{1}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}z^2, & z < \varepsilon, \\ \sqrt{z}, & z \geq \varepsilon, \end{cases}$$

ととって，まず $g_\varepsilon(Z_t)$ に伊藤の公式を適用してから $\varepsilon \downarrow 0$ とすることを考える ($g_\varepsilon(z)$ は $\varepsilon \downarrow 0$ として $\sqrt{z}$ に各点で収束)．(2.2) と伊藤の公式から

$$g_\varepsilon(Z_t) = g_\varepsilon(x) + B_t + I_t(\varepsilon) + J_t(\varepsilon) + K_t(\varepsilon), \tag{2.3}$$

ここに

$$\begin{aligned} I_t(\varepsilon) &= \int_0^t \left( \frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{Z_u} - \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{Z_u^3} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{Z_u < \varepsilon\}}\, dB_u; \\ J_t(\varepsilon) &= \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t \frac{du}{R_u} \mathbf{1}_{\{Z_u \geq \varepsilon\}}; \\ K_t(\varepsilon) &= \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left\{ 3\delta - (\delta + 2)\frac{Z_u}{\varepsilon} \right\} \mathbf{1}_{\{Z_u < \varepsilon\}}\, du. \end{aligned}$$

まず $I_t(\varepsilon)$ において被積分項の絶対値は 3 を超えないから

$$E[|I_t(\varepsilon)|^2] \leq 9 \int_0^t P(Z_u < \varepsilon)\, du. \tag{2.4}$$

ここで $\widetilde{Z}$ を SDE (2.2) の $x = 0$ に対する解とすると，比較定理から任意の $u$ について $\widetilde{Z}_u \leq Z_u$，従ってとくに

$$\int_0^t P(Z_u < \varepsilon)\, du \leq \int_0^t P(\widetilde{Z}_u < \varepsilon)\, du \tag{2.5}$$

[1]蛇足ながら，時間変更 (time change) を用いると，この原点への到達時刻が，$\beta$ を $x$ から出発する 1 次元 Brown 運動，$T_0(\beta)$ をその原点への初めての到達時刻として，$\int_0^{T_0(\beta)} 1/(4\beta_u)\, du$ と同分布になることが分かります．

である．この右辺については，$0 < \delta < 2$，$\delta = 2$，$\delta > 2$ の各々の場合において，それぞれ $\varepsilon^{-\delta/2}$，$\{\varepsilon \log(1/\varepsilon)\}^{-1}$，$\varepsilon^{-1}$ を掛けて $\varepsilon \downarrow 0$ として non-trivial な定数に収束することが $\widetilde{Z}$ の推移確率を用いて計算すれば分かるので[2]，(2.4) より全ての $\delta > 0$ について

$$E[|I_t(\varepsilon)|^2] \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

となる．よって必要ならば部分列をとって a.s. に

$$I_t(\varepsilon) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

である．次に $J_t(\varepsilon)$ に関しては，単調収束定理から

$$J_t(\varepsilon) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t \frac{du}{R_u}$$

であり，これは $\delta > 1$ については a.s. に有限である ($\delta < 1$ のときは $-\infty$ に発散)．最後に $K_t(\varepsilon)$ の収束を議論するために Bessel 過程 $R$ の局所時間 (local time) $(l_t^y(R), t \geq 0, y \geq 0)$ を用意しよう．局所時間の定義には定数倍の差異があるが，ここでは $R$ の標準測度 (speed measure) を $y^{\delta-1}\,dy$ として (これについても尺度関数 (scale function) の定め方により定数倍の違いがある)，この測度について定義されているものとしよう．すなわちここでの $l_t^y(R)$ は，次の滞在時間公式 (occupation time formula) を満たす確率変数の族のことである: 任意の $t \geq 0$ と任意の有界可測関数 $\varphi$ について

$$\int_0^t \varphi(R_u)\,du = \int_0^\infty \varphi(y) l_t^y(R) y^{\delta-1}\,dy \quad \text{a.s.} \tag{2.6}$$

この公式を用いると $K_t(\varepsilon)$ は次のように書き直せる:

$$\begin{aligned} K_t(\varepsilon) &\equiv \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left\{ 3\delta - (\delta+2)\frac{R_u^2}{\varepsilon} \right\} \mathbf{1}_{\{R_u < \sqrt{\varepsilon}\}}\,du \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ 3\delta - (\delta+2)\frac{y^2}{\varepsilon} \right\} l_t^y(R) y^{\delta-1}\,dy \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{\delta-1}{2}} \int_0^1 \left\{ 3\delta - (\delta+2)\xi^2 \right\} l_t^{\sqrt{\varepsilon}\xi}(R) \xi^{\delta-1}\,d\xi. \end{aligned}$$

3 行目では $y = \sqrt{\varepsilon}\xi$ と変数変換した．これから大雑把に言って，$\delta = 1$ のとき

$$K_t(\varepsilon) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} \frac{3}{4} \int_0^1 (1 - \xi^2)\,d\xi \times l_t^0(R) = \frac{1}{2} l_t^0(R),$$

$\delta > 1$ のときは

$$K_t(\varepsilon) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

[2] 各 $u > 0$ について $\widetilde{Z}_u \overset{(d)}{=} 2u\gamma_{\delta/2}$ となります ($\gamma_{\delta/2}$ は指標 $\delta/2$ のガンマ変数)．この事実は §A でも用いられます．

となることがそれぞれ見てとれるであろう．また，$0<\delta<1$ のときは $+\infty$ に発散する(実際，$\varepsilon^{(1-\delta)/2}K_t(\varepsilon)\to(1/2)l_t^0(R)$ である)．これらは $l_t^y(R)$ の $y$ についての Hölder 連続性を用いて厳密に示すことができる．もちろん $\delta>1$ に対しては，局所時間をわざわざ持ち出さずとも

$$0\le E[K_t(\varepsilon)]\le\frac{3\delta}{4}\times\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t P(Z_u<\varepsilon)\,du\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow}0$$

