イジング模型における大偏差原理と相転移

確率論サマースクール
2007 年 8 月 7 日〜8 月 10 日, 信州大学

杉峰 伸明* (数理解析研究所)

本稿では, 高次元イジング模型における相転移下での大偏差原理 ([B99, BIV00, CP00]) の紹介を目的とし, [P96] において提案された粗視化等のその理解に必要なことがらを解説する. クラメールの定理と同様のオーダーを持つ体積オーダー大偏差原理は, (無限体積) ギブス測度のエルゴード性から導かれるが, 相転移下においてはその速さ関数の零点が区間を形成するため, 特にその区間では有益な意味を成さない. それ故相転移下では, より低次のオーダーの大偏差原理が要請され, そのオーダーは, 相転移を支配する (系の) 境界のオーダーである表面積オーダーとなる. またその速さ関数は, 相転移の秩序変数でもある表面張力から定まる汎関数によって与えられ, その最小値は変分問題を解くウルフ図形によって実現される.

目 次

*E-mail: sugimine@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 イントロ

高次元イジング模型の低温領域 ($d \geq 3$, $T < T_c(d)$) における, 比磁化確率変数 $\mathbb{M}_N$ に対する大偏差型の評価と, 事象 $\{\mathbb{M}_N \leq m\}$ ($m \in [-1,1]$) 上の典型的なスピン配置 $(\sigma_x)_{x\in\Lambda_N}$ に関する結果を紹介する. ただし, $\Lambda_N = (-N/2, N/2]^d \cap \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathbb{M}_N = |\Lambda_N|^{-1}\sum_{x\in\Lambda_N}\sigma_x$ であって, $T_c(d)$ は臨界温度である. これらの結果は, Bodineau([B99]) により十分低温な場合に対し, Cerf-Pisztora([CP00]) により (付帯条件付きではあるが) ある種の臨界温度 $\widehat{T}(d)$ より低温な場合に対し示された. さらに [B05, B06] により, $\widehat{T}(d) = T_c(d)$ であって低温領域で付帯条件が成り立つことが示された. [B99] において十分低温に限定せざるを得なかった理由は, 表面張力とＦＫパーコレーションにおけるある境界条件下での横断確率との関連を導く際にパイエルス型議論を用いるからである. しかしながら, そのことを除いては [B99] の議論も [CP00] と同じ条件の下で展開可能であって, そのパイエルス型議論に換えて [CP00] の 3 節の結果を用いれば十分低温という条件を外すことも可能である. そこで議論の見通しを考慮し, 本稿では [B99] に基づいて上述の結果を紹介する. また, [B99, CP00] における温度領域に関する条件は Pisztora の提案 ([P96]) に基づいているが, それは, [P96] で導入された粗視化 (Pisztora's coarse graining) が証明の重要な鍵となっているからである.

まず低温領域について概説し, 結果を述べるに必要な概念や記号を導入する. これより以後では逆温度 $\beta(\propto 1/T)$ を導入し, 温度領域に関する条件は β を用いて表す. $+$-境界条件と $-$-境界条件下で熱力学極限を取ることによって, DLR 方程式により定式化される無限体積ギブス測度となる μ_+^β, μ_-^β が得られる. これらの無限体積ギブス測度 μ_+^β, μ_-^β は平行移動不変測度であり, FKG 不等式の意味において μ_+^β は最大であって μ_-^β は最小である. また, ある臨界逆温度 $\beta_c(d) \in (0,\infty)$ が存在して,

$$\mu_+^\beta = \mu_-^\beta \quad (\beta < \beta_c(d)), \qquad \mu_+^\beta \neq \mu_-^\beta \quad (\beta > \beta_c(d))$$

が成り立つ. このことは, 臨界温度 $T_c(d)$ より高温では一つの相のみしか存在し得ないのに対して, 低温では少なくとも二つの相が存在すること, すなわち, 相転移が起こっていることを示している. $+$-境界条件下での比磁化 $m_\beta = \mu_+^\beta[\sigma_O]$ を取ると,

$$m_\beta = 0 \quad (\beta < \beta_c(d)), \qquad m_\beta > 0 \quad (\beta > \beta_c(d))$$

となるので, 磁化率 m_β は相転移に対する秩序変数となっている. $m_\beta > 0$ となることを, 自発磁化が出現していると言う. ただし, O は原点を表し, $\nu[f]$ は関数 f の確率測度 ν に関する平均を表す. μ_+^β の下でエルゴード定理を適用すると

$$\mathbb{M}_N = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \Lambda_N} \sigma_x \to m_\beta \quad (n \to \infty) \quad \mu_+^\beta\text{-}a.s.$$

が分かる. また, 模型の対称性より向きには依らない座標軸方向の表面張力 τ_β を考えると,

$$\tau_\beta = 0 \quad (\beta \le \beta_c(d)), \qquad \tau_\beta > 0 \quad (\beta > \beta_c(d))$$

となるので ([B05]), 表面張力 τ_β も相転移に対する秩序変数となっている.

低温領域における, 比磁化確率変数 $\mathbb{M}_N$ に対する大偏差型の評価と, 事象 $\{\mathbb{M}_N \le m\}$ 上の典型的なスピン配置に関する結果について概説する. ここで扱われる測度は無限体積ギブス測度 μ_+^β ではなく, $+$-境界条件下での Λ_N に対する有限体積ギブス測度 $\mu_{N,+}^\beta$ であることに注意する. 分布の弱収束の意味において $\mu_{N,+}^\beta \to \mu_+^\beta$ $(N \to \infty)$ となることから推測されるように,

$$\mu_{N,+}^\beta[\mathbb{M}_N] \to m_\beta \quad (N \to \infty)$$

であって, [Co86, FO88, O88] より

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \log \mu_{N,+}^\beta\left(|\mathbb{M}_N| \ge m\right) \begin{cases} < 0 & (m > m_\beta) \\ = 0 & (m \le m_\beta) \end{cases}$$

が成り立つ. このことより, $\mathbb{M}_N$ が概ね m_β の値を取る確率が高いと考えられるので, $m < m_\beta$ に対し事象 $\{\mathbb{M}_N \le m\}$ の起こる確率を考える. $+$-境界条件下では, $-$-スピンの塊はその境界面で $+$-スピンと必ず接することから, $-$-スピンの塊の境界面が大きくなるに従い高エネルギーを有するようになり, スピン配置毎には出現確率が低くなる. それ故, $-$-スピン数の増加に伴うエネルギー増大が生じる $\{\mathbb{M}_N \le m\}$ のような事象では, $-$-スピンの塊の境界面に比較的低いエネルギーが生じるような一部のスピン配置の出現確率が, 事象 $\{\mathbb{M}_N \le m\}$ の起こる確率とほぼ等しいと考えられる.

$(d-1)$ 次元単位球面を $\mathbb{S}^{d-1}$ と表し, 法線ベクトル $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ に対する表面張力を $\tau_\beta(\overrightarrow{n}) \in (0,\infty)$ と表す. 適当な有界集合 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対し A の総表面張力を

$$\mathcal{F}_\beta(A) = \int_{\partial A} \tau_\beta(\overrightarrow{n}_t)\, d\mathcal{H}_t$$

と定める. ただし, $A \subset \mathbb{R}^d$ に対し ∂A は A の境界を, $t \in \partial A$ に対し $\overrightarrow{n}_t$ は A の t における外法線ベクトルを, $d\mathcal{H}$ は $(d-1)$ 次元ハウスドルフ測度を表す. この時, 一定体積の下での $\mathcal{F}_\beta$ の最小値は, ウルフ図形

$$\mathcal{W}_\beta = \bigcap_{\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}} \{t \in \mathbb{R}^d : t \cdot \overrightarrow{n} \le \tau_\beta(\overrightarrow{n})\}$$

の相似形によって実現される. ただし, $t, t' \in \mathbb{R}^d$ に対し $t \cdot t'$ は t と t' の $\mathbb{R}^d$ における内積を表す. スケールを N 倍して Λ_N と対応するように, $\mathcal{T} = (-1/2, 1/2]^d$ を取り $\bar{\lambda}_\beta = \sup\{\lambda > 0 : \lambda\mathcal{W}_\beta \subset \mathcal{T}\}$ と定める. さらに, $(N\bar{\lambda}_\beta\mathcal{W}_\beta) \cap \mathbb{Z}^d$ 内のスピン配置が μ_-^β に従い, $\Lambda_N \backslash ((N\bar{\lambda}_\beta\mathcal{W}_\beta) \cap \mathbb{Z}^d)$ 内のスピン配置が μ_+^β に従う状況を考え,

$$m'_\beta = m_\beta \int_{\mathcal{T}} \chi_{(\bar{\lambda}_\beta\mathcal{W}_\beta)}(t)\, dt$$

と定める．ただし，$A \subset \mathcal{T}$ に対し 1_A を A の指示関数とし，$\chi_A = 1_{\mathcal{T}\setminus A} - 1_A$ とする．同様に，$m \in (m'_\beta, m_\beta]$ に対し λ_m を

$$m = m_\beta \int_{\mathcal{T}} \chi_{(\lambda_m \mathcal{W}_\beta)}(t)\, dt$$

をみたすように取り，$\mathcal{W}_\beta(m) = \lambda_m \mathcal{W}_\beta$ と定める．定め方より，$\lambda_{m_\beta} = 0$, $\lambda_{m'_\beta} = \bar{\lambda}_\beta$ となる．この時，$m \in (m'_\beta, m_\beta]$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mu^\beta_{N,+}(\mathbb{M}_N \le m) = -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m)) \tag{1.1}$$

および

$$\lim_{N\to\infty} \mu^\beta_{N,+}\left(\begin{array}{c} \text{粗視化されたスピン配置がウルフ図形 } \mathcal{W}_\beta(m) \text{ に} \\ \mathrm{L}^1\text{-距離の意味で近い} \end{array} \middle| \, M_N \le m \right) = 1 \tag{1.2}$$

が成り立つ．本稿では，(1.1) と (1.2) の理解に必要なイジング模型の知識を補いながら，(1.1) と (1.2) について解説する．イジング模型に関しては [KH06] を参考にしたので，より詳しく知りたい方は，[KH06] もしくはそこに挙げられている参考文献をご覧頂きたい．

2　イジング模型と相転移

2.1　有限体積ギブス測度

空でない有限集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ を $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ で表し，その頂点数を $|\Lambda|$ で表す．二つの距離関数 d_1 と d_∞ を，各 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対し $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_d - y_d|$, $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_d - y_d|\}$ と定める．各 $\Delta, \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $d_p(\Delta, \Lambda) = \min\{d_p(x,y) : x \in \Delta, y \in \Lambda\}$ と定め，$d_p(\{x\}, \Lambda)$ を $d_p(x, \Lambda)$ で表す．ただし，$p = 1$ または ∞ である．$d_1(x,y) = 1$ であることを $x \sim y$ で表す．各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対して，その内部境界と外部境界を $\partial_{in}\Lambda = \{x \in \Lambda : x \sim y$ となる $y \notin \Lambda$ が存在する $\}$, $\partial_{ex}\Lambda = \{y \notin \Lambda : y \sim x$ となる $x \in \Lambda$ が存在する $\}$ と定め，$\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial_{ex}$ とする．原点 $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ を O と表す．各 $N \in \mathbb{N}$ に対し $\Lambda_N = (-N/2, N/2]^d \cap \mathbb{Z}^d$ とし，$\bar{\Lambda}_N = \Lambda_N \cup \partial_{ex}\Lambda_N$ とする．

スピン配置空間として $\Omega = \{+1, -1\}^{\mathbb{Z}^d}$ を取り，直積位相を導入する．シグマ加法族としてはボレル集合族を取り $\mathscr{F}$ と表す．スピン配置 $(\sigma_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ を σ 等と表す．空でない各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ と $\bar{\sigma} \in \Omega$ に対して，Λ の外側のスピン配置を $\bar{\sigma}$ で指定された Ω の部分空間を $\Omega^{\bar{\sigma}}_\Lambda = \{\sigma \in \Omega : \sigma_x = \bar{\sigma}_x \ (\forall x \notin \Lambda)\}$ とする．Λ 上のスピン配置空間 $\{+1, -1\}^\Lambda$ を Ω_Λ と表し，Λ 上のスピン配置 $(\sigma_x)_{x \in \Lambda}$ を $\sigma_\Lambda (\in \Omega_\Lambda)$ もしくは $\sigma (\in \Omega_\Lambda)$ 等と表す．Ω_Λ を Ω の Λ への制限とみなすこともある．$\Omega^{\bar{\sigma}}_\Lambda$ と Ω_Λ には共に，Ω の位相から自然に誘導される直積位相を導入し，シグマ加法族としてはボレル集合族を取る．また，Ω から Ω_Λ への (正) 射影によって導かれるシグマ加法族を $\mathscr{F}_\Lambda$ と表す．

イジング模型 (Ising) におけるギブス (Gibbs) 測度を導入する．各 $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $\bar{\sigma} \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}$ に対して，Ω_Λ 上の関数

$$H^h_\Lambda(\sigma_\Lambda|\bar{\sigma}) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \sim y}} \sigma_x \sigma_y - \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} \sigma_x \bar{\sigma}_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x \quad (\sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda) \tag{2.1}$$

を境界条件 $\bar{\sigma}$ と外部磁場 h を持つ Λ 上の**ハミルトニアン**と呼ぶ．各 $\beta > 0$ に対して，ハミルトニアン $H^h_\Lambda(\cdot|\bar{\sigma})$ を持つ Ω_Λ 上の確率測度

$$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{\mathrm{Z}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\beta, h)} \exp\Big(-\beta H^h_\Lambda(\sigma_\Lambda|\bar{\sigma})\Big) \quad (\sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda) \tag{2.2}$$

を境界条件 $\bar{\sigma}$ と外部磁場 h を持つ Λ 上の **(有限体積) ギブス測度**と呼ぶ. また, 正規化定数 $\mathrm{Z}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\beta,h)$ を**分配関数**と呼び, β を**逆温度**と呼ぶ. $\bar{\sigma}\equiv\pm 1$ を境界条件とする時には, $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,+}$, $H^h_\Lambda(\sigma_\Lambda|+)$ や $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,-}$, $H^h_\Lambda(\sigma_\Lambda|-)$ 等と表す. 特に, $h=0$ の時は h を省略して $H_\Lambda(\cdot|\bar{\sigma})$ や $\mu^{\beta}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ と表し, それぞれ, 境界条件 $\bar{\sigma}$ を持つ Λ 上のハミルトニアンや有限体積ギブス測度と呼ぶ. 場合によっては (例えば, 命題 2.3 や DLR 方程式), $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ を $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\Omega^{\bar{\sigma}}_\Lambda)=1$ である Ω 上の確率測度とみなす.

注意 2.1. 任意に $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$, $\bar{\sigma}\in\Omega$, $h\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ を取る. この時, 任意の $c\in\mathbb{R}$ に対し

$$\widetilde{H}^h_\Lambda(\sigma_\Lambda|\bar{\sigma})=H^h_\Lambda(\sigma_\Lambda|\bar{\sigma})+c\quad(\sigma_\Lambda\in\Omega_\Lambda)$$

とハミルトニアンを定め, 対応するギブス測度を $\widetilde{\mu}^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ とすると

$$\widetilde{\mu}^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}=\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$$

が成り立つ. すなわち, ハミルトニアン $H^h_\Lambda(\cdot|\bar{\sigma})$ と $\widetilde{H}^h_\Lambda(\cdot|\bar{\sigma})$ は等価である.

記号を導入する. 確率測度 ν とその可積分関数 f に対して, $\nu[f]$ で関数 f の ν による平均を表す. $\Delta,\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ を $\emptyset\neq\Delta\subset\Lambda$ をみたすように取り, $\sigma\in\Omega_\Delta$, $\bar{\sigma}\in\Omega_\Lambda$ とする時, Λ 上のスピン配置 $\sigma_\Delta\bar{\sigma}$ を

$$(\sigma_\Delta\bar{\sigma})_x=\sigma_x\quad(x\in\Delta),\qquad(\sigma_\Delta\bar{\sigma})_x=\bar{\sigma}_x\quad(x\in\Lambda\backslash\Delta)$$

と定める. $\bar{\sigma}$ の Δ 上への制限を $\bar{\sigma}_\Delta\in\Omega_\Delta$ と表す. すなわち, $(\bar{\sigma}_\Delta)_x=\bar{\sigma}_x$ $(\forall x\in\Delta)$ である. Δ 上のスピン配置が $\bar{\sigma}$ と一致するスピン配置の集合 $[\bar{\sigma}_\Delta]_\Lambda\subset\Omega_\Lambda$ を

$$[\bar{\sigma}_\Delta]_\Lambda=\{\eta\in\Omega_\Lambda:\text{全ての }x\in\Delta\text{ に対し }\eta_x=\bar{\sigma}_x\text{ である }\}$$

と定める. 連続関数の族 $\mathscr{C}_\Lambda$ と $\mathscr{C}$ をそれぞれ

$$\mathscr{C}_\Lambda=\{f\mid f:\Omega\to\mathbb{R}\text{ は }\mathscr{F}_\Lambda\text{-可測である }\},\qquad\mathscr{C}=\bigcup_{\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d}\mathscr{C}_\Lambda$$

と定める. 各 $f\in\mathscr{C}$ に対する $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ による平均 $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}[f]$ を, $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ を Ω または $\Omega^{\bar{\sigma}}_\Lambda$ 上の確率測度として定める. すなわち, $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}[f]=\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}[f((\cdot)_\Lambda\bar{\sigma})]$ である.