であることが上で述べた(2.5) の右辺に対するスケーリングのオーダーを用いて直ちに分かり，従って部分列をとって a.s. に $K_t(\varepsilon)\to 0$ である．以上から，まず $\delta\ge 1$ の場合には，(2.3) の各項それぞれについて $\varepsilon\downarrow 0$ としてやれば，$\delta>1$ に対しては

$$R_t=\sqrt{x}+B_t+\frac{\delta-1}{2}\int_0^t\frac{du}{R_u},\tag{2.7}$$

$\delta=1$ に対しては

$$R_t=\sqrt{x}+B_t+\frac{1}{2}l_t^0(R),\tag{2.8}$$

が a.s. に成り立つ．これらは semi-martingale 分解であり，とくに $\delta>1$ に対しては，$R$ は SDE (2.7) を強解の意味で解いていることにもなる．また，$\delta=1$ のときの分解(2.8) については，$R_t=|\beta_t|$ ($\beta$ は$\sqrt{x}$を出発する 1 次元 Brown 運動) とみて，$L_t$ を $\beta$ の原点での局所時間，また Brown 運動 $B$ を $B_t=\int_0^t\mathrm{sgn}\beta_u\,d\beta_u$ ととって，

$$R_t=\sqrt{x}+B_t+L_t\tag{2.8$'$}$$

のように分解したと考えてもよい (田中の公式)．

一方 $\delta<1$ に関しては $J_t(\varepsilon)$，$K_t(\varepsilon)$ は $\varepsilon\downarrow 0$ としてそれぞれ $-\infty$，$+\infty$ に発散したのであるが，局所時間 $l_t^y(R)$ の $y$ についての Hölder 連続性を用いて上手く cancellation を考えるとこれらの和は収束し (舟木先生の予稿で言うところの「不定無限大値の除去」の一例)，

$$R_t=\sqrt{x}+B_t+\frac{\delta-1}{2}k_t,\quad k_t=\int_0^\infty dy\,y^{\delta-2}\left(l_t^y(R)-l_t^0(R)\right)$$

となることが分かる．$k_t$ は積分 $\int_0^t du\,(1/R_u)$ の Cauchy の主値 (principal value) と呼ばれ，p.v. $\int_0^t du\,(1/R_u)$ のように書かれる．$0<\delta<1$ に対しては Bessel 過程 $R$ はもはや semi-martingale とはならず (実際，上の $k_t$ は単純に 2 つの増加過程の差で書けているような代物ではない)，その概念を拡張した Dirichlet 過程と呼ばれる確率過程のクラスに分類される (このあたりのことや Bessel 過程の局所時間・主値積分などについては詳しくは，例えば [12, Chap. 10] とその中で参考文献として挙げられている山田先生の原論文を参照してみて下さい)．

ところで $\delta<2$ のとき Bessel 過程は原点に何度も戻ってくるので，原点での局所時間の入っていない(2.7) の分解が $1<\delta<2$ のときにも成り立つことを訝しむ向きもあろ

うが，実は Bessel 過程の次のようなべき乗については原点での局所時間が現れる: $\delta < 2$ に対し，$(R_t^{2-\delta}, t \geq 0)$ は semi-martingale で，分解

$$R_t^{2-\delta} = (\sqrt{x})^{2-\delta} + (2-\delta)\int_0^t R_u^{1-\delta}\, dB_u + \frac{2-\delta}{2} l_t^0(R) \tag{2.9}$$

を持つ．ただし局所時間 $l_t^y(R)$ は上の滞在時間公式(2.6) を満たすようにとる．これが成り立つことをみるには，例えば上で用いた $g_\varepsilon$ について $\{g_\varepsilon(Z_t)\}^{2-\delta}$ を考えてもよいし，あるいはもっと簡単に $(Z_t+\varepsilon)^{(2-\delta)/2}$ について伊藤の公式を適用してから滞在時間公式を用いた上の議論をもう一度繰り返せばよい．

他方 $\delta > 2$ に対しては，出発点が 0 でないとして $R_t^{2-\delta}$ は局所 martingale になることが知られているが (例えば [8, Chap. XI, Exercise 1.16])，我々がこれから扱うのは出発点が 0 の Bessel 過程だけなので，このことに関してはこれ以上立ち入らない．

# 3 中心化 3 次元 Bessel 過程による Wiener 積分

この節では，中心化 Bessel 過程による Wiener 積分の定義というテーマを扱う上でとくにどのようなことが問題となり，それらについてどのような議論が展開されるかを俯瞰する意味で，3 次元 Bessel 過程を題材にその中心化過程による Wiener 積分について考えてみたい．以降，一般に確率過程 $X = (X_t, t \geq 0)$ が与えられたとき，舟木氏の講義と同様 $\widehat{X}$ でその中心化過程 (centered process) を表すものとする:

$$\widehat{X_t} = X_t - E[X_t].$$

$(R_t, t \geq 0)$ を 0 から出発する 3 次元 Bessel 過程とする (従って(2.7) で $\delta = 3, x = 0$)．その中心化過程 $\widehat{R}$ は(2.7) から明らかに semi-martingale 分解

$$\widehat{R_t} = B_t + \int_0^t du\, \widehat{R_u^{-1}} \tag{3.1}$$

を持つ ($\widehat{R_u^{-1}}$ はもちろん $R_u^{-1} - E[R_u^{-1}]$ のことです)．いま $f$ を $[0,1]$ 上の有界可測関数とすると，その $\widehat{R}$ による Wiener 積分

$$I(f;\widehat{R}) = \int_0^1 f(u)\, d\widehat{R_u}$$

は，この分解を用いて

$$I(f;\widehat{R}) = \int_0^1 f(u)\, dB_u + \int_0^1 f(u)\widehat{R_u^{-1}}\, du$$

と定義される．我々はとくにこの 2 次モーメントを計算したい．もしそれが，$f$ によらない正の定数 $C$ について

$$E[I(f;\widehat{R})^2] \leq C\|f\|_{L^2([0,1])}^2 \tag{3.2}$$

という形で上から評価されるならば，一般の $f^* \in L^2([0,1])$ については有界可測関数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $f^*$ を近似することで $L^2(P)$ における Cauchy 列 $(I(f_n;\widehat{R}))_{n\in\mathbb{N}}$ が得られ，その極限として $I(f^*;\widehat{R})$ が定義できるからである．そのため次のような確率過程 $(S_t^f, 0 \le t \le 1)$ を考えよう:

$$S_t^f := \int_0^t f(u)\,d\widehat{R_u}.$$

(3.1) から明らかにこれは次のような semi-martingale 分解を持つ:

$$S_t^f = \int_0^t f(u)\,dB_u + \int_0^t f(u)\widehat{R_u^{-1}}\,du.$$

すると伊藤の公式から

$$\begin{aligned}(S_t^f)^2 &= 2\int_0^t S_u^f\,dS_u^f + \langle S^f\rangle_t \\ &= 2\int_0^t S_u^f f(u)\,dB_u + 2\int_0^t S_u^f f(u)\widehat{R_u^{-1}}\,du + \int_0^t f(u)^2\,du.\end{aligned}$$

従って $t=1$ として期待値をとって

$$\begin{aligned}E[I(f;\widehat{R})^2] &\equiv E[(S_1^f)^2] \\ &= 2\int_0^1 du\,f(u)E[S_u^f\widehat{R_u^{-1}}] + \|f\|_{L^2([0,1])}^2.\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで右辺の第一項における期待値は

$$\begin{aligned}E[S_u^f\widehat{R_u^{-1}}] &= E[\left(\int_0^u f(s)\,d\widehat{R_s}\right)\widehat{R_u^{-1}}] \\ &= \int_0^u ds\,f(s)\frac{d}{ds}E[\widehat{R_s}\widehat{R_u^{-1}}]\end{aligned}$$

と計算できる．これは $f$ がランダムでないことに注意して $S_u^f \equiv \int_0^u f(s)\,d\widehat{R_s}$ を Riemann 和で近似したと考えれば分かりやすいだろう．ここで Bessel 過程のスケーリング則から $E[\widehat{R_s}\widehat{R_u^{-1}}] = E[\widehat{R_{s/u}}\widehat{R_1^{-1}}]$ となることに注意して (いま $R$ は原点から出発していることに注意)，$s = ut, 0 \le t \le 1$, と変数変換すれば

$$E[S_u^f\widehat{R_u^{-1}}] = \int_0^1 dt\,f(ut)\frac{d}{dt}E[\widehat{R_t}\widehat{R_1^{-1}}]. \tag{3.4}$$

そこで

$$\phi^*(t) := -2\frac{d}{dt}E[\widehat{R_t}\widehat{R_1^{-1}}]$$

と定めると，(3.3) と(3.4) とから

$$E[I(f;\widehat{R})^2] = \|f\|^2_{L^2([0,1])} - J_{\phi^*}(f) \tag{3.5}$$

となる．ただし，可測関数 $\phi, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ について $J_\phi(g)$ を (右辺が意味を持つかぎり)

$$J_\phi(g) := \int_0^1 du\, g(u) \int_0^1 dt\, g(ut)\phi(t)$$

と定める．さて，(3.2) の形の評価が成り立つかどうか確かめるために，$|J_{\phi^*}(f)|$ を上から評価しよう:

$$\begin{aligned} |J_{\phi^*}(f)| &\le \int_0^1 du\, |f(u)| \int_0^1 dt\, |f(ut)||\phi^*(t)| \\ &= \int_0^1 dt\, |\phi^*(t)| \int_0^1 du\, |f(u)||f(ut)|. \end{aligned}$$

等号は Fubini の定理．ここで Schwarz の不等式から

$$\begin{aligned} \int_0^1 du\, |f(u)||f(ut)| &\le \|f\|_{L^2([0,1])} \left\{ \int_0^1 du\, |f(ut)|^2 \right\}^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2([0,1])} \times \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ \int_0^t dv\, |f(v)|^2 \right\}^{1/2} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{t}} \|f\|^2_{L^2([0,1])}, \end{aligned}$$

よって

$$|J_{\phi^*}(f)| \le C_{\phi^*} \|f\|^2_{L^2([0,1])}, \quad C_{\phi^*} := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} |\phi^*(t)|. \tag{3.6}$$

従ってもし $C_{\phi^*} < \infty$ であれば，(3.5) から $L^2$ 評価(3.2) が $C = 1 + C_{\phi^*}$ として成り立つことになり，結果 Wiener 積分 $I(f;\widehat{R})$ が任意の $f \in L^2([0,1])$ について定義できることになる．ところで 3 次元 Bessel 過程の推移確率の具体形を用いて計算すると

$$\phi^*(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t}} (1 - \sqrt{1-t}) \ (\ge 0), \quad 0 \le t \le 1,$$

となることが分かる (例えば舟木先生の予稿§A.2を参照して下さい)．ここで $1 - \sqrt{1-t} \le \sqrt{t}$ から $\phi^*(t) \le 4/\pi$，従って

$$C_{\phi^*} \le \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} < \infty,$$