注意 2.2. (1) Ω のコンパクト性より連続関数は有界である. 特に, $f\in\mathscr{C}$ ならば f は有界である.
(2) 任意の Ω 上の連続関数は, $\mathscr{C}$ に属する関数で一様に近似される.
(3) $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$ とする. 任意の $f\in\mathscr{C}_\Lambda$ は, ある単調増加関数 $f_1,f_2\in\mathscr{C}_\Lambda$ を用いて $f=f_1-f_2$ と表される.

定理 2.3. 任意に $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$, $\bar{\sigma}\in\Omega$, $h\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ を取る. この時, 任意の $\Delta\subset\Lambda$ $(\Delta\neq\emptyset)$, $f\in\mathscr{C}$ に対し

$$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}[f]=\int_{\Omega_\Lambda}\mu^{\beta,h}_{\Delta,\sigma_\Lambda\bar{\sigma}}[f]\,d\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\sigma_\Lambda)\tag{2.3}$$

が成り立つ. すなわち, $\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ の $\Lambda\backslash\Delta$ 上のスピン配置に関する条件付き確率に対し

$$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\eta_\Delta\sigma\mid[\sigma_{\Lambda\backslash\Delta}]_\Lambda)=\mu^{\beta,h}_{\Delta,\sigma_\Lambda\bar{\sigma}}(\eta_\Delta)\quad(\forall\sigma\in\Omega_\Lambda,\ \eta\in\Omega_\Delta)$$

が成り立つ. 言い換えると

$$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\eta_\Delta\sigma\mid\mathscr{F}_{\Lambda\backslash\Delta})(\sigma)=\mu^{\beta,h}_{\Delta,\sigma_\Lambda\bar{\sigma}}(\eta_\Delta)\quad(\forall\sigma\in\Omega^{\bar{\omega}}_\Lambda,\ \eta\in\Omega_\Delta)$$

が成り立つ.

証明. $\bar{\sigma} \in \Omega$ とし $\emptyset \neq \Delta \subset \Lambda$ とする. 任意の $\eta_{\Lambda \setminus \Delta} \in \Omega_{\Lambda \setminus \Delta}$ に対し

$$H_\Lambda^h(\eta_{\Lambda \setminus \Delta}\sigma|\bar{\sigma}) - H_\Delta^h(\sigma_\Delta|\eta_{\Lambda \setminus \Delta}\bar{\sigma}) = \text{一定} \quad (\forall \sigma \in [\eta_{\Lambda \setminus \Delta}]_\Lambda)$$

であるので, 任意の $\eta \in \Omega_\Lambda$, $\sigma \in [\eta_{\Lambda \setminus \Delta}]_\Lambda$ に対し

$$\begin{aligned} H_\Lambda^h(\sigma|\bar{\sigma}) &= H_\Delta^h(\sigma_\Delta|\eta_\Lambda\bar{\sigma}) + H_\Lambda^h(\sigma|\bar{\sigma}) - H_\Delta^h(\sigma_\Delta|\eta_\Lambda\bar{\sigma}) \\ &= H_\Delta^h(\sigma_\Delta|\eta_\Lambda\bar{\sigma}) + H_\Lambda^h(\eta|\bar{\sigma}) - H_\Delta^h(\eta_\Delta|\eta_\Lambda\bar{\sigma}) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $f = 1_\eta$ とすると

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\Lambda} \mu_{\Delta,\sigma_\Lambda\bar{\sigma}}^{\beta,h}[1_\eta]\, d\mu_{\Lambda,\bar{\sigma}}^{\beta,h}(\sigma_\Lambda) \\ &= \sum_{\sigma \in [\eta_{\Lambda \setminus \Delta}]_\Lambda} \frac{1}{\mathrm{Z}_{\Delta,\eta_\Lambda\bar{\sigma}}(\beta,h)} \exp\left(-\beta H_\Delta^h(\eta_\Delta|\eta_\Lambda\bar{\sigma})\right) \mu_{\Lambda,\bar{\sigma}}^{\beta,h}(\sigma) \\ &= \frac{1}{\mathrm{Z}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\beta,h)} \exp\left(-\beta H_\Lambda^h(\eta|\bar{\sigma})\right) \frac{1}{\mathrm{Z}_{\Delta,\eta_\Lambda\bar{\sigma}}(\beta,h)} \sum_{\sigma \in [\eta_{\Lambda \setminus \Delta}]_\Lambda} \exp\left(-\beta H_\Delta^h(\sigma_\Delta|\eta_\Lambda\bar{\sigma})\right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{Z}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\beta,h)} \exp\left(-\beta H_\Lambda^h(\eta|\bar{\sigma})\right) \end{aligned}$$

が成り立つが, (2.3) を示すにはこれで十分である. □

2.2 FKG 不等式

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ とする. $\sigma, \sigma' \in \Omega_\Lambda$ が $\sigma' \geq \sigma$ であるとは,

$$\sigma'_x \geq \sigma_x \quad (\forall x \in \Lambda)$$

をみたす時に言うことにして Ω_Λ に半順序を導入する. $f : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}$ が**単調増加** (**単調減少**) であるとは, $\sigma, \sigma' \in \Omega_\Lambda$ が $\sigma' \geq \sigma$ をみたすならば

$$f(\sigma') \geq f(\sigma) \qquad (f(\sigma') \leq f(\sigma))$$

が成り立つ時に言う. 事象 $A \subset \Omega_\Lambda$ が**単調増加** (**単調減少**) であるとは, A の指示関数 1_A が単調増加 (単調減少) である時に言う. 例えば, 事象 $\{\sigma_O = +1\}$ は単調増加である. 各 $\sigma, \eta \in \Omega_\Lambda$ に対し $\sigma \vee \eta$, $\sigma \wedge \eta \in \Omega_\Lambda$ を, それぞれ

$$(\sigma \vee \eta)_x = \max\{\sigma_x, \eta_x\} \quad (x \in \Lambda), \qquad (\sigma \wedge \eta)_x = \min\{\sigma_x, \eta_x\} \quad (x \in \Lambda)$$

と定める.

定理 2.4. $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ とし, Ω_Λ 上の確率測度 ν は, 全ての $\sigma \in \Omega_\Lambda$ に対し $\nu(\sigma) > 0$ をみたすとする. この時, 任意の $\sigma, \eta \in \Omega_\Lambda$ に対し

$$\nu(\sigma \vee \eta)\nu(\sigma \wedge \eta) \geq \nu(\sigma)\nu(\eta) \tag{2.4}$$

が成り立つならば, 任意の単調増加関数 $f, g : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}$ に対し

$$\nu[fg] \geq \nu[f]\nu[g] \tag{2.5}$$

が成り立つ.

定理 2.4 の証明は省略する．条件 (2.4) を FKG lattice condition と呼び，不等式 (2.5) を **FKG 不等式**と呼ぶ．また，条件 (2.4) は強 FKG 不等式と呼ばれるものと同値である．特に，(2.5) において $g \geq 0,\ g \not\equiv 0$ とすると $\nu' = \nu g/\nu[g]$ で定まる確率測度 ν' と ν に対し

$$\nu'[f] \geq \nu[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}) \tag{2.6}$$

が成り立つので，不等式 (2.6) を FKG 不等式と呼ぶこともある．

系 2.5. 任意に $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $\bar{\sigma} \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る．この時，$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ は (2.4) をみたす．従って特に，任意の単調増加関数 $f, g : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}[fg] \geq \mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}[f]\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}[g] \tag{2.7}$$

が成り立つ．

証明．ギブス測度の定義 (2.2) と定理 2.4 より，任意の $\sigma, \eta \in \Omega_\Lambda$ に対し

$$H^h_\Lambda(\xi|\bar{\sigma}) + H^h_\Lambda(\xi'|\bar{\sigma}) \leq H^h_\Lambda(\sigma_\Lambda|\bar{\sigma}) + H^h_\Lambda(\eta_\Lambda|\bar{\sigma}) \tag{2.8}$$

を示せばよい．ただし，$\xi = \sigma \vee \eta$, $\xi' = \sigma \wedge \eta$ である．しかるに，任意の $x \in \Lambda$ に対し $\xi_x + \xi'_x = \sigma_x + \eta_x$ であることより，

$$\begin{aligned}
&H^h_\Lambda(\sigma|\bar{\sigma}) + H^h_\Lambda(\eta|\bar{\sigma}) - H^h_\Lambda(\xi|\bar{\sigma}) - H^h_\Lambda(\xi'|\bar{\sigma}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \sim y}} 1_{\{\sigma_x \neq \eta_x, \sigma_y \neq \eta_y\}} (\xi_x \xi_y + \xi'_x \xi'_y - \sigma_x \sigma_y - \eta_x \eta_y) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \sim y}} 1_{\{\sigma_x \neq \eta_x, \sigma_y \neq \eta_y\}} (\sigma_x - \eta_x)(\eta_y - \eta_x) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

となるので (2.8) を得る． □

系 2.6. 任意に $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る．この時，$\bar{\sigma}, \bar{\sigma}' \in \Omega$ が $\bar{\sigma}' \geq \bar{\sigma}$ をみたすならば，

$$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}'}[f] \geq \mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R})$$

が成り立つ．

証明．任意に $\bar{\sigma}, \bar{\sigma}' \in \Omega$ を $\bar{\sigma}' \geq \bar{\sigma}$ をみたすように取り，$\nu' = \mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}'}$, $\nu = \mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ として (2.6) が成り立てばよいので，$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}'}/\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ が単調増加であることを示せばよい．しかるに，任意の $\sigma, \eta \in \Omega_\Lambda$ に対し

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}'}(\sigma)}{\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\sigma)} \left(\frac{\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}'}(\eta)}{\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\eta)} \right)^{-1} \geq 1 \ &\Leftrightarrow \ \mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}'}(\sigma)\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\eta) \geq \mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}'}(\eta)\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}(\sigma) \\
&\Leftrightarrow \sum_{\substack{x \in \Lambda, y \notin \Lambda \\ x \sim y}} (\sigma_x - \eta_x)(\bar{\sigma}'_y - \bar{\sigma}_y) \geq 0
\end{aligned}$$

であるので，$\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}'}/\mu^{\beta,h}_{\Lambda,\bar{\sigma}}$ は単調増加である． □

系 2.6 の証明を少し修正することによって次の主張を得る.

注意 2.7. 任意に $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $\beta > 0$ を取る. この時, $h, h' \in \mathbb{R}$ が $h' \geq h$ をみたし, $\bar{\sigma}, \bar{\sigma}' \in \Omega$ が $\bar{\sigma}' \geq \bar{\sigma}$ をみたすならば,

$$\mu_{\Lambda,\bar{\sigma}'}^{\beta,h'}[f] \geq \mu_{\Lambda,\bar{\sigma}}^{\beta,h}[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R})$$

が成り立つ.

命題 2.8. 任意に $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る. この時, $\Delta, \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ が $\Delta \subset \Lambda$ をみたすならば,

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta,+}^{\beta,h}[f] &\geq \mu_{\Lambda,+}^{\beta,h}[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}), \\ \mu_{\Delta,-}^{\beta,h}[f] &\leq \mu_{\Lambda,-}^{\beta,h}[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. $+$-境界条件の場合についてのみ示す. $f : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}$ を単調増加とする. 系 2.6 より, 任意の $\bar{\sigma} \in \Omega$ に対し $\mu_{\Delta,+}^{\beta,h}[f] \geq \mu_{\Delta,\bar{\sigma}}^{\beta,h}[f]$ となるので, 定理 2.3 を用いればよい. □

定理 2.9. 任意に $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る. この時, $\epsilon = +$ もしくは $-$ に対して, $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ における $\mu_{\Lambda,\epsilon}^{\beta,h}$ の弱収束極限として, Ω 上の確率測度 $\mu_\epsilon^{\beta,h}$ が定まる. さらに, 任意の $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ に対し

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda,+}^{\beta,h}[f] &\geq \mu_{+}^{\beta,h}[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f \in \mathscr{C}), \\ \mu_{\Lambda,-}^{\beta,h}[f] &\leq \mu_{-}^{\beta,h}[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f \in \mathscr{C}) \end{aligned}$$

が成り立ち, $h \in \mathbb{R}$ に関し $\mu_+^{\beta,h}[f]$ は右連続であって $\mu_-^{\beta,h}[f]$ は左連続である.

証明. $\epsilon = +$ もしくは $-$ とし, $f \in \mathscr{C}$ を単調増加とする. 命題 2.8 より $\mu_{\Lambda,\epsilon}^{\beta,h}[f]$ の $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ における極限が存在するので, 注意 2.2 を考慮すると $\{\mu_{\Lambda,\epsilon}^{\beta,h}\}_{\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d}$ の任意の弱収束部分列の極限が一致することが分かる. 従って, $\mu_{\Lambda,\epsilon}^{\beta,h}$ の弱収束極限 $\mu_\epsilon^{\beta,h}$ が存在する. 最後の主張は, $\mu_{\Lambda,\epsilon}^{\beta,h}[f]$ の $h \in \mathbb{R}$ に関する連続性と, 注意 2.7 と命題 2.8 を合わせれば得られる. □

2.3 DLR 方程式と無限体積ギブス測度

定義 2.10. $h \in \mathbb{R}$ とする. 各 $\beta > 0$ に対して, Ω 上の確率測度 ν^β が次をみたす時, ν^β を外部磁場 h を持つ**無限体積ギブス測度**または**ギブス測度**と呼び, その全体を $\mathscr{G}(\beta, h)$ と表す : 任意の $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ に対して,

$$\nu^\beta(\cdot \mid \mathscr{F}_{\Lambda^c})(\bar{\sigma}) = \mu_{\Lambda,\bar{\sigma}}^{\beta,h}(\cdot) \quad \nu^\beta\text{-}a.s.\ \bar{\sigma}, \tag{2.9}$$

すなわち,

$$\nu^\beta[f] = \int_\Omega \mu_{\Lambda,\bar{\sigma}}^{\beta,h}[f]\, d\nu^\beta(\bar{\sigma}) \quad (\forall f \in \mathscr{C}) \tag{2.10}$$

が成り立つ. また, 等式 (2.9) もしくは (2.10) を **DLR 方程式**と呼ぶ.

定理 2.11. 任意に $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る. この時, $\mathscr{G}(\beta, h)$ は弱収束の位相でコンパクトな凸集合であって, $\epsilon = +$ もしくは $-$ に対し $\mu_\epsilon^{\beta,h} \in \mathscr{G}(\beta, h)$ である.

証明. 凸性の証明には, $\nu_1, \nu_2 \in \mathscr{G}(\beta,h)$, $\alpha \in [0,1]$ ならば $\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2 \in \mathscr{G}(\beta,h)$ であることを示せばよいが, これは定義 2.10 より明らかである. コンパクト性の証明には, (2.10) において $\mu_{\Lambda,\bar{\sigma}}^{\beta,h}[f]$ が $\bar{\sigma} \in \Omega$ に関して連続であることに注意すればよい. さらに, 定理 2.3 と定理 2.9 を合わせると $\mu_+^{\beta,h}, \mu_-^{\beta,h} \in \mathscr{G}(\beta,h)$ を得る. □

定理 2.11 より, 各 $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ に対し $\mathscr{G}(\beta,h)$ は凸コンパクトなので, その端点集合 $\mathscr{G}_{ex}(\beta,h)$ が定まり, $\mathscr{G}(\beta,h)$ の任意の元は $\mathscr{G}_{ex}(\beta,h)$ の元による凸結合として (一意的に) 表現される. ここで, $\nu \in \mathscr{G}_{ex}(\beta,h)$ であるとは, $\nu_1, \nu_2 \in \mathscr{G}(\beta,h)$, $\alpha \in (0,1)$ に対し $\nu = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$ をみたすならば, $\nu = \nu_1 = \nu_2$ が成り立つ時に言う.

定理 2.12. $\epsilon = +$ もしくは $-$ とし, 任意に $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る. この時, $\mu_\epsilon^{\beta,h} \in \mathscr{G}_{ex}(\beta,h)$ であって $\mu_\epsilon^{\beta,h}$ は平行移動不変測度である. また, 任意の $\nu^\beta \in \mathscr{G}(\beta,h)$ に対し

$$\mu_-^{\beta,h}[f] \le \nu^\beta[f] \le \mu_+^{\beta,h}[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f \in \mathscr{C})$$

が成り立つ.

証明. $\mu_+^{\beta,h} \in \mathscr{G}_{ex}(\beta,h)$ のみ示し残りは省略する. $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ とし $f \in \mathscr{C}_\Lambda$ を単調増加とする. 系 2.6 より, 全ての $\bar{\sigma} \in \Omega$ に対し $\mu_{\Lambda,\bar{\sigma}}^{\beta,h}[f] \le \mu_{\Lambda,+}^{\beta,h}[f]$ となるので, 定理 2.9 と (2.10) とを合わせて

$$\nu^\beta[f] \le \mu_+^{\beta,h}[f] \quad (\forall \nu^\beta \in \mathscr{G}(\beta,h))$$

を得る. 従って, $\nu_1, \nu_2 \in \mathscr{G}(\beta,h)$, $\alpha \in (0,1)$ に対し $\mu_+^{\beta,h} = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$ とすると, $\mu_+^{\beta,h}[f] = \nu_1[f] = \nu_2[f]$ となる. 注意 2.2 を考慮すると, このことより $\mu_+^{\beta,h} = \nu_1 = \nu_2$ が成り立つので, $\mu_+^{\beta,h} \in \mathscr{G}_{ex}(\beta,h)$ を得る. □

注意 2.13. $\epsilon = +$ もしくは $-$ とし, 任意に $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る. この時, $\mu_\epsilon^{\beta,h}$-$a.s.$ で, 平行移動不変集合は末尾集合である.

2.4 相転移

与えられた外部磁場 $h \in \mathbb{R}$ に対して, 逆温度 $\beta > 0$ において**相転移**が起こっているとは, $\mathscr{G}_{ex}(\beta,h)$ に属する平行移動不変測度が二つ以上存在する時に言う. 定理 2.12 を考慮すると, $\mu_+^{\beta,h} \neq \mu_-^{\beta,h}$ ならば相転移は起こっている, $\mu_+^{\beta,h} = \mu_-^{\beta,h}$ ならば相転移は起こっていないとも言い換えられる. 相転移が起こるのは $d \ge 2$ であって $h = 0$ の時に限られるが, 詳しくは後の定理 2.16 で述べる.

定理 2.14. 任意に $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る. この時, $\mu_+^{\beta,h} \neq \mu_-^{\beta,h}$ であるための必要十分条件は $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] \neq \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ である.

この定理の主張は, 定理 2.12 より, 相転移が起こっている時またその時に限り $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] > \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ であるとも言い換えられる. 証明に必要な注意を述べておく.

注意 2.15. (1) $\mu_+^{\beta,h}, \mu_-^{\beta,h}$ の平行移動不変性 (定理 2.12) より, $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] = \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ ならば, 全ての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_x] = \mu_-^{\beta,h}[\sigma_x]$ である.

(2) 各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\rho_x = (1+\sigma_x)/2$ とする. この時, 任意の $\Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d$ に対し

$$\rho_\Delta = \prod_{x \in \Delta} \rho_x, \qquad \sum_{x \in \Delta} \rho_x - \rho_\Delta$$

は共に単調増加である. さらに, $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ とすると, 任意の $f \in \mathscr{C}_\Lambda$ は $\{\rho_\Delta : \Delta \subset \Lambda\}$ の一次結合で表される.

証明 (定理 2.14). $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] \neq \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ ならば $\mu_+^{\beta,h} \neq \mu_-^{\beta,h}$ なので, $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] = \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ ならば $\mu_+^{\beta,h} = \mu_-^{\beta,h}$ を示せばよい. $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] = \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ とする. 定理 2.12 と注意 2.15 より, $\Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d$ とすると

$$0 \leq \mu_+^{\beta,h}[\rho_\Delta] - \mu_-^{\beta,h}[\rho_\Delta] \leq \sum_{x\in\Delta} \Big(\mu_+^{\beta,h}[\rho_x] - \mu_-^{\beta,h}[\rho_x]\Big) = 0$$

である. このことと注意 2.15 より, 任意の $f \in \mathscr{C}$ に対し $\mu_+^{\beta,h}[f] = \mu_-^{\beta,h}[f]$ となるので, 注意 2.2 を用いると $\mu_+^{\beta,h} = \mu_-^{\beta,h}$ を得る. □

定理 2.16. $d \geq 2$ であって $h = 0$ とすると, ある臨界値 $\beta_c(d) \in (0,\infty)$ が存在して,

$$\mu_+^\beta = \mu_-^\beta \quad (\beta < \beta_c(d)), \qquad \mu_+^\beta \neq \mu_-^\beta \quad (\beta > \beta_c(d)) \tag{2.11}$$

が成り立つ. 一方, $d = 1$ もしくは $h \neq 0$ とすると, $\mu_+^{\beta,h} = \mu_-^{\beta,h}$ が $\beta > 0$ に依らず常に成り立つ.

β が逆温度を表していたことより, $\beta_c(d)$ に対応して臨界温度 $T_c(d) \in (0,\infty)$ が定まる. また, (2.11) のような相転移を**単調な相転移**と呼ぶこともある. 定理 2.14 と $\mu_-^\beta[\sigma_O] = -\mu_+^\beta[\sigma_O]$ より, $\mu_+^\beta[\sigma_O]$ が $\beta > 0$ に関して単調増加であることを導けば, (2.11) をみたす $\beta_c(d) \in [0,\infty]$ の存在は示される. そのためには, GKS 不等式と呼ばれる相関不等式を用いて $\mu_{N,+}^\beta[\sigma_O]$ $(N \in \mathbb{N})$ の $\beta > 0$ に関する単調増加性を得ればよい. さらに, $\beta_c(d) \neq 0$ を示すには Dobrushin の一意性の条件を, $\beta_c(d) \neq \infty$ を示すにはパイエルス (Peierls) 型議論を用いればよい. 6 節で述べる FK 展開を用いれば, (2.11) を FK パーコレーションにおけるパーコレーション確率に関する主張に置き換えて示すことも可能である. 残り後半の主張は, $h \neq 0$ の場合はギブスの自由エネルギーの微分可能性より得られる. $d = 1$ の場合は, 特に $h = 0$ ならば, FK パーコレーションにおけるパーコレーション確率が零であることを用いると容易である. [Geo88, H98] 等に, $d = 1$ の場合の計算が紹介されている.

3　ギブスの自由エネルギーと体積オーダー大偏差原理

3.1　ギブスの自由エネルギー

変分原理 (本稿では述べない) を通して平行移動不変なギブス測度を特徴付ける, ギブスの自由エネルギーを導入する. そのための準備として, 記号を導入し補題 3.1 を証明を省略して述べる. $\Delta, \Gamma \subset\subset \mathbb{Z}^d$ を $\Delta \cap \Gamma = \emptyset$ となるように取り, $\eta \in \Omega_\Delta$, $\sigma \in \Omega_\Gamma$ に対し $(\eta\sigma)_{\Delta,\Gamma} \in \Omega_{\Delta\cup\Gamma}$ を

$$((\eta\sigma)_{\Delta,\Gamma})_x = \eta_x \quad (x \in \Delta), \qquad ((\eta\sigma)_{\Delta,\Gamma})_x = \sigma_x \quad (x \in \Gamma)$$

と定める. 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\Delta, \Gamma \subset \Lambda$ が

$$\Delta \cap \Gamma = \emptyset, \qquad \Delta \cup \Gamma = \Lambda$$

をみたす時, $\{\Delta, \Gamma\}$ を Λ の分割と呼ぶ. 次の補題 3.1 を証明を省略して述べる.

補題 3.1. 任意に $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $\bar{\sigma} \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ を取る. $\{\Delta, \Gamma\}$ を Λ の分割として, $\eta \in \Omega_\Delta$, $\sigma \in \Omega_\Gamma$ とする. さらに, $\xi_\Lambda \in \Omega_\Lambda$ は

$$\xi_x = \sigma_x \quad (\forall x \in \Gamma)$$

をみたすとする. この時,

$$-(4d|\Delta| + 2|h|) \leq \Big| H_\Lambda^h(\xi_\Lambda|\bar{\sigma}) - H_\Lambda^h((\eta\sigma)_{\Delta,\Gamma}|\bar{\sigma}) \Big| \leq 4d|\Delta| + 2|h|$$

が成り立つ.

$L,k\in\mathbb{N}$ を取り, $N=(L+1)k-1$ とする. $\Lambda_N=(-N/2,N/2]^d\cap\mathbb{Z}^d$ であるので, Λ_N の各辺には N 個の頂点が並んでいることに注意する. k^d 個の Λ_L を平行移動して得られる $\{\Lambda_L^{(i)}\}_{i=1}^{k^d}$ を, 互いに隣接することなく Λ_N 内に全て並べられるように取り, $\{\Lambda_L^{(1)},\dots,\Lambda_L^{(k^d)},\Delta\}$ を Λ_N の分割とする. ここで, 互いに隣接しないということは $d_\infty(\Lambda_L^{(i)},\Lambda_L^{(j)})\geq 2$ $(i\neq j)$ を意味する. 以後, Ω_{Λ_N} を Ω_N と, $\mathrm{Z}_{\Lambda_N,+}(\beta,h)$ を $\mathrm{Z}_{N,+}(\beta,h)$ 等と, 記号中の Λ_N を N と略記することにする.

定理 3.2. 任意の $h\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ に対して,

$$g_{N,+}(\beta,h)=\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\mathrm{Z}_{N,+}(\beta,h)$$

の $N\to\infty$ における極限が存在する. ただし, $\mathrm{Z}_{N,+}(\beta,h)=\sum_{\sigma\in\Omega_N}\exp(-\beta H_N^h(\sigma|+))$ である.

証明. 表記の簡単の為に, $h\geq 0$ として示す. $L,k\in\mathbb{N}$ として $N=(L+1)k-1$ とする. $\Gamma=\Lambda_L^{(1)}\cup\cdots\cup\Lambda_L^{(k^d)}$ とすると,

$$\mathrm{Z}_{N,+}(\beta,h)=\sum_{\eta\in\Omega_\Delta}\sum_{\sigma\in\Omega_\Gamma}\exp\bigl(-\beta H_N^h((\eta\sigma)_{\Delta,\Gamma}|+)\bigr)$$

と書ける. また, $\eta\equiv+1$ ならば

$$\sum_{\sigma\in\Omega_\Gamma}\exp\left(-\beta H_N^h((\eta\sigma)_{\Delta,\Gamma}|+)\right)=(\mathrm{Z}_{L,+}(\beta,h))^{k^d}\exp\left(h|\Delta|+\sum_{\substack{x\in\Delta,y\notin\Lambda_L\\ x\sim y}}1\right)$$

が成り立つので, 補題 3.1 より

$$\begin{aligned}k^d\log\mathrm{Z}_{L,+}(\beta,h)-|\Delta|(2d\beta+3h+c)&\leq\log\mathrm{Z}_{N,+}(\beta,h)\\&\leq k^d\log\mathrm{Z}_{L,+}(\beta,h)+|\Delta|(2d\beta+3h+c)\end{aligned}$$

を得る. ただし, $c=\log 2+1$ である. このことより, $g_{N,+}(\beta,h)$ の有界性と $|\Delta|\leq 2dN^d/L$ に注意すると, 主張における極限の存在が分かる. $\square$

定理 3.2 と以下の補題 3.4 を用いれば, 次の命題 3.3 を得る. ここでも補題 3.4 の証明は省略する.

命題 3.3. 任意に $h\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ を取る. この時, 任意の $\bar\sigma\in\Omega$ に対し

$$\lim_{N\to\infty}g_{N,+}(\beta,h)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\mathrm{Z}_{N,\bar\sigma}(\beta,h)$$

が成り立つ.

補題 3.4. 任意に $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$, $h\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ を取る. この時, 任意の $\bar\sigma,\bar\sigma'\in\Omega$ に対し

$$-4d|\partial_{ex}\Lambda|\leq\left|H_\Lambda^h(\sigma|\bar\sigma)-H_\Lambda^h(\sigma|\bar\sigma')\right|\leq 4d|\partial_{ex}\Lambda|\quad(\forall\sigma\in\Omega_\Lambda)$$

が成り立つ. 特に,

$$\exp(-4d\beta|\partial_{ex}\Lambda|)\leq\frac{\mathrm{Z}_{\Lambda,\bar\sigma}(\beta,h)}{\mathrm{Z}_{\Lambda,\bar\sigma'}(\beta,h)}\leq\exp(4d\beta|\partial_{ex}\Lambda|)$$

が成り立ち, 全ての $\sigma\in\Omega_\Lambda$ に対し

$$\exp(-8d\beta|\partial_{ex}\Lambda|)\leq\frac{\mu_{\Lambda,\bar\sigma}^{\beta,h}(\sigma)}{\mu_{\Lambda,\bar\sigma'}^{\beta,h}(\sigma)}\leq\exp(8d\beta|\partial_{ex}\Lambda|)$$

が成り立つ.

各 $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ に対し定理 3.2 と命題 3.3 より, $g_{N,+}(\beta, h)$ の $N \to \infty$ における極限が存在してその値は境界条件に依らないので, $g(\beta, h)$ を

$$g(\beta, h) = \lim_{N\to\infty} g_{N,+}(\beta, h)$$

と定め**ギブスの自由エネルギー**と呼ぶ. 以下の命題 3.6 で, $g(\beta, h)$ の $h \in \mathbb{R}$ に関する凸性とその微分係数について述べる. $N \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{M}_N = |\Lambda_N|^{-1} \sum_{x\in\Lambda_N} \sigma_x$ とする.

補題 3.5. $\epsilon = +$ もしくは $-$ とする. 任意の $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ に対し

$$\mu_\epsilon^{\beta,h}[\sigma_O] = \lim_{N\to\infty} \mu_{N,\epsilon}^{\beta,h}[\mathbb{M}_N] \tag{3.1}$$

が成り立つ.

証明. +-境界条件についてのみ示す. $L, N \in \mathbb{N}$ を $L < N$ となるように取り, $\Lambda_{N,L} = \{x \in \Lambda_N : d_\infty(x, \partial_{in}\Lambda_N) \geq L/2\}$ とする. 各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\Lambda_L(x) = x + \Lambda_L$ とする. すなわち, $\Lambda_L(x)$ は Λ_L を x だけ平行移動させたものである. FKG 不等式より

$$\begin{aligned}\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] \leq \liminf_{N\to\infty} \mu_{N,+}^{\beta,h}[\mathbb{M}_N] &\leq \limsup_{N\to\infty} \mu_{N,+}^{\beta,h}[\mathbb{M}_N] \\ &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|} \sum_{x\in\Lambda_{N,L}} \mu_{\Lambda_L(x),+}^{\beta,h}[\sigma_x] = \mu_{L,+}^{\beta,h}[\sigma_O]\end{aligned}$$

となるので (3.1) を得る. □

定理 3.6. 任意に $\beta > 0$ を取る. $g(\beta, h)$ は $h \in \mathbb{R}$ に関して凸関数であって, 任意の $h \in \mathbb{R}$ に対し

$$\partial_h^+ g(\beta, h) = \beta\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O], \qquad \partial_h^- g(\beta, h) = \beta\mu_-^{\beta,h}[\sigma_O] \tag{3.2}$$

が成り立つ. さらに, 高々可算個の $h \in \mathbb{R}$ を除いて

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h} g(\beta, h) = \mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] = \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O] \tag{3.3}$$

が成り立つ. ただし, ∂_h^+ と ∂_h^- はそれぞれ h に関する右微分と左微分を表す.

証明. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h} g_{N,+}(\beta, h) = \mu_{N,+}^{\beta,h}[\mathbb{M}_N], \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial h^2} g_{N,+}(\beta, h) = |\Lambda_N| \left(\mu_{N,+}^{\beta,h}[(\mathbb{M}_N)^2] - \mu_{N,+}^{\beta,h}[\mathbb{M}_N]^2\right) \geq 0$$

である (この計算はモーメント母関数の微分と同様である). 従って, $g(\beta, h)$ の $h \in \mathbb{R}$ に関する凸性は, $g(\beta, h)$ が凸関数 $g_{N,+}(\beta, h)$ の極限ということから分かる.

(3.2) の右微分についてのみ示す. 凸性と補題 3.5 と (3.4) より, 高々加算個の h を除いて

$$\partial_h^+ g(\beta, h) = \beta\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O]$$

が成り立つ. さらに, 定理 2.9 より $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O]$ は $h \in \mathbb{R}$ に関して右連続なので, 任意の $h \in \mathbb{R}$ に対し

$$\partial_h^+ g(\beta, h) = \beta\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O]$$

を得る. □

3.2　平均場イジング模型

イジング模型における (体積オーダー) 大偏差原理への理解の補助として, キューリー・ワイス (Curie-Weiss) 模型とも呼ばれる平均場イジング模型において, Varadhan の定理を適用して得られる大偏差原理について述べる.

定義 3.7. $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ として, Ω_Λ 上の $\frac{1}{2}$-ベルヌーイ測度を ν_Λ とする. すなわち,

$$\nu_\Lambda(\sigma) = \frac{1}{2^n} \quad (\forall \sigma \in \Omega_\Lambda)$$

とする. Ω_Λ 上の独立確率変数列 $(X_i)_{i=1}^n$ を, 各 $i \in \Lambda$, $\sigma \in \Omega_\Lambda$ に対し $X_i(\sigma) = \sigma_i$ と定め,

$$S_n(\sigma) = \sum_{i=1}^n X_i(\sigma) \quad (\sigma \in \Omega_\Lambda)$$

する. $h \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ を取り, ハミルトニアン

$$\begin{aligned} \bar{H}_\Lambda^h(\sigma) &= -n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{S_n(\sigma)}{n}\right)^2 + h\left(\frac{S_n(\sigma)}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda} X_i(\sigma)\frac{S_n(\sigma)}{n} - h\sum_{i\in\Lambda} X_i(\sigma) \end{aligned}$$

に対するギブス測度を

$$\bar{\mu}_\Lambda^{\beta,h}(\sigma) = \frac{1}{\overline{\mathrm{Z}}_\Lambda(\beta,h)}\exp\left(-\beta\bar{H}_\Lambda^h(\sigma)\right)\nu_\Lambda(\sigma), \qquad \overline{\mathrm{Z}}_\Lambda(\beta,h) = \nu_\Lambda\left[\exp\left(-\beta\bar{H}_\Lambda^h(\sigma)\right)\right]$$

と与える. ここで, $\beta = 0$ ならば $\bar{\mu}_\Lambda^{\beta,h} = \nu_\Lambda$ であることに注意する. ハミルトニアンが平均スピンの関数として与えられることから, この模型は平均場イジング模型と呼ばれる. また $\bar{H}_\Lambda^h$ は, ハミルトニアン

$$-\frac{1}{2|\Lambda|}\sum_{\substack{i,j\in\Lambda \\ i\neq j}} X_iX_j - h\sum_{i\in\Lambda} X_i$$

と等価である (注意 2.1). すなわち, 平均場イジング模型は完全グラフ上のイジング模型とも言える.