あるいは $C_{\phi^*} = 8(1 - \log 2)/\pi$ と exact に計算もできる．いずれにせよこのことから次が結論できる:

$[0,1]$ 上の 任意の有界可測関数 $f$ について $L^2$ 評価(3.2) が $C = 1 + C_{\phi^*}$ として成り立つ．とくに，任意の $f \in L^2([0,1])$ に対して中心化 3 次元 Bessel 過程による Wiener 積分 $I(f;\widehat{R})$ は定義可能である．

- 評価式(3.6) を導出した一連の式変形を用いて，§1 で紹介した Hardy の $L^2$ 不等式の次のような一般化を得ることができる: 可測関数 $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ が

$$C_\phi := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} |\phi(t)| < \infty$$

を満たすとする．このとき変換

$$(T_\phi f)(u) := \int_0^1 dt\, f(ut)\phi(t), \quad 0 \le u \le 1,$$

は $L^2([0,1])$ から $L^2([0,1])$ への写像を定め

$$\|T_\phi f\|_{L^2([0,1])} \le C_\phi \|f\|_{L^2([0,1])}$$

を満たす．とくに $\phi \equiv 1$ とれば Hardy の $L^2$ 不等式が得られる．この話題については次節でもう少し詳しく扱う．

- Wiener 積分を定義する，という我々の当面の興味からは外れるのではあるが，実は上に出てきた定数 $C_{\phi^*}$ は 1 より小さく ($C_{\phi^*} = 0.781\cdots$)，従って non-trivial な下からの評価

$$E[I(f;\widehat{R})^2] \ge (1 - C_{\phi^*}) \|f\|^2_{L^2([0,1])}$$

も同時に得られていることになる．このような下からの評価は Brascamp-Lieb 不等式を用いたアプローチからは得られないことに注意．また，後の議論 (命題 4.1 (ii)) から分かるように，この定数 $1 - C_{\phi^*}$ は下からの評価としては最良 (optimal) である．

ところで舟木氏の講義において示されるように，次元が 3 以上の Bessel 過程については Brascamp-Lieb 不等式に基づく手法が適用でき，$L^2$ 評価(3.2) において実は $C = 1$ ととれる．このことと (3.5) とを照らし合わせると，

$$J_{\phi^*}(f) \ge 0, \quad \forall f \in L^2([0,1]), \tag{3.7}$$

が成り立たねばならない．では一体どのような仕組みでこのような正値性が成り立つのだろうか．これを考える上で鍵となるのは級数展開:

$$\phi^*(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1/2}, \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} > 0, \tag{3.8}$$

と次の命題である: $\alpha \in \mathbb{R}$ について

$$\phi_\alpha(t) = t^\alpha, \quad 0 < t < 1,$$

とする．$\alpha > -1/2$ については ($\int_0^1 dt\, t^{\alpha-1/2} < \infty$ であるので) $J_{\phi_\alpha}(f)$ が任意の $f \in L^2([0,1])$ について定義できる．

**命題 3.1 ([5]).** $\alpha > -1/2$ に対し

$$J_{\phi_\alpha}(f) \geq 0, \quad \forall f \in L^2([0,1]), \tag{3.9}$$

が成り立つ．

*証明.* $L^2([0,1])$ の元を連続関数で近似することにより(3.9) を $f$ が連続な場合に示せば十分である．変数変換および部分積分を用いて

$$\begin{aligned} J_{\phi_\alpha}(f) &= \int_0^1 du\, u^{-2\alpha-1} u^\alpha f(u) \int_0^u dv\, v^\alpha f(v) \\ &= F_\alpha(1) + (2\alpha+1)\int_0^1 du\, u^{-2\alpha-2} F_\alpha(u). \end{aligned}$$

ここに

$$F_\alpha(u) := \int_0^u ds\, f(s)s^\alpha \int_0^u dv\, f(v)v^\alpha = \frac{1}{2}\left(\int_0^u ds\, f(s)s^\alpha\right)^2 \geq 0.$$

従って主張が成り立つ． □

この命題と上の級数展開 (係数 $a_n$ が全て正であることに注意) とから(3.7) が結論できることは明らかだろう．

- $J_\phi(f)$ が十分広いクラスの $f$ について定義でき，それが非負となるような $\phi$ は，

$$\widetilde{\phi}(x) := e^{-|x|/2}\phi(e^{-|x|}), \quad x \in \mathbb{R},$$

がいわゆる正型関数 (function of positive type)，あるいはもっと一般に正型超関数 (distribution of positive type) となるものとして特徴付けられる ([1, Prop. 2.3]，[4, Cor. 2.4])．従ってもし $\widetilde{\phi}(x)$ が $x = 0$ で連続，すなわち $\phi(t)$ が $t = 1$ も含めてその付近で連続であれば (古典的な) Bochner の定理から $\phi$ は $\mathbb{R}$ 上のある正の対称有限測度 $\mu$ を用いて

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} t^{ix}\, d\mu(x)$$

と書ける ([1, Cor. 2.4])．より一般に $\phi \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,1])$ であっても超関数についての Fourier 変換に関する Bochner-Schwartz の定理 ([9, 7 章, 定理 18]) からやはり同様のことがいえる (ただしこの場合 $\mu$ は有限とは限らない)．[4] ではこのような Fourier 解析の観点から 2 次形式 $J_\phi(f)$ の上下からの評価について詳しく扱っている．