Varadhan の定理を用いると, 平均場イジング模型において大偏差原理が次の形で成り立つことが分かる (証明省略). ここでは, 定義 3.7における $\bar{\mu}_\Lambda^{\beta,h}$ を $\bar{\mu}_n^{\beta,h}$ と表す.

定理 3.8. 任意に $h \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ を取る. エントロピー関数 $I_{\beta,h}$ を

$$\begin{aligned} I_{\beta,h}(x) &= G_{\beta,h}(x) - \inf_{y\in[-1,1]} G_{\beta,h}(y) \quad (x \in [-1,1]), \\ G_{\beta,h}(x) &= \frac{1-x}{2}\log\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2}\log\frac{1+x}{2} - \beta\left(\frac{x^2}{2} + hx\right) \quad (x \in [-1,1]) \end{aligned}$$

と定める. この時, $[-1,1]$ 上の任意のボレル集合 A に対し

$$\begin{aligned} -\inf_{m\in A^\circ} I_{\beta,h}(m) &\leq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\bar{\mu}_n^{\beta,h}\left(\frac{S_n}{n}\in A\right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\bar{\mu}_n^{\beta,h}\left(\frac{S_n}{n}\in A\right) \leq -\inf_{m\in\bar{A}} I_{\beta,h}(m) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 各 $A \subset [-1,1]$ に対して, A° は A の内部を表し, $\bar{A}$ は A の閉包を表す.

$I_{\beta,h}$ の零点, すなわち, $G_{\beta,h}$ の最小値を実現する $x \in [-1,1]$ について考えると, 下記のような計算から次のことが分かる:

(1) $h \neq 0$ または $h=0$ で $0 \leq \beta \leq 1$ ならば, $I_{\beta,h}^{-1}(0) = \{z(\beta,h)\}$ なる $z(\beta,h)$ が唯一存在する.
(2) $h=0$ で $\beta > 1$ ならば, $I_{\beta,h}^{-1}(0)$ は $z(\beta,-), z(\beta,+)$ と表される二点から成る.

さらに, 任意の $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数 f に対して, (1) の場合には

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\mu}_{\beta,n}^{h}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = f(z(\beta,h))$$

が成り立ち, (2) の場合には

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\mu}_{\beta,n}^{h}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\big(f(z(\beta,-)) + f(z(\beta,+))\big),$$
$$z(\beta,-) = \lim_{h\nearrow 0} z(\beta,h) < 0, \qquad z(\beta,+) = \lim_{h\searrow 0} z(\beta,h) > 0, \qquad z(\beta,h) = -z(\beta,+)$$

が成り立つ.

$h=0$ の場合に限り $G_{\beta,h}$ の最小値を実現する $x \in (-1,1)$ を調べておく. この時, $G_{\beta,0}$ は $G_{\beta,0}(0)=0$ となる偶関数であって,

$$G'_{\beta,0}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - \beta x \quad (x \in (-1,1)), \qquad G'_{\beta,0}(0) = 0,$$
$$G''_{\beta,0}(x) = \frac{1}{1-x^2} - \beta \quad (x \in (-1,1))$$

である. 明らかに, $\beta \leq 1$ ならば $G''_{\beta,0}(x) \geq 0$ $(\forall x \in [-1,1])$ なので, $G_{\beta,0}(x)$ は x に関して凸関数である. 一方, $\beta > 1$ ならば $G'_{\beta,0}(x) = 0$ には三つの解が存在するので, $G_{\beta,0}(x)$ $(x \in [-1,1])$ のグラフは二重井戸の形となりそれぞれの底で最小値を実現する. この底の x 座標が $z(\beta,-)$ と $z(\beta,+)$ である.

3.3 大偏差原理

この小節では, 比磁化確率変数 $\mathbb{M}_N$ に対する体積オーダーの大偏差原理について述べる. ただし, $N \in \mathbb{N}$ に対し $\Lambda_N = (-N/2, N/2]^d \cap \mathbb{Z}^d$ であって $\mathbb{M}_N = |\Lambda_N|^{-1}\sum_{x\in\Lambda_N}\sigma_x$ である. 補題 3.4 と DLR 方程式 (2.10) より, 任意の $\mathcal{A}_N \in \mathscr{F}_N$ $(N \in \mathbb{N})$, $\bar{\sigma} \in \Omega$ に対し

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|}\log \mu_{\epsilon}^{\beta,h}(\mathcal{A}_N) = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|}\log \mu_{N,\bar{\sigma}}^{\beta,h}(\mathcal{A}_N),$$
$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|}\log \mu_{\epsilon}^{\beta,h}(\mathcal{A}_N) = \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|}\log \mu_{N,\bar{\sigma}}^{\beta,h}(\mathcal{A}_N)$$

が成り立つ. ただし, $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ とし $\epsilon = +$ もしくは $-$ とする. このことは, 体積オーダーの大偏差原理では境界条件の影響は観察されないことを示している. 一方, 定理 2.14 より

$$\mu_{+}^{\beta,h}[\sigma_O] \neq \mu_{-}^{\beta,h}[\sigma_O]$$

の時またその時に限り相転移が起こるので, 相転移現象を解析するためには境界条件の影響が観察される必要がある. $\mu_{\epsilon}^{\beta,h}$ に対する大数の (強) 法則, すなわち,

$$\mathbb{M}_N(\sigma) \to \mu_{\epsilon}^{\beta,h}[\sigma_O] \quad (N \to \infty) \quad \mu_{\epsilon}^{\beta,h}\text{-a.s.}$$

が成り立つことはエルゴード定理より分かる．ここで, $\mu_+^{\beta,h} \neq \mu_-^{\beta,h}$ ならば $\mu_+^{\beta,h}$ と $\mu_-^{\beta,h}$ は互いに特異であることに注意する．

$m \in [-1,1]$ に対し $\varphi_\beta(m)$ を $g(\beta,h)+g(\beta,0)$ のルジャンドル変換とする:

$$\varphi_\beta(m) = \sup_{h\in\mathbb{R}}\{\beta mh - g(\beta,h) + g(\beta,0)\}.$$

ここで,

$$g(\beta,h) - g(\beta,0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|} \log \mu_{N,+}^{\beta}\left[\exp\left(\beta h|\Lambda_N|\mathbb{M}_N\right)\right]$$

と書けることに注意する．[Co86, FO88, O88] による結果の一部を相転移の起こる $h=0$ の時に限り, 次の定理 3.9 で述べておく (証明省略).

定理 3.9. 任意に $\beta>0$ を取る．この時, $[-1,1]$ 上の任意のボレル集合 A に対し

$$\begin{aligned}-\inf_{m\in A^\circ}\varphi_\beta(m) &\leq \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\mu_+^{\beta}\left(\mathbb{M}_N\in A\right)\\ &\leq \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\mu_+^{\beta}\left(\mathbb{M}_N\in A\right) \leq -\inf_{m\in\bar{A}}\varphi_\beta(m)\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし, 各 $A\subset[-1,1]$ に対して, A° は A の内部を表し, $\bar{A}$ は A の閉包を表す.

3.4 自由境界条件と自発磁化

この小節では, 自由境界条件に対する (有限体積) ギブス測度を導入し, $h\neq 0$ ならば任意の $\beta>0$ に対し $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] = \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ となることを示す (定理 3.13)．このことは, 定理 2.14 より $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] = \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ と $\mu_+^{\beta,h} = \mu_-^{\beta,h}$ は同値なので, 定理 2.16 の主張の一部である, $h\neq 0$ ならば任意の $\beta>0$ に対し $\mu_+^{\beta,h} = \mu_-^{\beta,h}$ であることを表している．すなわち, $h\neq 0$ ならば相転移は如何なる $\beta>0$ に対しても起こらない.

$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $h\in\mathbb{R}$ とする．ハミルトニアンが

$$H_\Lambda^h(\sigma_\Lambda) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{x,y\in\Lambda\\ x\sim y}}\sigma_x\sigma_y - h\sum_{x\in\Lambda}\sigma_x \quad (\sigma_\Lambda\in\Omega_\Lambda)$$

で与えられる Ω_Λ 上の確率測度

$$\mu_\Lambda^{\beta,h}(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{\mathrm{Z}_\Lambda(\beta,h)}\exp\Big(-\beta H_\Lambda^h(\sigma_\Lambda)\Big) \quad (\sigma_\Lambda\in\Omega_\Lambda)$$

を外部磁場 h を持つ Λ 上の自由境界条件に対するギブス測度と呼ぶ．ただし, $\beta>0$ であって $\mathrm{Z}_\Lambda(\beta,h)$ は正規化定数である．この $\mu_\Lambda^{\beta,h}$ は, (2.2) で定めた $\mu_{\Lambda,\bar{\sigma}}^{\beta,h}$ において $\bar{\sigma}\equiv 0$ としたものになっている．定め方から明らかなように, 奇関数 $f:\Omega_\Lambda\to\mathbb{R}$ に対し

$$\mu_\Lambda^{\beta,-h}[f] = -\mu_\Lambda^{\beta,h}[f] \tag{3.5}$$

が成り立つ．$N\in\mathbb{N}$ に対し定理 3.2 の記号と同様に

$$g_N(\beta,h) = \frac{1}{|\Lambda_N|}\log \mathrm{Z}_N(\beta,h)$$

等と定めると, 命題 3.3 の証明と同様にして次の命題 3.10 を得る.

命題 3.10. 任意の $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ に対し

$$g(\beta, h) = \lim_{N\to\infty} g_N(\beta, h)$$

が成り立つ. ただし, $g(\beta, h)$ は定理 3.2 において定まるものである.

各 $N \in \mathbb{N}$ に対して, $g_{N,+}(\beta, h)$ の場合と同様に FKG 不等式を用いると

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} g_N(\beta, h) \geq 0$$

が得られるので, $g_N(\beta, h)$ は $h \in \mathbb{R}$ に関して凸関数である. さらに, $h > 0$ に対し GHS 不等式と呼ばれる相関不等式を用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta^3}\frac{\partial^3}{\partial h^3} g_N(\beta, h) \\
&= \frac{1}{\beta^3}\frac{\partial^2}{\partial h^2} m_N(\beta, h) \\
&= |\Lambda_N|^2 \left(\mu_N^{\beta,h}[(\mathbb{M}_N)^3] - \mu_N^{\beta,h}[(\mathbb{M}_N)^2]\mu_N^{\beta,h}[\mathbb{M}_N] - 2\mu_N^{\beta,h}[\mathbb{M}_N]\left(\mu_N^{\beta,h}[(\mathbb{M}_N)^2] - \mu_N^{\beta,h}[\mathbb{M}_N]^2\right)\right) \\
&= |\Lambda_N|^2 \left(\mu_N^{\beta,h}[(\mathbb{M}_N)^3] - 3\mu_N^{\beta,h}[(\mathbb{M}_N)^2]\mu_N^{\beta,h}[\mathbb{M}_N] + 2\mu_N^{\beta,h}[\mathbb{M}_N]^3\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

が得られる. ただし, $\mathbb{M}_N = |\Lambda_N|^{-1}\sum_{x\in\Lambda_N}\sigma_x$ であって $m_N(\beta, h) = \mu_N^{\beta,h}[\mathbb{M}_N]$ である. このことは $m_N(\beta, h)$ が $h \in (0, \infty)$ に関して凹であることを示しているので, 定理 3.6 および命題 3.10 と (3.5) と $|m_N(\beta, h)| \leq 1$ に注意すると, 次の命題 3.11 が得られる.

命題 3.11. 任意に $\beta > 0$ を取る. $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対する奇関数 $m(\beta, h)$ が存在して, $h \in (0, \infty)$ に関しては凹であって $|m(\beta, h)| \leq 1$ であり, 高々可算個の $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ を除いて

$$m(\beta, h) = \lim_{N\to\infty} m_N(\beta, h)$$

をみたす. 特に, $m(\beta, h)$ は $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ において連続である.

命題 3.10 で定める $g(\beta, h)$ と命題 3.11 で定まる $m(\beta, h)$ の間には, 次の関係式が成り立つ.

定理 3.12. 任意に $\beta > 0$ を取る. $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に関して $g(\beta, h)$ は微分可能であって,

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h} g(\beta, h) = m(\beta, h) = \lim_{N\to\infty} m_N(\beta, h) \tag{3.6}$$

が成り立つ. また, $h = 0$ においては

$$\partial_h^+ g(\beta, 0) = \beta \lim_{h\searrow 0} m(\beta, h), \qquad \partial_h^- g(\beta, 0) = \beta \lim_{h\nearrow 0} m(\beta, h) \tag{3.7}$$

が成り立つ.

証明. $h > 0$ とする. 全ての $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$g_N(\beta, h) - g_N(\beta, 0) = \beta \int_0^h m_N(\beta, u)\,du$$

であるので, $N \to \infty$ とするとルベーグの収束定理より

$$g(\beta, h) - g(\beta, 0) = \beta \int_0^h m(\beta, u) du$$

を得る．しかるに, $h > 0$ において $m(\beta, h)$ は連続なので, $g(\beta, h)$ は微分可能であって,

$$\frac{\partial}{\partial h} g(\beta, h) = \beta m(\beta, h)$$

である．(3.6) の第二等式は, $g(\beta, h)$ と $g_N(\beta, h)$ $(N \in \mathbb{N})$ の凸性より分かる．$h < 0$ の場合も同様である．また, (3.7) も $g(\beta, h)$ の凸性より分かる． □

定理 3.6 と定理 3.12 より次の定理を得る．

定理 3.13. 任意に $\beta > 0$ を取る．この時, $h \neq 0$ ならば $\mu_+^{\beta,h}[\sigma_O] = \mu_-^{\beta,h}[\sigma_O]$ が成り立ち, $h = 0$ ならば

$$\lim_{h \searrow 0} m(\beta, h) = \mu_+^{\beta}[\sigma_O], \qquad \lim_{h \nearrow 0} m(\beta, h) = \mu_-^{\beta}[\sigma_O]$$

が成り立つ．

以後, 各 $\beta > 0$ に対し $m_\beta \in [-1, 1]$ を

$$m_\beta = \lim_{h \searrow 0} m(\beta, h) = \mu_+^{\beta}[\sigma_O] \tag{3.8}$$

と定め**比磁化**と呼ぶ．$m_\beta > 0$ となる時, **自発磁化**が出現していると言う．

4 比較定理と有限エネルギー性

4.1 比較定理

この小節では, 相関を持つ結合測度を, その条件付き測度の情報を用いて対応する直積測度と比較する方法について述べる．言い換えると, 相関を持つ確率変数列と独立確率変数列を条件付き確率の情報を用いて比較することになる．簡単な例ではあるが, 例えば FKG 不等式

$$\mu_+^{\beta,h}[\sigma_x \sigma_y] \geq \mu_+^{\beta,h}[\sigma_x] \mu_+^{\beta,h}[\sigma_y] \quad (x, y \in \mathbb{Z}^d)$$

は, 左辺の平均を右辺の直積測度による平均で下から評価していることになるので, 測度の比較をしているとも言える．

この小節では記号の定義を他の節とは別にして用いる．S を高々可算な集合とし, Ω を $\{0,1\}^S$ に直積位相が導入されたものとする．有限集合 $T \subset S$ に対して, (正) 射影 $\pi_T : \Omega \to \{0,1\}^T$ を

$$\pi_T((\omega_s)_{s \in S}) = (\omega_t)_{t \in T} \quad ((\omega_s)_{s \in S} \in \Omega)$$

と定め, この π_T によって導かれるシグマ加法族を $\mathscr{F}_T$ と表す．Ω 上の連続関数の族 $\mathscr{C}$ を

$$\mathscr{C} = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ある有限部分集合 } T \subset S \text{ に対し } f \text{ は } \mathscr{F}_T\text{-可測である}\}$$

と定める．また, 各 $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して, 任意の $s \in S$ に対し $\omega_s \geq \omega'_s$ となる時に $\omega \geq \omega'$ であると言うことにして Ω に半順序 $\geq$ を定める．さらに, 関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が単調増加であるとは,

$$\text{任意に } \omega, \omega' \in \Omega \text{ を } \omega \geq \omega' \text{ となるように取ると } f(\omega) \geq f(\omega')$$

となる時に言うことにする．

定義 4.1. Ω 上のボレル確率測度 μ,ν が $\mu \succeq \nu$ であるとは,

$$\mu[f] \geq \nu[f] \quad (\text{全ての単調増加関数 } f \in \mathscr{C}) \tag{4.1}$$

となる時に言う.

連続関数の族 $\mathscr{C}$ は, Ω 上の連続関数全体に一様収束から定まる位相が導入された空間で稠密であるので, (4.1) は次と同値である:

$$\mu[f] \geq \nu[f] \quad (\text{全ての単調増加な連続関数 } f). \tag{4.2}$$

また, 定義における全順序集合として, $\{0,1\}$ の代わりに $\{-1,+1\}$ や $\mathbb{R}$ を用いてもよい.
各 $p \in [0,1]$ に対し Ω 上の直積確率測度 ϕ^p を

$$\phi^p(\omega_s = 1) = p = 1 - \phi(\omega_s = 0) \quad (\forall s \in S)$$

をみたすものとする. まず, Russo によって示された比較定理を述べる.