ところで最初は $C=1+C_{\phi^*}(=1.781\cdots)$ で，次に $C=1$ ととれることが分かったのだからさらに小さくなるのでは？と思われるかも知れないが，残念ながらそのようなことはなく，$C=1$ が最良であることが次のようにして分かる: (3.5) の形から，これをいうためには $J_{\phi^*}(f)/\|f\|^2_{L^2([0,1])}$ がいくらでも 0 に近くなるような $f$ の列を見つければよく，それは例えば $\alpha_n>-1/2$, $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ なる $\alpha_n, n\in\mathbb{N}$, について，$f_n(t)=t^{\alpha_n}$ というものを考えればよい．実際,

$$J_{\phi^*}(f_n)=\|f\|^2_{L^2([0,1])}\int_0^1 dt\, t^{\alpha_n}\phi^*(t)$$

で，$C_{\phi^*}=\int_0^1 dt\, t^{-1/2}\phi^*(t)<\infty$ であることから Lebesgue の収束定理よりこの右辺の積分は $n\to\infty$ として 0 に収束する．

**注意 3.1.** *Brascamp-Lieb* 不等式を用いた評価から分かるのはあくまでも $C=1$ ととれるということまでで，最良であるかどうかまでは分からない．

重複を厭わず以上まとめると:

$[0,1]$ 上の 任意の有界可測関数 $f$ について $L^2$ 評価(3.2) が $C=1$ を最良の定数として成り立つ．とくに，任意の $f\in L^2([0,1])$ に対して中心化 3 次元 Bessel 過程による Wiener 積分 $I(f;\widehat{R})$ は定義可能である．

§5 で示されるように，これと同じ主張が 1 以上の全ての次元の Bessel 過程について成り立つ．

# 4 一般化された Hardy の不等式

ここでは §3 で少し触れた Hardy の $L^2$ 不等式の一般化について，その主張を正確に述べるとともにその証明を紹介する．

**命題 4.1 ([1] Prop. 2.1; 一般化された Hardy の不等式).** *For a measurable, integrable function $\phi(t), 0\le t\le 1$, define the operator $T_\phi$ on the set of bounded, measurable functions $f$ on $[0,1]$ by*

$$(T_\phi f)(u):=\int_0^1 dt\, f(ut)\phi(t),\quad 0\le u\le 1.$$

(i) *Suppose that*

$$C_\phi:=\int_0^1 dt\,\frac{|\phi(t)|}{\sqrt{t}}<\infty. \tag{4.1}$$

*Then $T_\phi$ extends as a bounded linear operator on $L^2([0,1])$.*
(ii) *If $\phi$ is non-negative, then the operator norm $\|T_\phi\|$ of $T_\phi$ is equal to $C_\phi$; as a consequence, $T_\phi$ extends as a bounded linear operator on $L^2([0,1])$ if and only if $C_\phi<\infty$.*

For $\phi$ satisfying (4.1), we define the quadratic form $J_\phi$ on $L^2([0,1]) \times L^2([0,1])$ by:

$$J_\phi(f,g) = \int_0^1 du\, f(u) T_\phi g(u), \quad f, g \in L^2([0,1]).$$

**命題 4.1 の証明.** As is well known, it holds that:

$$\|T_\phi\| = \sup\{|J_\phi(f,g)|; f, g \in L^2([0,1]), \|f\|_2 \le 1, \|g\|_2 \le 1\}.$$

By Fubini's theorem and the Schwarz inequality, we have:

$$\begin{aligned} |J_\phi(f,g)| &\le \int_0^1 dt\, |\phi(t)| \|f\|_2 \left( \int_0^1 du\, g(ut)^2 \right)^{1/2} \\ &\le \int_0^1 dt\, \frac{|\phi(t)|}{\sqrt{t}} \|f\|_2 \|g\|_2, \end{aligned}$$

which shows $\|T_\phi\| \le C_\phi$. On the other hand, if $\phi \ge 0$ and we assume that $|J_\phi(f,g)| \le C\|f\|_2\|g\|_2$, then, by taking $f \equiv g \equiv \psi_\alpha$, where $\psi_\alpha(u) = u^\alpha$ for $\alpha > -1/2$, we get $|J_\phi(\psi_\alpha, \psi_\alpha)| \le C(1+2\alpha)^{-1}$, but

$$0 \le J_\phi(\psi_\alpha, \psi_\alpha) = \int_0^1 dt\, \phi(t) t^a \times \frac{1}{1+2\alpha}.$$

Therefore, $\int_0^1 dt\, \phi(t) t^\alpha \le C$ for every $\alpha > -1/2$, and thus letting $\alpha \downarrow -1/2$, we get $C_\phi \le C$, which ends the proof. □

# 5 Bessel過程およびそのべき乗の中心化過程によるWiener積分

この節では，原点を出発する一般の次元の Bessel 過程およびそのべき乗をとることで得られる確率過程について，それらの中心化過程による Wiener 積分を考える．なお，ここでは次元への依存性を明示するために，$\delta$ 次元 Bessel 過程を $R_\delta = (R_\delta(t), t \ge 0)$ で表す．$R_\delta$ と書いても $\delta$ は時間のパラメータではないことに注意されたい．

## 5.1 主結果

**定理 5.1 ([1], Th. 1.1, Cor. 1.2).** *For every $\delta \ge 1$, it holds that, for all bounded, measurable functions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,*

$$E[I(f; \widehat{R_\delta})^2] \le \|f\|^2_{L^2([0,1])}. \tag{5.1}$$

*As a consequence, the Wiener integral* $I(f;\widehat{R_\delta})$ *is well-defined for all* $f\in L^2([0,1])$ *and it also enjoys the property* (5.1)*. The constant 1 implicit in* (5.1) *is the optimal* $C$ *such that* $E[I(f;\widehat{R_\delta})^2]\le C\|f\|^2_{L^2([0,1])}$.