定理 4.2. S を $\{s_j\}_{j\geq 1}$ と全順序付けられた高々可算な集合とし, $\Omega = \{0,1\}^S$ とする. μ を Ω 上のボレル確率測度とし, $p \in [0,1]$ とする. さらに, 任意の $j \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j \in \{0,1\}$ に対して, $\mu(\omega_{s_1} = \varepsilon_1,\ldots,\omega_{s_j} = \varepsilon_j) > 0$ ならば

$$\mu(\omega_{s_{j+1}} = 1 \mid \omega_{s_1} = \varepsilon_1,\ldots,\omega_{s_j} = \varepsilon_j) \geq p \tag{4.3}$$

をみたすとする. この時, $\mu \succeq \phi^p$ が成り立つ.

証明. 任意に有限集合 $T \subset S$ を取り, $\mathscr{F}_T$-可測な単調増加関数 f を取る. 表記の簡単の為に, $T = \{1,\ldots,j+1\}$ $(j \in \mathbb{N})$ と表すことにする. 各 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j \in \{0,1\}$ に対し $\mathscr{F}_{j+1}$-可測関数 $f_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j}$ を

$$f_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j}(\omega_{j+1}) = f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j,\omega_{j+1})$$

と定めると, (4.3) より明らかに

$$\mu[f \mid \omega_1 = \varepsilon_1,\ldots,\omega_j = \varepsilon_j] \geq \phi^p[f_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j}]$$

が成り立つ. ここで, $\phi^p[f_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j}]$ が $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j)$ に関して単調増加であることに注意して同様の操作を繰り返すと,

$$\begin{aligned}
\mu\left[\mu[f \mid \omega_1,\ldots,\omega_j]\right] &\geq \mu\left[\phi^p[f_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j}]1_{\{\omega_1=\varepsilon_1,\ldots,\omega_j=\varepsilon_j\}}\right] \\
&\vdots \\
&\geq \mu\left[\phi^p[f]\right] \\
&= \phi^p[f]
\end{aligned}$$

を得るが, このことより $\mu \succeq \phi^p$ が従う. $\square$

次に, Liggett-Schonmann-Stacey([LSS97]) によって示された比較定理を $(\mathbb{Z}^d,\mathbb{E}^d)$ および $(\mathbb{Z}^d,\mathbb{E}^{d,*})$ に適用した形で述べる. ただし, $\mathbb{E}^d = \{\{x,y\} : x,y \in \mathbb{Z}^d,\ x \sim y\}$, $\mathbb{E}^{d,*=}\{\{x,y\} : x,y \in \mathbb{Z}^d,\ d_\infty(x,y) = 1\}$ である. 定理 4.2 を用いて直積測度と比較する際には, それぞれの模型に応じた方法で (4.3) を示すという議論が必要であったが, 次の定理によってそれを省略することが (模型によっては) 可能となる.

定理 4.3. $S=\mathbb{Z}^d$ とし $\Omega=\{0,1\}^S$ とする．任意に $p\in(0,1)$ を取り, Ω 上のボレル確率測度 μ が

$$\forall s\in S,\qquad \mu(\omega_s=1\mid(\omega_t:t\not\sim s))\geq p\quad \mu\text{-}a.s.$$

をみたすとする．さらに, ある $\alpha,r\in(0,1)$ が存在して

$$(1-\alpha)(1-r)^{2d}\geq 1-p,$$
$$(1-\alpha)\alpha^{2d}\geq 1-p$$

をみたすとする．この時, $\mu\succeq\phi^{\alpha r}$ が成り立つ.

証明は省略する．各 $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ に対し $(\omega_s)_{s\in\Lambda}$ が与えられている時には, $\mu(\omega_t=1\mid(\omega_s:s\neq t))=1$ $(t\in\Lambda^c)$ として定理 4.3 を適用すればよい．条件中の $2d$ というのは $(\mathbb{Z}^d,\mathbb{E}^d)$ の隣接頂点数である.

定理 4.4. $S=\mathbb{Z}^d$ とし $\Omega=\{0,1\}^S$ とする．任意に $p\in(0,1)$ を取り, Ω 上のボレル確率測度 μ が

$$\forall s\in S,\qquad \mu(\omega_s=1\mid(\omega_t:d_\infty(t,s)\geq 2))\geq p\quad \mu\text{-}a.s.$$

をみたすとする．さらに, ある $\alpha,r\in(0,1)$ が存在して

$$(1-\alpha)(1-r)^{3^d-1}\geq 1-p,$$
$$(1-\alpha)\alpha^{3^d-1}\geq 1-p$$

をみたすとする．この時, $\mu\succeq\phi^{\alpha r}$ が成り立つ.

証明は省略する．条件中の (3^d-1) というのは $(\mathbb{Z}^d,\mathbb{E}^{d,*})$ の隣接頂点数である.

4.2 有限エネルギー性

この小節では記号の定義を他の節とは別にして用いる．S を高々可算な集合とし, Ω を $\{0,1\}^S$ に直積位相が導入されたものとする．有限集合 $T\subset S$ に対しその要素数を $|T|$ と表し, $0<|T|<\infty$ であることを $T\subset\subset S$ と表す．$T\subset\subset S$ に対して, (正) 射影 $\pi_T:\Omega\to\{0,1\}^T$ を

$$\pi_T((\omega_s)_{s\in S})=(\omega_t)_{t\in T}\quad((\omega_s)_{s\in S}\in\Omega)$$

と定め, この π_T によって導かれるシグマ加法族を $\mathscr{F}_T$ と表し, $(\pi_U:U\subset\subset S\backslash T)$ によって導かれるシグマ加法族を $\mathscr{F}^T$ と表す．すなわち,

$$\mathscr{F}^T=\bigvee_{U\subset\subset S\backslash T}\mathscr{F}_U,\qquad \mathscr{F}=\bigvee_{U\subset\subset S}\mathscr{F}_U$$

である．また, Ω 上のボレル集合族を $\mathscr{F}$ と表し, $\mathcal{A}\subset\Omega$ が $\mathscr{F}$-可測であることを $\mathcal{A}\in\mathscr{F}$ と表す.

各 $\mathcal{A}\subset\Omega$, $T\subset\subset S$ に対して, $\mathcal{A}^T\subset\Omega$ を

$$\mathcal{A}^T=\{\omega\in\Omega:\text{ある }\xi\in\Omega\text{ に対し }\xi_T\omega\in\mathcal{A}\text{ である }\}$$

と定め, $\mathcal{A}_{T,0},\mathcal{A}_{T,1}\subset\Omega$ を

$$\mathcal{A}_{T,\varepsilon}=\{\omega\in\Omega:\omega\in\mathcal{A}^T\text{であって }\omega_t=\varepsilon\ (\forall t\in T)\text{ である }\}\quad(\varepsilon\in\{0,1\})$$

と定める．ただし, 各 $\omega,\xi\in\Omega$, $T\subset S$ に対し $\xi_T\omega\in\Omega$ は $(\xi_T\omega)_s=\xi_s\ (s\in T)$, $(\xi_T\omega)_s=\omega_s\ (s\notin T)$ として定まるものである.

定理 4.5. μ を Ω 上のボレル確率測度とし, ある $p \in (0,1)$ に対し

$$\forall s \in S, \qquad p \le \mu\left(\omega_s = 0 \mid \mathscr{F}^{\{s\}}\right) \le 1-p \tag{4.4}$$

をみたすとする. この時, 任意の $\mathcal{A} \in \mathscr{F}$, $T \subset\subset S$ に対し

$$\mu(\mathcal{A}) \le \left(\frac{1}{p}\right)^{|T|} \min_{\varepsilon \in \{0,1\}} \mu\left(\mathcal{A}_{T,\varepsilon}\right), \qquad \mu(\mathcal{A}_{T,0}) \le \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|T|} \mu\left(\mathcal{A}_{T,1}\right) \tag{4.5}$$

が成り立つ.

μ が Ω 上の直積確率測度であって, $\mu\left(\omega_s = 1\right) = p$ $(\forall s \in S)$ をみたすならば, $p^{|T|} = \mu(\omega_t = 1\ (\forall t \in T))$, $(1-p)^{|T|} = \mu(\omega_t = 0\ (\forall t \in T))$ であることより (4.5) の第二式は明らかに等号の形で成り立つ.

証明 (定理 4.5). $\mathcal{A} \in \mathscr{F}$, $T \subset\subset S$ とする. 任意の $\varepsilon \in \{0,1\}$ に対し (4.5) より

$$\mu(\mathcal{A}_{T,\varepsilon}) = \mu\left[\mu\left(\omega_t = \varepsilon\ (\forall t \in T) \mid \mathscr{F}^T\right) 1_{\mathcal{A}^T}\right] \begin{cases} \le (1-p)^{|T|}\mu(\mathcal{A}^T) \\ \ge p^{|T|}\mu(\mathcal{A}^T) \end{cases}$$

となるので, (4.5) を得る. □

5 FK パーコレーションと粗視化

5.1 FK パーコレーション

FK パーコレーションとは, Fortuin-Kasteleyn によって導入された $\{(p,q) : p \in [0,1],\ q \in (0,\infty)\}$ という二つのパラメータを持つパーコレーション模型であって, ランダム・クラスター模型とも呼ばれる. この模型は, $q = 1$ の時にはベルヌーイ・ボンド・パーコレーション ([Gri99, H92] 参照) であり, $q = 2$ の時には次節で述べる FK 展開に由来するイジング模型との関連がある. より一般に, $q \in \mathbb{N}$ の時には q-状態ポッツ模型との関連がある. FK パーコレーションは $q \in (0,\infty)$ ならば定義可能であるが, $q \in [1,\infty)$ では FKG 不等式が成り立つのに対して, $q \in (0,1)$ では FKG 不等式が成り立たないので, ここでは $q \in (0,1)$ の場合は取り扱わない. また, $q \in [1,\infty)$ の場合に比べ $q \in (0,1)$ の場合の研究に進展が見られないため, 他の専門書においても, $q \in (0,1)$ の場合の取り扱いは少ない. FK パーコレーションについて詳しく知りたい方は, [Gri06] もしくはそこに挙げられている参考文献をご覧頂きたい.

状態空間としてグラフの連結成分の配置から成る集合を取るために, 辺集合を準備する. 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathbb{E}_\Lambda = \{\{x,y\} : x,y \in \Lambda \text{であって } x \sim y \text{ である }\}$ とし, $\mathbb{E}^d = \mathbb{E}_{\mathbb{Z}^d}$ とする. $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ の時, $\mathbb{E}_\Lambda$ の辺の数を $|\mathbb{E}_\Lambda| \in \mathbb{N}$ と表す. 状態空間として $\widetilde{\Omega} = \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$ を取り, 直積位相を導入する. シグマ加法族としてはボレル集合族を取り $\mathscr{G}$ と表す. また, $\widetilde{\Omega}$ の元 $(\omega_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$ を ω と表す. 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\widetilde{\Omega}_\Lambda = \{0,1\}^{\mathbb{E}_\Lambda}$ とし, $\widetilde{\Omega}_\Lambda$ の元 $(\omega_e)_{e \in \mathbb{E}_\Lambda}$ を ω_Λ もしくは ω と表す. $\widetilde{\Omega}_\Lambda$ を $\widetilde{\Omega}$ の $\mathbb{E}_\Lambda$ への制限とみなすこともある. また, 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\bar{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ に対し $\widetilde{\Omega}_\Lambda^{\bar{\omega}} = \{\omega \in \widetilde{\Omega} : \omega_e = \bar{\omega}_e\ (\forall e \notin \mathbb{E}_\Lambda)\}$ とし, $\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda^{\bar{\omega}}$ も $(\omega_e)_{e \in \mathbb{E}_\Lambda}$ と表す. $\widetilde{\Omega}$ から $\widetilde{\Omega}_\Lambda$ への (正) 射影によって導かれるシグマ加法族を $\mathscr{G}_\Lambda$ と表す. 連続関数の族 $\widetilde{\mathscr{C}}_\Lambda$ と $\widetilde{\mathscr{C}}$ をそれぞれ

$$\widetilde{\mathscr{C}}_\Lambda = \{g \mid g : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ は } \mathscr{G}_\Lambda\text{-可測である }\}, \qquad \widetilde{\mathscr{C}} = \bigcup_{\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d} \widetilde{\mathscr{C}}_\Lambda$$

と定める. 混乱の恐れがないので表記の簡単の為に, $g:\widetilde{\Omega}_\Lambda\to\mathbb{R}$ であることを $g\in\widetilde{\mathscr{C}_\Lambda}$ とも表す. 単調増加関数や単調増加事象等を, イジング模型の場合と同様に定める. $\widetilde{\mathscr{C}_\Lambda}$, $\widetilde{\mathscr{C}}$ に対しイジング模型の注意 2.2 と同様のことが成り立つ. 各 $E,F\subset\mathbb{E}^d$ を $F\subset E$ をみたすように取る時, $\mathscr{G}_E^F$ を $\widetilde{\Omega}$ から $\{0,1\}^{E\setminus F}$ への (正) 射影によって導かれるシグマ加法族として定める.

各 $\omega\in\widetilde{\Omega}$ に対して, グラフ $(\mathbb{Z}^d,\{e\in\mathbb{E}^d:\omega_e=1\})$ の各連結成分を (ω における) **クラスター**と呼び, $x\in\mathbb{Z}^d$ を含むクラスターを C_x(もしくは $C_x(\omega)$) と表す. 無限個の場合も含めて C_x の頂点数を $|C_x|\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ と表す. 各 $x,y\in\mathbb{Z}^d$ に対して, $y\in C_x$(または同値な条件の $x\in C_y$) である時, $x\longleftrightarrow y$ と表し x と y は繋がっていると言う. また, $y\notin C_x$(または同値な条件の $x\notin C_y$) である時, $x\not\longleftrightarrow y$ と表し x と y は繋がっていないと言う. $|C_x|=\infty$ の時には $x\longleftrightarrow\infty$ と表し, $|C_x|<\infty$ の時には $x\not\longleftrightarrow\infty$ と表す. $\Delta,\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ に対して, 二つの事象 $\{\Delta\longleftrightarrow\Lambda\}$, $\{\Delta\not\longleftrightarrow\Lambda\}$ をそれぞれ

$$\{\Delta\longleftrightarrow\Lambda\}=\{\,\text{ある }x\in\Delta\text{ と }y\in\Lambda\text{ が存在し }x\longleftrightarrow y\text{ である}\,\},$$
$$\{\Delta\not\longleftrightarrow\Lambda\}=\{\,\text{任意の }x\in\Delta\text{ と }y\in\Lambda\text{ に対し }x\not\longleftrightarrow y\text{ である}\,\}$$

と定める. $\Delta,\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ を $\emptyset\neq\Delta\subset\Lambda$ をみたすように取り, $\omega\in\widetilde{\Omega}_\Delta$, $\bar{\omega}\in\widetilde{\Omega}_\Lambda$ とする時, $\omega_\Delta\bar{\omega}\in\widetilde{\Omega}_\Lambda$ を

$$(\omega_\Delta\bar{\omega})_e=\omega_e\quad(e\in\mathbb{E}_\Delta),\qquad(\omega_\Delta\bar{\omega})_e=\bar{\omega}_e\quad(e\in\mathbb{E}_\Lambda\setminus\mathbb{E}_\Delta)$$

と定める. $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$ に対し $\widetilde{\Omega}$ 上の関数 k_Λ を

$$k_\Lambda(\omega)=\sharp\{C:C\text{ はクラスターであって }C\cap\Lambda\neq\emptyset\text{ である}\,\}$$

と定める. すなわち, k_Λ は Λ と共通部分を持つクラスターの個数を表す.

$q\geq1$ とする (以後は特に断りなく $q\geq1$ とする). 各 $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$, $p\in[0,1]$ に対して, 境界条件 $\bar{\omega}\in\widetilde{\Omega}$ を持つ $\mathbb{E}_\Lambda$ 上の (有限体積) **ランダム・クラスター測度** $\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}$ とは,

$$\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}(\omega)=\frac{1}{Z_{\Lambda,\bar{\omega}}(p,q)}\left(\prod_{e\in\mathbb{E}_\Lambda}p^{\omega_e}(1-p)^{1-\omega_e}\right)q^{k_\Lambda(\omega_\Lambda\bar{\omega})}\quad(\omega\in\widetilde{\Omega}_\Lambda)$$

で与えられる $\widetilde{\Omega}_\Lambda$ 上の確率測度のことを言う. ただし, $Z_{\Lambda,\bar{\omega}}(p,q)$ は正規化定数である. 議論によっては, $\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}$ を $\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}(\widetilde{\Omega}_\Lambda^{\bar{\omega}})=1$ である $\widetilde{\Omega}$ 上の確率測度とみなす. 各 $g\in\widetilde{\mathscr{C}}$ に対する平均 $\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}[g]$ は, $\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}$ を $\widetilde{\Omega}$ または $\widetilde{\Omega}_\Lambda^{\bar{\omega}}$ 上の確率測度として定める. 特に, $\bar{\omega}\equiv1$ の時は記号 w を用いて $\phi_{\Lambda,w}^{p,q}$, $k_{\Lambda,w}$ 等と, $\bar{\omega}\equiv0$ の時は記号 f を用いて $\phi_{\Lambda,f}^{p,q}$, $k_{\Lambda,f}$ 等と表す. 各 $N\in\mathbb{N}$ に対して, Λ_N と添字付けるべき場合には略して N と添字付ける. ただし, $\Lambda_N=(-N/2,N/2]^d\cap\mathbb{Z}^d$ である. 各 $e\in\mathbb{E}^d$ に対し $\widetilde{\Omega}_e$ 上のランダム・クラスター測度としては, $\phi_{e,w}^{p,q},\phi_{e,f}^{p,q}$ の二つが存在し

$$\phi_{e,w}^{p,q}(\omega_e=1)=p,\qquad\phi_{e,f}^{p,q}(\omega_e=1)=\frac{p}{p+q(1-p)}\tag{5.1}$$

である.

任意に $\Delta,\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$ を $\emptyset\neq\Delta\subset\Lambda$ をみたすように取ると, 各 $\bar{\omega}\in\widetilde{\Omega}$, $p\in[0,1]$ に対し

$$\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}[g]=\int_{\widetilde{\Omega}_\Lambda}\phi_{\Delta,\omega_\Delta\bar{\omega}}^{p,q}[g]\,d\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}(\omega)\quad(\forall g\in\widetilde{\mathscr{C}})\tag{5.2}$$

が成り立つ. さらに, $\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}$ が (2.4) をみたすことより, イジング模型の場合と同様に,

$$\phi_{\Delta,f}^{p,q}\preceq\phi_{\Lambda,f}^{p,q}\preceq\phi_{\Lambda,\bar{\omega}}^{p,q}\preceq\phi_{\Lambda,w}^{p,q}\preceq\phi_{\Delta,w}^{p,q}\quad(\forall\bar{\omega}\in\widetilde{\Omega})\tag{5.3}$$

が成り立つ. すなわち, 任意の単調増加関数 $g \in \widetilde{\mathscr{C}}$ に対し

$$\phi^{p,q}_{\Lambda,f}[g] \le \phi^{p,q}_{\Lambda,\bar\omega}[g] \le \phi^{p,q}_{\Lambda,w}[g] \quad (\forall \bar\omega \in \widetilde{\Omega}), \qquad \phi^{p,q}_{\Delta,f}[g] \le \phi^{p,q}_{\Lambda,f}[g], \qquad \phi^{p,q}_{\Lambda,w}[g] \le \phi^{p,q}_{\Delta,w}[g]$$

が成り立つ. 例えば, $1_{\{O \longleftrightarrow \partial_{in}\Delta\}}$ は単調増加関数である. (5.3) より $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ とすると, 弱収束極限 (熱力学極限とも呼ぶ)

$$\phi^{p,q}_f = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \phi^{p,q}_{\Lambda,f}, \qquad \phi^{p,q}_w = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \phi^{p,q}_{\Lambda,w} \tag{5.4}$$

がそれぞれ存在し, $\phi^{p,q}_f, \phi^{p,q}_w$ は平行移動不変測度であって

$$\phi^{p,q}_f \preceq \phi^{p,q}_w \tag{5.5}$$

が成り立つ. また, 正規化定数を用いてイジング模型の時と同様に定まる自由エネルギーの性質より, 高々可算個の $p \in (0,1)$ を除いて $\phi^{p,q}_f = \phi^{p,q}_w$ が分かる. さらに, $g \in \widetilde{\mathscr{C}}$ を単調増加関数とすると, $\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar\omega}[g]$, $\phi^{p,q}_f[g]$, $\phi^{p,q}_w[g]$ はそれぞれ $p \in [0,1]$ に関して単調増加となる. それ故, $\epsilon = w$ もしくは f に対しパーコレーション確率を

$$\theta^*(p,q) = \phi^{p,q}_\epsilon(O \longleftrightarrow \infty) = \lim_{N\to\infty} \phi^{p,q}_\epsilon(O \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_N)$$

と定めると,

$$p_c(q,d) = \inf\{p \in [0,1] : \theta^w(p,q) > 0\} = \inf\{p \in [0,1] : \theta^f(p,q) > 0\}$$

として臨界確率 $p_c(q,d) \in (0,1)$ が定まり,

$$\theta^\epsilon(p,q) = 0 \quad (p < p_c(q,d)), \qquad \theta^\epsilon(p,q) > 0 \quad (p > p_c(q,d))$$

が成り立つ. 臨界確率は一次元の場合を除いて非自明である. すなわち, 各 $q \ge 1$ に対し

$$p_c(q,d) = 1 \quad (d=1), \qquad p_c(q,d) \in (0,1) \quad (d \ge 2) \tag{5.6}$$

である.

注意 5.1. $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $\omega, \bar\omega \in \widetilde{\Omega}$ とする.

(1) k_Λ は単調減少関数である.
(2) $\emptyset \ne \bar\Delta \subset \Lambda$ とする. この時, 全ての $e \in \{\{x,y\} \in \mathbb{E}^d : x \in \Delta, y \in \partial_{ex}\Delta\}$ に対し $\omega_e = 0$ ならば, $k_{\Lambda,f}(\omega) = k_{\Delta,f}(\omega) + k_{\Lambda\setminus\Delta,f}$ である.
(3) 全ての $e \in \mathbb{E}_{\partial_{in}\Lambda}$ に対し $\omega_e = 0$ ならば, $k_{\Lambda,f}(\omega_\Lambda\bar\omega)$ は $\bar\omega$ に関して定数である.
(4) $q=1$ の時は境界条件依存性が消え, FK パーコレーションはベルヌーイ・ボンド・パーコレーションと一致する.
(5) ある $p_0 = p_0(q,d) \in (0,1)$ が存在して, 全ての $p > p_0$ に対し $\theta^w(p,q) = \theta^f(p,q)$ が成り立つ.
(6) 一般に $\theta^w(p,q) \ne \theta^f(p,q)$ となる $p \in [p_c(q,d), p_0)$ は存在しても高々可算個であるが, それ以上のことは知られていない (定理 5.6 参照). ただし, p_0 は上記 (5) で定めたものであって, (5.5) より $\theta^w(p,q) \ne \theta^f(p,q)$ と $\theta^w(p,q) > \theta^f(p,q)$ とは同値である.

定理 5.2. $\theta^w(p,q)$ は $p \in [0,1)$ において右連続であって,

$$\lim_{N\to\infty} \phi^{p,q}_{N,w}(O \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_N) = \theta^w(p,q) \quad (\forall p \in [0,1]) \tag{5.7}$$

が成り立つ. また, $\theta^f(p,q)$ は $p \in (0,1]\setminus\{p_c(q,d)\}$ において左連続である.

証明. (5.7) を示せば $\theta^w(p,q)$ の右連続性は明らかである. $p\in[0,1]$ とする. $M,N\in\mathbb{N}$ を $M<N$ と取ると (5.3) と (5.4) より

$$\theta^w(p,q)\le\phi^{p,q}_{N,w}(O\longleftrightarrow\partial_{in}\Lambda_N)\le\phi^{p,q}_{N,w}(O\longleftrightarrow\partial_{in}\Lambda_M)$$

となるので, $N\to\infty$, $M\to\infty$ として (5.7) を得る. $\theta^f(p,q)$ の左連続性の証明は (簡単ではないので) 省略する. □

(5.2) と注意 5.1 より, $\phi^{p,q}_{\Lambda,f},\phi^{p,q}_{\Lambda,w}$ は次の定理 5.3(所謂マルコフ性) をみたす (証明省略).

定理 5.3. 任意に $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$, $p\in[0,1]$ を取る. この時, $\Delta\subset\mathbb{Z}^d$ を $\emptyset\neq\bar{\Delta}\subset\Lambda$ として,

$$\mathcal{D}=\left\{\omega_e=0\ \left(\forall e\in\mathbb{E}_\Lambda\backslash(\mathbb{E}_\Delta\cup\mathbb{E}_{\Lambda\backslash\Delta})\right)\right\},$$
$$\mathcal{I}=\left\{\omega_e=1\ \left(\forall e\in\mathbb{E}_{\partial_{in}\Delta}\cup\mathbb{E}_{\partial_{in}(\Lambda\backslash\Delta)}\right)\right\}$$

とすると,

$$\phi^{p,q}_{\Lambda,f}[g_1g_2\mid\mathcal{D}]=\phi^{p,q}_{\Delta,f}[g_1]\phi^{p,q}_{\Lambda\backslash\Delta,f}[g_2]\quad(\forall g_1\in\widetilde{\mathscr{C}}_\Delta,\ g_2\in\widetilde{\mathscr{C}}_{\Lambda\backslash\Delta}),$$
$$\phi^{p,q}_{\Lambda,w}[g_1g_2\mid\mathcal{I}]=\phi^{p,q}_{\Delta,w}[g_1\mid\mathcal{I}]\phi^{p,q}_{\Lambda\backslash\Delta,w}[g_2\mid\mathcal{I}]\quad(\forall g_1\in\widetilde{\mathscr{C}}_\Delta,\ g_2\in\widetilde{\mathscr{C}}_{\Lambda\backslash\Delta}),$$

が成り立つ.

(5.1), (5.2) より, $\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}$ は次の定理 5.4(有限エネルギー性) をみたす (証明省略).

定理 5.4. 任意に $\Lambda\subset\subset\mathbb{Z}^d$, $\bar{\omega}\in\widetilde{\Omega}$, $p\in[0,1]$ を取る. この時, 各 $\{x,y\}\in\mathbb{E}_\Lambda$, $\omega\in\widetilde{\Omega}_\Lambda$ に対し

$$\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}(\xi_e=1\mid\mathscr{G}^e_E)(\omega)=\begin{cases}p & \left(y\in C_x\left((\omega^{e,0})_\Lambda\bar{\omega}\right)\right),\\ \frac{p}{p+q(1-p)} & \left(y\notin C_x\left((\omega^{e,0})_\Lambda\bar{\omega}\right)\right)\end{cases}$$

が成り立つ. ただし, $e=\{x,y\}$, $E=\mathbb{E}_\Lambda$ であって, $\omega^{e,0}\in\widetilde{\Omega}_\Lambda$ は

$$(\omega^{e,0})_e=0,\qquad(\omega^{e,0})_b=\omega_b\quad(b\in\mathbb{E}_\Lambda\backslash\{e\})$$

として定まるものである.

5.2 粗視化 (Pisztora's coarse graining) の準備

この小節では $d\ge3$ として, [P96] において提案された FK パーコレーションにおける粗視化の準備について述べる. 本稿で言う粗視化とは概略的に, $\widetilde{\Omega}_N$ 上の良い事象 $\mathcal{G}$ を取り, 各 $x\in(L\mathbb{Z}^d)$ に対し $\mathcal{G}$ に対応する $\widetilde{\Omega}_{(x+\Lambda_L)}$ 上の事象 $\mathcal{G}_x$ を定め $X_x=1_{\mathcal{G}_x}$ とし, 模型 $(X_{(Lx)})_{x\in\mathbb{Z}^d}$ をベルヌーイ・サイト・パーコレーションとの比較によって解析することである. ただし, $L,N\in\mathbb{N}$ は $L\le N$ をみたすとし, 良い事象とは起こる確率が 1 に近い事象を意味する.

ランダム・クラスター測度 $\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}$ は FKG 不等式をみたすので, 任意に単調増加事象 $\mathcal{A}\subset\widetilde{\Omega}_\Lambda$ を取ると

$$\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}[g\mid\mathcal{A}]\ge\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}[g]\quad(\text{全ての単調増加関数 } g:\widetilde{\Omega}_\Lambda\to\mathbb{R})\tag{5.8}$$

が成り立つ. すなわち,

$$\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}(\cdot\mid\mathcal{A})\succeq\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}$$

である．また，$\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}$ は (5.3) と同様の方程式をみたす．それ故，応用上の都合も考慮して，$\phi^{p,q}_{\Lambda,f}$ と FKG 不等式の意味において比較可能な $\widetilde{\Omega}_\Lambda$ 上の確率測度の族 $\mathscr{R}(\succeq^s, p, q, \Lambda)$ を次のように定める．ただし，$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $p \in [0,1]$ である: 各 $\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda$, $E \subset \mathbb{E}_\Lambda$ に対し $[\omega_E]_\Lambda \subset \widetilde{\Omega}_\Lambda$ を

$$[\omega_E]_\Lambda = \left\{\omega' \in \widetilde{\Omega}_\Lambda : \text{全ての } e \in E \text{ に対し } \omega'_e = \omega_e \text{ である}\right\}$$

と定める．$\widetilde{\Omega}_\Lambda$ 上の確率測度 ϕ が $\phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p, q, \Lambda)$ であるとは，

$$\forall\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda, \quad E \subset \mathbb{E}_\Lambda, \qquad \phi(\cdot \mid [\omega_E]_\Lambda) \succeq \phi^{p,q}_{\Lambda,f}(\cdot \mid [\omega_E]_\Lambda)$$

をみたす時に言う．ここで，各 $\bar{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ に対し $\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}$ が (2.4) みたすことより，

$$\{\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}} : \bar{\omega} \in \widetilde{\Omega}\} \subset \mathscr{R}(\succeq^s, p, q, \Lambda)$$

であることに注意する ([P96, Gri06] 参照).

定義 5.5. 各 $L, N \in \mathbb{N}$ に対し

$$S(N,L) = \big((-N/2, N/2]^{d-1} \times (-L/2, L/2]\big) \cap \mathbb{Z}^d$$

とする．任意に $L \in \mathbb{N}$ を取る毎に，

$$\hat{p}(L,q,d) = \inf\left\{p \in [0,1] : \liminf_{N\to\infty} \inf_{x \in S(N,L)} \phi^{p,q}_{S(N,L),f}(O \longleftrightarrow x) > 0\right\}$$

として臨界値 $\hat{p}(L,q,d) \in [p_c(q,d), 1)$ を定めると，$\hat{p}(L,q,d)$ の $L \nearrow \infty$ における単調減少極限

$$\hat{p}(L,q,d) \searrow \hat{p}_c(q,d) \quad (L \nearrow \infty) \tag{5.9}$$

として臨界値 $\hat{p}_c(q,d) \in [p_c(q,d), 1)$ が定まる．この臨界値 $\hat{p}_c(q,d)$ を **slab threshold** と呼ぶ.

ここで，$\hat{p}(L,q,d)$ の定義において $x \in S(N,L)$ に関する下限を取っている為に，$\hat{p}(L,q,d)$ が L に関して単調減少であることは自明ではないこと，および，$\hat{p}(L,q,d) < 1$ は自明ではないことに注意する.

定理 5.6. $d \geq 3$ とし $q = 2$ とする．この時,

$$\hat{p}_c(2,d) = p_c(2,d) \tag{5.10}$$

および

$$\theta^w(p,q) = \theta^f(p,q) \quad (\forall p \in [0,1]\backslash\{p_c(2,d)\}) \tag{5.11}$$

が成り立つ.

証明は省略する．(5.10) は [B05] において表面張力に関する精密な解析を実行することによって示され，(5.11) は [B06] において粗視化と比較定理を用いて示された．[B06] における粗視化は，本稿で紹介した (局所的な) 粗視化を基本としているが，パーコレーションの情報も用いることから大局的なものとなる．それ故，(どの形であっても) 比較定理の仮定をみたすことは自明ではなく，巧妙にパイエルス型議論を展開することによって (4.3) を導いている．次節で述べる定理 6.5 を合わせて用いるとこの定理 5.6 より，(相転移下の) 高次元イジング模型においても平行移動不変ギブス測度は

μ_+^β, μ_-^β に限るという, 長年未解決であった問題が肯定的に導かれた. 二次元イジング模型においては, Aizenman と樋口により独立に, (相転移下であっても) 任意のギブス測度は μ_+^β と μ_-^β の一次結合として表されることが示されている.

この小節の結果を述べるために次の概念を導入する. 各 $l > 0$ に対し

$$\mathbb{B}(l) = \{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d : \text{ある } x \in \mathbb{Z}^d \text{ が存在して } \Lambda = x + ((-l/2, l/2]^d \cap \mathbb{Z}^d) \text{ である }\}$$

と定める. $a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{Z}$ を $a_i < b_i$ $(1 \le \forall i \le d)$ をみたすように取り, $B = ([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) \cap \mathbb{Z}^d$ とする. 箱 B の境界 $\partial_{in} B$ を次のように分類する: 各 $\alpha \in \{1, \ldots, d\}$ に対し

$$\partial_{\alpha,-} B = \partial_{in} B \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_\alpha = a_\alpha\}, \quad \partial_{\alpha,+} B = \partial_{in} B \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_\alpha = b_\alpha\}$$

と定める. 各 $C \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathrm{diam}_\infty(C) = \sup\{d_\infty(x, y) : x, y \in C\}$ と定める. 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda$ に対して, $(\Lambda, \{e \in \mathbb{E}_\Lambda : \omega_e = 1\})$ の各連結成分を Λ 内のクラスターと呼び $C(\Lambda)$ と表す. 特に, $x \in \Lambda$ を含む Λ 内のクラスターを $C_x(\Lambda)$ と表す. 混乱の恐れがない場合には, 記号から Λ を省略しそれぞれ C, C_x と表す. 各 $x, y \in \Lambda$ に対して, $y \in C_x(\Lambda)$ である時には $\{\Lambda\text{内で } x \longleftrightarrow y\}$ と表し, $y \notin C_x(\Lambda)$ である時には $\{\Lambda\text{内で } x \not\longleftrightarrow y\}$ と表す.

定義 5.7. (1) $\alpha \in \{1, \ldots, d\}$ とする. クラスター $C(B)$ が B を α- 横断するとは, $C(B) \cap \partial_{\alpha,-} B \neq \emptyset$ かつ $C(B) \cap \partial_{\alpha,+} B \neq \emptyset$ である時に言う.

(2) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \{1, \ldots, d\} (1 \le k \le d)$ とする. クラスター $C(B)$ が B を $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$- 横断するとは, 任意の $1 \le i \le k$ に対し $C(B) \cap \partial_{\alpha_i,-} B \neq \emptyset$ かつ $C(B) \cap \partial_{\alpha_i,+} B \neq \emptyset$ である時に言う.