この定理は次の定理 5.2 の特別な場合である: One can extend the above results by replacing $(R_\delta(t),t\ge 0)$ by its $\alpha$-th power $R_\delta^\alpha(t)\equiv (R_\delta(t))^\alpha$, for every $\alpha$ such that $R_\delta^\alpha(t)$ is a semimartingale; that is,

$$\alpha\ge (2-\delta)_+.$$

Here $(a)_+=\max\{a,0\}$. For $\beta\in\mathbb{R}$ satisfying $\delta+\beta>0$, set

$$\kappa_\beta\equiv\kappa_\beta(\delta):=E[R_\delta^\beta(1)]\equiv 2^{\beta/2}\frac{\Gamma(\frac{\delta+\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\delta}{2})}.$$

Here $\Gamma$ denotes the Gamma function: $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt, x>0$.

**定理 5.2 ([1], Th. 1.3, Cor. 1.4).** *For* $\delta,\alpha>0$*, suppose that* $\alpha\ge(2-\delta)_+$*. Then it holds that, for all bounded, measurable functions* $f$ *on* $[0,1]$,

$$E[I(f;\widehat{R_\delta^\alpha})^2]\le\alpha^2\kappa_{2(\alpha-1)}\|f_\alpha\|_2^2, \tag{5.2}$$

*where* $f_\alpha(u):=f(u)u^{(\alpha-1)/2}$*. In particular, the Wiener integral* $I(f;\widehat{R_\delta^\alpha})$ *can be defined for every* $f\in L^2_\alpha([0,1]):=\{f;f_\alpha\in L^2([0,1])\}$*. The constant* $\alpha^2\kappa_{2(\alpha-1)}$ *in* (5.2) *is also optimal.*

**定理の主張に対する注意．** 定理 5.1，定理 5.2 の主張において，有界可測関数 $f$ に対する Wiener 積分 $I(f;\widehat{R_\delta}),I(f;\widehat{R_\delta^\alpha})$ は，それぞれ $\widehat{R_\delta},\widehat{R_\delta^\alpha}$ の semi-martingale 性を用いてともに定義可能である．$\delta\ge 1$ に対して $\widehat{R_\delta}$ が semi-martingale になることは(2.7)，(2.8) または(2.8′) の semi-martingale 分解から明らかであろう．では次に，定理 5.2 の条件のように $\delta>0,\alpha>0$ を $\alpha\ge(2-\delta)_+$ ととろう．$R_\delta$ を $\alpha$ 乗した確率過程及びその中心化過程

$$(R_\delta^\alpha(t),t\ge 0),\quad (\widehat{R_\delta^\alpha}(t),t\ge 0),$$

がともに semi-martingale になることは次のように確かめられる．

まず $\delta>2$ については $R_\delta$ は原点に戻ってこないので，$(R_\delta(t))^\alpha$ にそのまま伊藤の公式を用いれば，semi-martingale 分解(2.7) から

$$R_\delta^\alpha(t)=\alpha\int_0^t R_\delta^{\alpha-1}(u)\,dB_u+\frac{\delta_\alpha}{2}\int_0^t R_\delta^{\alpha-2}(u)\,du. \tag{5.3}$$

ここに $\delta_\alpha=\alpha(\delta+\alpha-2)$．ここで $B$ についての確率積分項について，スケーリング則により

$$E[R_\delta^{2(\alpha-1)}(u)]=u^{\alpha-1}E[R_\delta^{2(\alpha-1)}(1)]$$

であることに注意すれば (右辺の期待値は有限であることにも注意)，この確率積分は (2 乗可積分)martingale となることが分かるので，特にこの項の期待値は 0．よって中心化過程についても

$$\widehat{R_\delta^\alpha}(t) = \alpha \int_0^t R_\delta^{\alpha-1}(u)\, dB_u + \frac{\delta_\alpha}{2} \int_0^t \widehat{R_\delta^{\alpha-2}}(u)\, du \tag{5.4}$$

という semi-martingale 分解が成り立つ．

一方 $0 < \delta < 2$ に対しては，(2.9) の semi-martingale 分解を念頭において

$$R_\delta^\alpha(t) = \left(R_\delta^{2-\delta}(t)\right)^k, \quad k := \frac{\alpha}{2-\delta} \geq 1,$$

のようにみなしてから伊藤の公式を用いると，

$$\begin{aligned} R_\delta^\alpha(t) = \alpha \int_0^t R_\delta^{\alpha-1}(u)\, dB_u + \frac{\delta_\alpha}{2} \int_0^t R_\delta^{\alpha-2}(u)\, du \\ + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \left(R_\delta^{2-\delta}(u)\right)^{k-1} dl_u^0(R_\delta). \end{aligned}$$

ここで右辺第三項において $2-\delta, k-1$ ともに非負であり，また (ランダムな) 測度 $dl_u^0(R_\delta)$ は $\{u; R_\delta(u) = 0\}$ という集合上にしか台 (support) を持たない (すなわち「$l_u^0(R_\delta)$ は $R_\delta(u) = 0$ なる $u$ においてのみ増加する」) から，右辺の第三項は 0 となる．従ってこの場合も (5.3) と全く同じ分解が成り立ち，しかもいま $\alpha \geq 2-\delta$ であるので確率積分の項は 2 乗可積分 martingale，また $E[\int_0^t R_\delta^{\alpha-2}(u)\, du] = \int_0^t E[R_\delta^{\alpha-2}(u)]\, du < \infty$ となる．従って中心化過程 $\widehat{R_\delta^\alpha}$ も (5.4) という分解を持つ semi-martingale となる．