(3) クラスター $C(B)$ が B を横断するとは, 任意の $1 \le i \le d$ に対し $C(B) \cap \partial_{i,-} B \neq \emptyset$ かつ $C(B) \cap \partial_{i,+} B \neq \emptyset$ である時に言う.

(4) B を横断するクラスターが存在する時, 単に B を横断すると言う. また, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$- 横断についても同様である.

粗視化に用いる三つの事象を定める. 各 $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathcal{U}(N) = \{\Lambda_N \text{を横断する } \Lambda_N \text{ 内のクラスター } C^* \text{ が唯一存在する }\}$$

と定める. ただし, $\Lambda_N = (-N/2, N/2]^d \cap \mathbb{Z}^d$ である. $\mathbb{N}$ 上の関数の族 G を $G = \{g : \mathbb{N} \to (0, \infty) : g(N) \le N - 1\ (\forall N \in \mathbb{N})\}$ とする. 各 $g \in G$ に対し

$$\mathcal{R}^g(N) = \mathcal{U}(N) \cap \left\{ \begin{array}{c} C^* \text{ 以外には, } \mathrm{diam}_\infty(C(\Lambda_N)) \ge g(N) \text{ をみたす} \\ \Lambda_N \text{ 上のクラスター } C(\Lambda_N) \text{ は存在しない} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{O}^g(N) = \mathcal{R}^g(N) \cap \left\{ \begin{array}{c} C^* \text{ が横断しない } Q \in \mathbb{B}(g(N)) \text{ は} \\ \Lambda_N \text{ 内には存在しない} \end{array} \right\}$$

と定める. すなわち,

$$\mathcal{R}^g(N) = \mathcal{U}(N) \cap \left\{ \begin{array}{c} C(\Lambda_N) \text{ が } \mathrm{diam}_\infty(C(\Lambda_N)) \ge g(N) \text{ をみたすならば,} \\ C(\Lambda_N) = C^* \text{ である} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{O}^g(N) = \mathcal{R}^g(N) \cap \left\{ \begin{array}{c} Q \in \mathbb{B}(g(N)) \text{ が } Q \subset \Lambda_N \text{ をみたすならば,} \\ C^* \text{ は } Q \text{ を横断する} \end{array} \right\}$$

である．これらの事象 $\mathcal{U}(N)$, $\mathcal{R}^g(N)$, $\mathcal{O}^g(N)$ は全て, 単調増加でも単調減少でもないことに注意する．各 $\kappa > 0$ に対し

$$G_\kappa = \left\{ g \in G : \liminf_{N\to\infty} g(N)/\log N > \kappa \right\}$$

とする．

定理 5.8. $d \geq 3$ として, 任意に $p > \hat{p}_c(q,d)$ を取る．この時,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left(\sup_{\phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p,q,N)} \phi\left(\mathcal{U}(N)^c\right) \right) < 0 \tag{5.12}$$

が成り立つ．さらに, ある $\kappa_0 = \kappa_0(p,q,d) \in (0,\infty)$ が存在して, 任意の $\kappa > \kappa_0$ に対し

$$\forall g \in G_\kappa, \qquad \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{g(N)} \log \left(\sup_{\phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p,q,N)} \phi\left(\mathcal{O}^g(N)^c\right) \right) < 0 \tag{5.13}$$

が成り立つ．

定理 5.8 を証明する前に, 二つの補題とその証明を述べる．

補題 5.9. $d \geq 3$ として, 任意に $p > \hat{p}_c(q,d)$ を取る．この時, ある $L_0 = L_0(p,q,d) \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $L \geq L_0$ に対し

$$\liminf_{N\to\infty} \inf_{x,y \in S(N,L)} \phi^{p,q}_{S(N,L),f}(x \longleftrightarrow y) > 0, \tag{5.14}$$

$$\liminf_{N\to\infty} \inf_{x \in S(N,L)} \phi^{p,q}_{S(N,L),f}\big(C_x \text{は } S(N,L) \text{ を } (1,\dots,d-1)\text{-横断する}\big) > 0 \tag{5.15}$$

が成り立つ．

証明. $p > \hat{p}_c(q,d)$ とすると (5.9) より, ある $L_0 = L_0(p,q,d) \in \mathbb{N}$ が存在して $p > \hat{p}(L_0,q,d)$ となる．従って, 適当に $\delta > 0$ を取るとある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\forall N \geq N_0, \qquad \inf_{x \in S(N,L_0)} \phi^{p,q}_{S(N,L_0),f}(O \longleftrightarrow x) > \delta$$

となる．従って, FKG 不等式より

$$\begin{aligned}
\forall N \geq N_0, \qquad & \inf_{x,y \in S(N,L_0)} \phi^{p,q}_{S(N,L_0),f}(x \longleftrightarrow y) \\
& \geq \inf_{x,y \in S(N,L_0)} \phi^{p,q}_{S(N,L_0),f}(O \longleftrightarrow x) \phi^{p,q}_{S(N,L_0),f}(O \longleftrightarrow y) \\
& > \delta^2
\end{aligned}$$

となるので, (5.14) を得る． さらに, 各 $N \in \mathbb{N}$, $i = 1,\dots,d$, $\epsilon = +,-$ に対し適当に $y^{(N)}_{i,\epsilon} \in \partial_{i,\epsilon} S(N,L_0)$ を取ると

$$\begin{aligned}
& \{C_x(S(N,L_0)) \text{ は } S(N,L_0) \text{ を } (1,\dots,d-1)\text{-横断する} \} \\
& \supset \bigcap_{1 \leq i \leq d} \left(\{x \longleftrightarrow y^{(N)}_{i,+}\} \cap \{x \longleftrightarrow y^{(N)}_{i,-}\} \right)
\end{aligned}$$

となるので, (5.14) と同様にして (5.15) を得る． □

クラスター C に対し

$$\mathrm{diam}_{\infty,i}(C) = \sup\{|x_i - y_i| : x, y \in C\} \quad (1 \le i \le d)$$

を C の i-直径と呼ぶ. 各 $g \in G$, $1 \le i \le d$, $N \in \mathbb{N}$ に対して, 事象 $\mathcal{A}_i^g(N)$ を

$$\mathcal{A}_i^g(N) = \left\{ \begin{array}{c} \Lambda_N \text{ を } i\text{-横断するクラスターが唯一存在して,} \\ \text{それ以外のクラスターの } i\text{-直径は } g(N) \text{ 未満である} \end{array} \right\}$$

と定める. すなわち,

$$\mathcal{A}_i^g(N) = \left\{ \begin{array}{c} \text{クラスター } C(N) \text{ が } \mathrm{diam}_{\infty,i}(C(N)) \ge g(N) \text{ をみたすならば,} \\ C(N) \text{ は唯一存在する } \Lambda_N \text{ を } i\text{-横断するクラスターである} \end{array} \right\}$$

である. ただし, $C(N)$ は Λ_N 内のクラスターを表し, $C(\Lambda_N)$ を略記したものである. 事象 $\mathcal{A}_i^g(N)$ は単調増加でも単調減少でもないことに注意する.

補題 5.10. $d \ge 3$ として, 任意に $p > \hat{p}_c(q,d)$ を取る. この時,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \phi_{N,f}^{p,q}\left(\Lambda_N \text{を横断しない}\right) < 0 \tag{5.16}$$

が成り立つ. さらに, ある $\kappa_0 = \kappa_0(p,q,d) \in (0,\infty)$ が存在して, 任意の $\kappa > \kappa_0$ に対し

$$\forall g \in G_\kappa, \quad 1 \le \forall i \le d, \qquad \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{g(N)} \log \left(\sup_{\phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p,q,N)} \phi\left(\mathcal{A}_i^g(N)^c\right) \right) < 0 \tag{5.17}$$

が成り立つ.

証明. $p > \hat{p}_c(q,d)$ とすると補題 5.9 より, 適当に $\delta > 0$ を取るとある $L, N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $N \ge N_0$ に対し

$$\inf_{x,y \in S(N,L)} \phi_{S(N,L),f}^{p,q}(x \longleftrightarrow y) > \delta, \tag{5.18}$$

$$\inf_{x \in S(N,L)} \phi_{S(N,L),f}^{p,q}\big(C_x \text{は } S(N,L) \text{ を } (1,\dots,d-1)\text{-横断する}\big) > \delta \tag{5.19}$$

が成り立つ. 以後の証明では $N \ge N_0$ とする. d-方向に平行移動した $S(N,L)$ をできるだけ用いて Λ_N を分割する. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$S_k = \Lambda_N \cap \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : -\frac{N}{2} + (k-1)L < x_d \le -\frac{N}{2} + kL \right\}$$

として, $k_0 = \sup\{k \in \mathbb{N} : S_k \subset \Lambda_N\}$ とする. この時, 任意の $1 \le k \le k_0$ に対し S_k は $S(N,L)$ を d-方向に平行移動したものとなる. 各 $1 \le k \le k_0$ に対し $T_k = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ としておく.

まず (5.16) を示す. 明らかに,

$$\begin{aligned} &\phi_{N,f}^{p,q}\left(\Lambda_N \text{を横断しない}\right) \\ &\quad \le \phi_{N,f}^{p,q}\left(\Lambda_N \text{を } d\text{-横断しない}\right) + \phi_{N,f}^{p,q}\left(\Lambda_N \text{を } d\text{-横断するが横断はしない}\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

であって,

$$\phi_{N,f}^{p,q}\left(\Lambda_N \text{を } d\text{-横断しない}\right) = \phi_{N,f}^{p,q}\left(\Lambda_N \text{を } 1\text{-横断しない}\right)$$

である. (5.20) の右辺第一項を評価する. 単調減少事象 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D}=\{\omega_e=0\ (\forall e\in\mathbb{E}_N\backslash(\mathbb{E}_{S_1}\cup\cdots\cup\mathbb{E}_{S_{k_0}})\}$$

と定めると, 定理 5.3 より

$$\phi^{p,q}_{N,f}(\cdot\mid\mathcal{D})=\prod_{k=1}^{k_0+1}\phi^{p,q}_{S_k,f}$$

であって, FKG 不等式より

$$\phi^{p,q}_{N,f}\succeq\phi^{p,q}_{N,f}(\cdot\mid\mathcal{D})$$

である. 従って, $\{\Lambda_N$を 1-横断しない$\}$ の単調減少性と (5.20) より

$$\begin{aligned}
\text{(5.21)}\qquad &\phi^{p,q}_{N,f}\left(\Lambda_N\text{を 1-横断しない}\right)\\
&\le\phi^{p,q}_{N,f}\left(\bigcap_{k=1}^{k_0}\{S_k\text{を 1-横断するクラスター }C(S_k)\text{ は存在しない}\}\;\middle|\;\mathcal{D}\right)\\
&=\prod_{k=1}^{k_0}\phi^{p,q}_{S_k,f}(S_k\text{を 1-横断しない})\\
&\le(1-\delta)^{\frac{N}{L}-1}
\end{aligned}$$

を得る. (5.20) の右辺第二項を評価する. 各 $z\in\partial_{d,-}\Lambda_N$ に対し

$$\mathcal{C}_z=\{C_z(N)\text{ は }\Lambda_N\text{ を }d\text{-横断するが }(1,\ldots,d-1)\text{-横断しない}\}$$

と定め, 各 $1\le k\le k_0$ に対し

$$\mathcal{C}_{z,k}=\{C_z(T_k)\text{ は }T_k\text{ を }d\text{-横断するが }(1,\ldots,d-1)\text{-横断しない}\}$$

と定める. この時, $\mathcal{C}_{z,1}\supset\cdots\supset\mathcal{C}_{z,k_0}\supset\mathcal{C}_z$ となるので, $T_0=z,\ C_{z,0}=\widetilde{\Omega}_N$ として

$$\text{(5.22)}\qquad 0\le\forall k\le k_0-1,\qquad \phi^{p,q}_{N,f}\left(\mathcal{C}_{z,k+1}\mid\mathscr{G}_{T_k}\right)\le1-\widetilde{p}\delta\qquad\left(\widetilde{p}=\frac{p}{p+q(1-p)}\right)$$

を示せばよい. なぜなら, (5.22) より

$$\begin{aligned}
\phi^{p,q}_{N,f}\left(\mathcal{C}_z\right)&\le\phi^{p,q}_{N,f}\left[\phi^{p,q}_{N,f}\left(\mathcal{C}_{z,k_0}\mid\mathscr{G}_{T_{k_0-1}}\right);\mathcal{C}_{z,k_0-1}\right]\\
&\le(1-\widetilde{p}\delta)\,\phi^{p,q}_{N,f}\left(\mathcal{C}_{z,k_0-1}\right)\\
&\quad\vdots\\
&\le(1-\widetilde{p}\delta)^{\frac{N}{L}-1}
\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\text{(5.23)}\qquad \phi^{p,q}_{N,f}\left(\Lambda_N\text{を }d\text{-横断するが横断はしない}\right)&\le N^{d-1}\sup_{z\in\partial_{d,-}\Lambda_N}\phi^{p,q}_{N,f}(\mathcal{C}_z)\\
&\le N^{d-1}\left(1-\widetilde{p}\delta\right)^{\frac{N}{L}-1}
\end{aligned}$$

を得るからである. 明らかに, (5.20) と (5.21), (5.23) のそれぞれの評価より (5.16) が分かる.

これより (5.22) 示す. $0 \le k \le k_0 - 1$ とする. $\phi^{p,q}_{N,f}(\mathcal{C}_{z,k+1} \mid \mathcal{C}^c_{z,k}) = 0$ なので事象 $\mathcal{C}_{z,k}$ 上で考えればよい. この時,

$$z_k(\omega) \in C_z(T_k, \omega) \cap \partial_{d,+} T_k$$

を $\mathscr{G}_{T_k}$-可測であるように選べる. 例えば, $\partial_{d,+} T_k$ にあらかじめ全順序を付けておき $C_z(T_k, \omega) \cap \partial_{d,+} T_k$ に属する最小の頂点を取ればよい. さらに,

$$z'_k(\omega) \in S_k, \quad z'_k(\omega) \sim z_k(\omega), \qquad b_k(\omega) = \{z_k(\omega), z'_k(\omega)\}$$

とすると, (5.19) と FKG 不等式より

$$\begin{aligned}
&\phi^{p,q}_{N,f}\left(\mathcal{C}_{z,k+1} \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \\
&\le 1 - \phi^{p,q}_{N,f}\left(C_z(T_{k+1}) \text{ は } T_{k+1} \text{ を } (1, \ldots, d-1)\text{-横断しない} \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \\
&\le 1 - \phi^{p,q}_{N,f}\left(\omega_{b_k} = 1 \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \phi^{p,q}_{N,f}\left(C_{z'_k} \text{ は } S_{k+1} \text{ を } (1, \ldots, d-1)\text{-横断しない} \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \\
&\le 1 - \widetilde{p}\delta
\end{aligned}$$

が成り立つので, (5.22) を得る.

次に $i = d$ として (5.17) を示すが, その証明手順は (5.16) と同様なので略証とする. $\phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p, q, N)$ とする. 各 $x \in \partial_{d,-}\Lambda_N$, $y \in \Lambda_N$ に対し

$$\mathcal{C}_{(x,y)} = \left\{ \begin{array}{c} C_x \cap \partial_{d,+}\Lambda_N \ne \emptyset \text{ かつ } C_x \cap C_y = \emptyset \text{ であって,} \\ C_y \cap \{z \in \Lambda_N : z_d \ge y_d + g(N)\} \ne \emptyset \text{ である} \end{array} \right\}$$

と定め, 一様に

$$\phi(\mathcal{C}_{(x,y)}) \le \left(1 - \widetilde{p}^2\delta\right)^{\frac{g(N)}{L} - 1}$$

が成り立つことを示す. 表記の簡単の為に, $y \in \partial_{d,-}\Lambda_N$, $y \not\sim x$ とする. $k'_0 = \sup\{k \in \mathbb{N} : z \in T_k \text{ならば } z_d < g(N) \text{ である }\}$ として, 各 $1 \le k \le k'_0$ に対し

$$\mathcal{C}_{(x,y),k} = \{C_x(T_k) \cap C_y(T_k) = \emptyset \text{ であって } C_x(T_k) \cap \partial_{d,+} T_k \ne \emptyset \text{ である}\}$$

と定める. この時, $\mathcal{C}_{(x,y),1} \supset \cdots \supset \mathcal{C}_{(x,y),k'_0} \supset \mathcal{C}_{(x,y)}$ となるので, $T_0 = \{x, y\}$, $C_{(x,y),0} = \widetilde{\Omega}_N$ として

$$0 \le \forall k \le k'_0 - 1, \qquad \phi^{p,q}_{N,f}\left(\mathcal{C}_{(x,y),k+1} \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \le 1 - \widetilde{p}^2\delta \tag{5.24}$$

を示せばよい. $0 \le k \le k'_0 - 1$ として事象 $\mathcal{C}_{z,k}$ 上で考えると,

$$x_k(\omega) \in C_z(T_k, \omega) \cap \partial_{d,+} T_k, \qquad y_k(\omega) \in C_z(T_k, \omega) \cap \partial_{d,+} T_k$$

のそれぞれを $\mathscr{G}_{T_k}$-可測であるように選べる. さらに,

$$\begin{aligned}
&x'_k(\omega) \in S_{k+1}, \quad x'_k(\omega) \sim x_k(\omega), \qquad b^{(1)}_k(\omega) = \{x_k(\omega), x'_k(\omega)\} \\
&y'_k(\omega) \in S_{k+1}, \quad y'_k(\omega) \sim y_k(\omega), \qquad b^{(2)}_k(\omega) = \{y_k(\omega), y'_k(\omega)\}
\end{aligned}$$

とすると, (5.18) と FKG 不等式より

$$
\begin{aligned}
&\phi\left(\mathcal{C}_{(x,y),k} \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \\
&\le 1 - \phi\left(y \in C_x(T_{k+1}) \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \\
&\le 1 - \phi^{p,q}_{N,f}\left(y \in C_x(T_{k+1}) \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \\
&\le 1 - \phi^{p,q}_{N,f}\left(\omega_{b^{(1)}_k} = 1,\ \omega_{b^{(2)}_k} = 1 \mid \mathscr{G}_{T_k}\right)\phi^{p,q}_{N,f}\left(y'_k \in C_{x'_k}(T_{k+1}) \mid \mathscr{G}_{T_k}\right) \\
&\le 1 - \widetilde{p}^2\delta
\end{aligned}
$$

が成り立つので, (5.24) を得る. ただし, 最後の不等号では

$$
\phi^{p,q}_{N,f}\left(y'_k \in C_{x'_k}(T_{k+1}) \mid \mathscr{G}_{T_k}\right)\Bigg|_{\substack{x'_k(\omega)=x'_k \\ y'_k(\omega)=y'_k}} \ge \phi^{p,q}_{T_{k+1},f}\left(y'_k \longleftrightarrow x'_k\right)
$$

を用いた. □

証明 (定理 5.8). (5.12) は, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し事象 Λ_Nを横断しない の単調減少性より

$$
\forall\phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p, q, N), \qquad \phi(\Lambda_N\text{を横断しない}) \le \phi^{p,q}_{N,f}(\Lambda_N\text{を横断しない})
$$

となることに注意すると, (5.16) と $g(N) = N - 1$ とした (5.17) より従う.