## 5.2 定理の証明のあらすじ

ここでは定理 5.1 の証明の概略を述べよう．

(1) **$\boldsymbol{\delta > 1}$ のとき**．このときは §3 で扱った 3 次元 Bessel 過程の場合と全く同様にして

$$\begin{aligned} &E[I(f; \widehat{R_\delta})^2] = \|f\|_{L^2([0,1])}^2 - J_{\Phi_\delta}(f), \\ &\Phi_\delta(t) := -(\delta - 1)\frac{d}{dt} E[\widehat{R_\delta}(t)\widehat{R_\delta^{-1}}(1)] \end{aligned} \tag{5.5}$$

となることがまず分かる．いま

$$\varphi_\delta(t) = E[\widehat{R_\delta}(t)\widehat{R_\delta^{-1}}(1)]$$

とおくと，命題 A.1 から Gauss の超幾何関数 (hypergeometric function) ${}_2F_1$ を用いて

$$\varphi_\delta(t) = K_\delta t^{1/2}\{{}_2F_1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\delta}{2}; t) - 1\}, \quad K_\delta = \frac{\Gamma(\frac{\delta+1}{2})\Gamma(\frac{\delta-1}{2})}{\{\Gamma(\frac{\delta}{2})\}^2},$$

と書ける．ここで ${}_2F_1$ の級数展開 (すなわち ${}_2F_1$ の定義そのもの) を思い出すと (例えば [7, (9.1.1) 式]),

$$\varphi_\delta(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n+1/2}, \quad b_n > 0,$$

のように表されることが分かる．従って

$$\begin{aligned}\Phi_\delta(t) &\equiv -(\delta-1)\varphi'_\delta(t) \\ &= (\delta-1)\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(n+\frac{1}{2}\right) t^{n-1/2}\end{aligned}$$

と，3 次元の場合の級数展開(3.8) と同様の形となり，従って命題 3.1 を用いて(5.1) が得られる．$C=1$が最良の定数であることも 3 次元 Bessel 過程の場合と同様に示すことができる．

(2) **$\delta = 1$ のとき**．　この場合は，例えば(2.8′) のように semi-martingale 分解を捉えたとして，Brown 運動の局所時間の性質を用いて具体的に計算ができ，(5.5) の形の等式が (記号の流用をして)

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}(1-\sqrt{1-t}) + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\right\}$$

として成り立つことが分かる (詳細は講演内で述べる予定です)．この級数展開を考えるとやはりこの場合も(3.8) と同じように係数が全て正の展開となり，従って(5.1) が結論できることになる．

# 6 Pseudo-Bessel 過程による Wiener 積分

この節では [3] に基づいて，pseudo-Bessel 過程と呼ばれる (1/2)-スケーリングを持つ semi-martingale のクラスを導入し，それによる Wiener 積分の定義可能性について考察する．詳細は講演に譲るが，どのような形の確率過程を考えるかについてだけ触れておくと: $(B_t, t \geq 0)$ を原点から出発する 1 次元 Brown 運動，$\Lambda, F$ を経路空間 (path space) $C([0,1];\mathbb{R})$ 上の実数値汎関数で

$$E[\Lambda(B)^2] < \infty, \quad E[F(B)^2] < \infty, \quad E[F(B)] = 0,$$

を満たすものとする．また，$u > 0$ について $B_s^{(u)} := \frac{1}{\sqrt{u}} B_{us}, s \geq 0$ と定める．スケーリング則から $B^{(u)}$ は再び Brown 運動となる．これらについて pseudo-Bessel 過程 $(X_t^{\Lambda,F}, 0 \leq t \leq 1)$ を

$$X_t^{\Lambda,F} = \int_0^t \Lambda(B^{(u)})\, dB_u + \int_0^t \frac{F(B^{(u)})}{\sqrt{u}}\, du$$

と定める．

# A $\varphi_\delta$ の超幾何関数による表示について

Following [10], for complex numbers $a, b, c$, we denote by ${}_2F_1(a, b; c; w), |w| < 1$, Gauss' hypergeometric functions. Recall that, when $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$, they admit the following integral representation:

$$ {}_2F_1(a, b; c; w) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dz\, z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}(1-wz)^{-a}. \tag{A.1} $$

See, e.g, [7, (9.1.4)].

In this subsection, we discuss an explicit representation for the function $\varphi_\delta(t) \equiv E[\widehat{R_\delta}(t)\widehat{R_\delta^{-1}}(1)]$, defined in §5.2, in terms of ${}_2F_1$. We do this in a slightly general situation: For dimension $\delta > 0$, and for two exponents $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, satisfying $\delta + \alpha_i > 0$, set

$$ \phi_{\alpha_1;\alpha_2}(t) = E[\widehat{R_\delta^{\alpha_1}}(t)\widehat{R_\delta^{\alpha_2}}(1)], \quad 0 < t < 1. $$

**命題 A.1.** *Suppose $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\beta > 0$ satisfy $\delta + \alpha > 0$ and $\delta > \beta$, respectively. Then the function $\phi_{\alpha;-\beta}(t)$ admits the following representation:*

$$ \phi_{\alpha;-\beta}(t) = 2^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\delta+\alpha}{2})\Gamma(\frac{\delta-\beta}{2})}{\{\Gamma(\frac{\delta}{2})\}^2} t^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ {}_2F_1(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}; \frac{\delta}{2}; t) - 1 \right\}. $$

In the following proof, we denote by the pair $(R = (R_t, t \geq 0), P_x^{(\delta)})$ a BES$(\delta)$-process starting from $x$: $P_x^{(\delta)}(R_0 = x) = 1$ for $x \geq 0$. (従って**以下の証明では $R$ の下つきの添え字は時間パラメータ**です．) We denote by $E_x^{(\delta)}$ the expectation with respect to $P_x^{(\delta)}$. When $x = 0$, we often write $E$ for $E_0^{(\delta)}$ and $P$ for $P_0^{(\delta)}$.

**証明.** Since $\beta > 0$, we may rewrite $R_1^{-\beta}$ into:

$$ R_1^{-\beta} = 2^{-\beta/2}\left(R_1^2/2\right)^{-\beta/2} = 2^{-\beta/2}\Gamma(\beta/2)^{-1} \int_0^\infty \frac{dx}{x} x^{\beta/2} \exp\left(-\frac{x}{2}R_1^2\right). $$

Then by Fubini's theorem,

$$ E[R_t^\alpha R_1^{-\beta}] = 2^{-\beta/2}\Gamma(\beta/2)^{-1} \int_0^\infty \frac{dx}{x} x^{\beta/2} E[R_t^\alpha \exp\left(-\frac{x}{2}R_1^2\right)]. \tag{A.2} $$

By the Markov property, we have, conditionally on $\mathcal{F}_t^R \equiv \sigma\{R_u, u \leq t\}$,

$$ \begin{aligned} E_0^{(\delta)}[\exp\left(-\frac{x}{2}R_1^2\right) | \mathcal{F}_t^R] &= E_{R_t}^{(\delta)}[\exp\left(-\frac{x}{2}R_{1-t}^2\right)] \\ &= \{1 + x(1-t)\}^{-\delta/2} \exp\left\{-\frac{x}{2(1+x(1-t))}R_t^2\right\}. \end{aligned} \tag{A.3} $$

Here the second equality follows from the well-known fact that: for $a \geq 0$,

$$E_a^{(\delta)}[\exp\left(-\frac{x}{2}R_s^2\right)] = (1+xs)^{-\delta/2}\exp\left(-\frac{x}{1+xs}a^2\right).$$

See, e.g., [8, p.422]. By (A.3), we then have:

$$\begin{aligned} E[R_t^\alpha \exp\left(-\frac{x}{2}R_1^2\right)] &= \{1+x(1-t)\}^{-\delta/2} E[R_t^\alpha \exp\left\{-\frac{x}{2(1+x(1-t))}R_t^2\right\}] \\ &= (2t)^{\alpha/2}\Gamma(\delta/2)^{-1}\Gamma((\delta+\alpha)/2)\frac{1}{(1+x)^{\delta/2}}\left(1-\frac{x}{1+x}t\right)^{\alpha/2}, \end{aligned}$$

where, for the second line, we used the fact that $R_t \stackrel{(d)}{=} \sqrt{2t\gamma_{\delta/2}}$. Plugging this into (A.2), and changing variables with $x/(1+x) = z$, we arrive at

$$E[R_t^\alpha R_1^{-\beta}] = 2^{(\alpha-\beta)/2}\frac{\Gamma(\frac{\delta+\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{\delta}{2})}t^{\alpha/2}\int_0^1 dz\, z^{\frac{\beta}{2}-1}(1-z)^{\frac{\delta-\beta}{2}-1}(1-tz)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

By the integral representation (A.1), the above integral in $z$ is expressed as:

$$\frac{\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{\delta-\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\delta}{2})}{}_2F_1(-\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2};\frac{\delta}{2};t).$$

Now we see

$$E[R_t^\alpha R_1^{-\beta}] = 2^{(\alpha-\beta)/2}\frac{\Gamma(\frac{\delta+\alpha}{2})\Gamma(\frac{\delta-\beta}{2})}{\{\Gamma(\frac{\delta}{2})\}^2}t^{\alpha/2}{}_2F_1(-\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2};\frac{\delta}{2};t). \tag{A.4}$$

On the other hand, by scaling,

$$E[R_t^\alpha]E[R_1^{-\beta}] = t^{\alpha/2}E[R_1^\alpha]E[R_1^{-\beta}] \equiv t^{\alpha/2}\times 2^{(\alpha-\beta)/2}\frac{\Gamma(\frac{\delta+\alpha}{2})\Gamma(\frac{\delta-\beta}{2})}{\{\Gamma(\frac{\delta}{2})\}^2}.$$

Therefore, combining this with (A.4), and noting $\phi_{\alpha;-\beta}(t) = E[R_t^\alpha R_1^{-\beta}] - E[R_t^\alpha]E[R_1^{-\beta}]$, we have the lemma. □

## 参考文献


[1] T. Funaki, Y. Hariya and M. Yor, *Wiener integrals for centered powers of Bessel processes, I*, to appear in Markov Proc. Relat. Fields.

[2] T. Funaki, Y. Hariya and M. Yor, *Wiener integrals for centered Bessel and related processes, II*, ALEA (Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics), **1** (2006), pp. 225–240.

[3] T. Funaki, Y. Hariya, F. Hirsch and M. Yor, *On the construction of Wiener integrals with respect to certain pseudo-Bessel processes*, to appear in Stoch. Proc. Appl.

[4] T. Funaki, Y. Hariya, F. Hirsch and M. Yor, *On some Fourier aspects of the construction of certain Wiener integrals*, to appear in Stoch. Proc. Appl.

[5] F. Hirsch, *personal communication*, March 2005.

[6] T. Jeulin, *Semi-Martingales et Grossissement d'une Filtration*, Lect. Notes Math., **833**, Springer, Berlin, 1980.

[7] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, 1972.

[8] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 2nd ed., Springer, Berlin, 1994. ※第 3 版でないことに注意して下さい.

[9] L. Schwartz 著, 岩村 聯 他訳, 超関数の理論, 岩波書店, 1971.

[10] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London, 1962.

[11] M. Yor, *Some Aspects of Brownian Motion. Part I: Some special functionals*, Birkhäuser, Basel, 1992.

[12] M. Yor, *Some Aspects of Brownian Motion. Part II: Some recent martingale problems*, Birkhäuser, Basel, 1997.