(5.13) を示す. $g \in G_\kappa$ とする ($\kappa > 0$ は最後に決める). 明らかに,

$$
\mathcal{R}^g(N)^c \subset \mathcal{U}(N)^c \cup \left(\bigcup_{i=1}^d \mathcal{A}^g_i(N)^c\right)
$$

であるので, (5.12), (5.17) より $\kappa > \kappa_0$ ならば

$$
\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{g(N)} \log\left(\sup_{\phi\in\mathscr{R}(\succeq^s,p,q,N)} \phi\left(\mathcal{R}^g(N)^c\right)\right) < 0 \tag{5.25}
$$

が成り立つ. ただし, $\kappa > \kappa_0$ は補題 5.10 で定まるものである. $\phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p, q, N)$ とすると, FKG 不等式と (5.16) より, ある $c, C \in (0, \infty)$ が存在して任意の $N \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathbb{B}(g(N))$ ($Q \subset \Lambda_N$) に対し

$$
\begin{aligned}
\phi\left(Q\text{ を横断するクラスター }C(Q)\text{ は存在しない}\right) &\le \phi^{p,q}_{Q,f}\left(Q\text{ を横断しない}\right) \\
&\le Ce^{-cg(N)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 従って,

$$
\begin{aligned}
\phi\left(\mathcal{O}^g(N)^c\right) &\le \phi\left(\mathcal{R}^g(N)^c\right) \\
&\quad + \binom{|\Lambda_N|}{2} \sup_{\substack{Q\in\mathbb{B}(g(N)) \\ Q\subset\Lambda_N}} \phi\left(Q\text{ を横断するクラスター }C(Q)\text{ は存在しない}\right) \\
&\le \phi\left(\mathcal{R}^g(N)^c\right) + CN^{2d}e^{-cg(N)}
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

が成り立つ. $\kappa > \max\{\kappa_0, 2d/c\}$ ならば

$$
\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{g(N)} \log\left(N^{2d}e^{-cg(N)}\right) \le 2d \limsup_{N\to\infty} \frac{\log N}{\log g(N)} - c \le \frac{2d}{\kappa} - c < 0
$$

となるので, (5.25), (5.26) より (5.13) を得る. □

5.3 パーコレーション確率 θ^f

この小節では $d \geq 3$ として, (5.7) の f-境界条件版である定理 5.11 について述べる．この定理も [P96] において提案され, 補題 5.10 と同様にして示された.

定理 5.11. $d \geq 3$ として, 任意に $p > \hat{p}_c(q,d)$ を取る．この時,

$$\lim_{N\to\infty} \phi^{p,q}_{N,f}(O \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_N) = \theta^f(p,q) \tag{5.27}$$

が成り立つ.

証明. $p > \hat{p}_c(q,d)$ として, $n, N \in \mathbb{N}$ を $n < N$ となるように取る．さらに, $\delta > 0$, $L \in \mathbb{N}$ を (5.19) で定められたものとし $n > L$ とする．この時, 補題 5.10 の証明と同様にすると

$$\sup_{\phi\in\mathscr{R}(\succeq^s,p,q,N)} \phi(O \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_n,\ O \not\longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_N) \leq 2d\,(1-\widetilde{p}\delta)^{\frac{n}{L}-1} \tag{5.28}$$

を得る．従って, $\phi = \phi^{p,q}_{N,f}$ として FKG 不等式を用いると

$$\begin{aligned}
\phi^{p,q}_f(O \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_n) &\geq \limsup_{N\to\infty} \phi^{p,q}_{N,f}(O \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_N) \\
&\geq \liminf_{N\to\infty} \phi^{p,q}_{N,f}(O \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_N) \\
&\geq \phi^{p,q}_f(O \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_n) - 2d\,(1-\widetilde{p}\delta)^{\frac{n}{L}-1}
\end{aligned}$$

となるので, $n \to \infty$ として (5.27) を得る． □

5.4 粗視化 (Pisztora's coarse graining)

この小節では, [P96] において提案された FK パーコレーションにおける粗視化について述べる．スケール $k \in \mathbb{N}$ に対する粗視化における $\mathbb{Z}^d$ を取っていることを明示する時には, $\underline{x}_k \in \mathbb{Z}$, $\underline{\Lambda}_k \subset \mathbb{Z}^d$ 等のような記号を用いる．スケールを任意に固定した時や明示する必要のない時には, $\underline{x} \in \mathbb{Z}$, $\underline{\Lambda} \subset \mathbb{Z}^d$ 等のような記号を用いる．本稿で言う粗視化とは概略的に, $\widetilde{\Omega}_N$ 上の良い事象 $\mathcal{G}$ を取り, 各 $\underline{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathcal{G}$ に対応する $\widetilde{\Omega}_{(L\underline{x}+\Lambda_L)}$ 上の事象 $\mathcal{G}_{\underline{x}}$ を定め $X_{\underline{x}} = 1_{\mathcal{G}_{\underline{x}}}$ とし, 模型 $(X_{\underline{x}})_{\underline{x}\in\mathbb{Z}^d}$ をベルヌーイ・サイト・パーコレーションとの比較によって解析することである．ただし, $L, N \in \mathbb{N}$ は $L \leq N$ をみたすとし, 良い事象とは確率が 1 に近い事象を意味する．粗視化には, 事象 $\mathcal{U}(N)$, $\mathcal{R}^g(N)$, $\mathcal{O}^g(N)$, $\mathcal{A}^g_i(N)$ $(N \in \mathbb{N},\ g \in G\ 1 \leq i \leq d)$ の他に, 各 $\delta > 0$ に対し

$$\mathcal{V}^\delta(N) = \mathcal{U}(N) \cap \left\{|\Lambda_N|^{-1}|C^*| \in (\theta^f - \delta, \theta^w + \delta)\right\}$$

として定める $\mathcal{V}^\delta(N)$ も用いる． ただし, $p \in [0,1]$, $q \geq 1$ が与えられる毎に $\theta^w = \theta^w(p,q)$, $\theta^f = \theta^f(p,q)$ である．それ故, $\mathcal{V}^\delta(N)^c$ に対して定理 5.8 と同様の評価が必要となるが, その時にも $\mathcal{R}^g(N)$, $\mathcal{A}^g_i(N)$ 等を用いた粗視化を導入する．粗視化を用いる時の利便性のために, 各 $K \in \mathbb{N}$ に対し Δ_K を $\Delta_K = \{-K, \ldots, K\}^d$ と定める．また, 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\Lambda(x) = x + \Lambda, \qquad nx = (nx_1, \ldots, nx_d) \quad (x = (x_1, \ldots, x_d))$$

と定める.

まず $\{|C^*| \geq (\theta^w+\delta)|\Lambda_N|\}$ の確率を評価する．ここで，

$$\partial\mathbb{C}(N) = \{C : C \text{ は } \Lambda_N \text{ 内のクラスターであって } C \cap \partial_{in}\Lambda_N \neq \emptyset \text{ である}\}$$

とすると，$C^* \cap \partial_{in}\Lambda_N \neq \emptyset$ より明らかに $C^* \in \partial\mathbb{C}(N)$ であるので，

$$\{|C^*| \geq (\theta^w+\delta)|\Lambda_N|\} \subset \left\{ \sum_{C\in\partial\mathbb{C}(N)} |C| \geq (\theta^w+\delta)|\Lambda_N| \right\}$$

が成り立つ．

補題 5.12. $d \geq 2$ として，任意に $p \in [0,1]$ を取る．この時，任意の $\delta > 0$ に対し

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \log \left(\sup_{\phi\in\mathscr{R}(\succeq^s,p,q,N)} \phi\left(\sum_{C\in\partial\mathbb{C}(N)} |C| \geq (\theta^w+\delta)|\Lambda_N| \right)\right) < 0 \tag{5.29}$$

が成り立つ．

証明．$p \in \{0,1\}$ の場合は明らかなので $p \in (0,1)$ とし，$\delta > 0$ とする．主張に現れる事象が単調増加なので，

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \log \left(\phi^{p,q}_{N,w}\left(\sum_{C\in\partial\mathbb{C}(N)} |C(N)| \geq (\theta^w+\delta)|\Lambda_N| \right)\right) < 0 \tag{5.30}$$

を示せば (5.29) を得る．任意に $n \in \mathbb{N}$ を取り，$k, N \in \mathbb{N}$ は $(2k+1)n \leq N < (2k+3)n$ をみたすとする．各 $\underline{x} \in \Delta_k$ に対し

$$Y_{\underline{x}} = |\{y \in \Lambda_n(n\underline{x}) : \Lambda_n(n\underline{x}) \text{ 内で } y \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_n(n\underline{x})\}|$$

と定める．この時，$\{\Lambda_n(n\underline{x}); \underline{x} \in \Delta_k\}$ は $\Lambda_{(2k+1)n}$ の分割となるので，十分大きな k に対し

$$\frac{1}{|\Lambda_N|} \sum_{C\in\partial\mathbb{C}(N)} |C| < \frac{1}{|\Lambda_N|} \sum_{\underline{x}\in\Delta_k} Y_{\underline{x}} + \frac{\delta}{2}$$

が成り立つ．従って，

$$\mathcal{I} = \bigcap_{\underline{x}\in\Delta_k} \mathcal{I}_{\underline{x}}, \qquad \mathcal{I}_{\underline{x}} = \left\{\omega_e = 1 \ (\forall e \in \mathbb{E}_{\partial_{in}\Lambda_n(n\underline{x})})\right\} \quad (\underline{x} \in \Delta_k)$$

とすると，FKG 不等式より

$$\phi^{p,q}_{N,w}\left(\sum_{C\in\partial\mathbb{C}(N)} |C| \geq (\theta^w+\delta)|\Lambda_N| \right) \leq \phi^{p,q}_{N,w}\left(\frac{1}{|\Lambda_N|} \sum_{\underline{x}\in\Delta_k} Y_{\underline{x}} > \theta^w + \frac{\delta}{2} \;\middle|\; \mathcal{I} \right) \tag{5.31}$$

を得る．従って，補題 5.3 より $\{Y_{\underline{x}}\}_{\underline{x}\in\Delta_k}$ が $\phi^{p,q}_{N,w}(\cdot \mid \mathcal{I})$ の下で独立同分布となることに注意すると，

$$\limsup_{n\to\infty} \phi^{p,q}_{n,w}\left[|\Lambda_n|^{-1} Y_{\underline{O}} \mid \mathcal{I}_{\underline{O}}\right] \leq \theta^w \tag{5.32}$$

を示せば, (5.31) とクラメール (Cramér) の定理より (5.30) を得る．しかるに,

$$Q_n = \{x \in \Lambda_n : d_\infty(x, \partial_{in}\Lambda_n) \geq \sqrt{n}/2\}$$

とすると, (5.3) と定理 5.2 より

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \phi^{p,q}_{n,w}\left[|\Lambda_n|^{-1} Y_{\underline{O}} \mid \mathcal{I}_{\underline{O}}\right] &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{x \in Q_n} \phi^{p,q}_{n,w}\left(x \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_n \mid \mathcal{I}_{\underline{O}}\right) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{x \in Q_n} \phi^{p,q}_{\Lambda_{\sqrt{n}}(x),w}\left(x \longleftrightarrow \partial_{in}\Lambda_{\sqrt{n}}(x)\right) \\
&= \theta^w
\end{aligned}$$

となるので, (5.32) を得る． □

注意 5.13. $\phi^{p,q}_{n,w}$ の定義と $Y_{\underline{O}}$ の $\mathscr{G}^{\mathbb{E}_{\partial_{in}\Lambda_n}}_n$-可測性より, (5.32) において

$$\phi^{p,q}_{n,w}\left[|\Lambda_n|^{-1} Y_{\underline{O}} \mid \mathcal{I}_{\underline{O}}\right] = \phi^{p,q}_{n,w}\left[|\Lambda_n|^{-1} Y_{\underline{O}}\right]$$

が成り立つ．また, $\phi^{p,q}_{n,w}(\cdot \mid \mathcal{I}_{\underline{O}})$ を $\mathbb{E}_{n-1} \cup \{\{x,y\} : x \in \Lambda_{n-1},\ y \in \partial_{ex}\Lambda_{n-1}\}$ 上の w-境界条件を持つランダム・クラスター測度と定めてもよい．

粗視化した模型の比較対象となるベルヌーイ・サイト・パーコレーションについて概略的にではあるが述べておく．注意 5.1 で述べたように, ベルヌーイ・ボンド・パーコレーションとは, $q=1$ の場合のランダム・クラスター測度 $\phi^{p,1}_\Lambda$ ($\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $p \in [0,1]$) を扱うことであるが, このことはすなわち, $\widetilde{\Omega}_\Lambda$ 上の同一分布から成る $\mathbb{E}_\Lambda$-直積測度の下でクラスターや横断等の概念を扱うことを意味している．ただし, 記号から境界条件を省いた．同様に (Λ 上の) ベルヌーイ・サイト・パーコレーションとは, $\{0,1\}^\Lambda$ 上の同一分布から成る Λ-直積測度

$$\phi^{p,\mathrm{s}}_\Lambda(\eta) = \prod_{x \in \Lambda} p^{\eta_x}(1-p)^{1-\eta_x} \quad ((\eta_x)_{x\in\Lambda} \in \{0,1\}^\Lambda)$$

の下でクラスターや横断等の概念を扱うことである．ただし, $p \in [0,1]$ とし $\eta = (\eta_x)_{x\in\Lambda}$ とする．ここで, (η における)Λ 内のクラスターとは $(\{x \in \Lambda : \eta_x = 1\}, \{\{x,y\} \in \mathbb{E}_\Lambda : \eta_x = \eta_y = 1\})$ の各連結成分であって, 例えば横断の概念は定義 5.7 と同様に定める．その他, 記号等も同様に定める．このベルヌーイ・サイト・パーコレーションにおける横断クラスターに対して, [DP96] により次の定理 5.14 が知られている．

定理 5.14. $d \geq 2$ とする．任意の $\delta \in (0, 1/2)$ に対しある $p_0 = p_0(d,\delta) \in (0,1)$ が存在して,

$$\forall p > p_0 \qquad \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k^{d-1}} \log \phi^{p,\mathrm{s}}_{\Delta_k}\left(\left\{\begin{array}{c} \text{横断クラスター } C^{*,\mathrm{s}} \text{ が唯一存在して} \\ |C^{*,\mathrm{s}}| \geq (1-\delta)|\Delta_k| \text{ をみたす} \end{array}\right\}^c\right) < 0$$

が成り立つ．ただし, $\Delta_k = \{-k, \ldots, k\}^d$ である．

証明は省略し注意のみを述べておく．これまでと異なり Λ_N ではなく Δ_k を後の都合の為に用いたが, どちらを用いても本質的に違いはない．$\epsilon = w$ もしくは f に対し $\theta^\epsilon(p,q) \nearrow 1$ ($p \nearrow 1$) であることより, $\phi(\mathcal{V}^\delta(N)^c)(\delta > 0,\ \phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p, q, N))$ を上から評価する為に, 十分 1 に近い p に対するそのベルヌーイ・サイト・パーコレーション版の評価を用いようとしていることになる．このことが少

し奇妙に感じられる方のために, パイエルス型議論を用いると $p=1$ もしくは 0 からの摂動的評価が可能なことを注意しておく. $\delta \in (0,1/2)$ より, $|C^{\mathrm{s}}| \geq (1-\delta)|\Lambda_N|$ をみたすクラスターは存在すれば唯一である. $\mathbb{Z}^d$ における唯一の無限連結成分である無限クラスター $C^{\mathrm{s}}(\infty)$ の Λ_N 内における密度 $|C^{\mathrm{s}}(\infty) \cap \Lambda_N|/|\Lambda_N|$ は, $N \to \infty$ とするとパーコレーション確率 $\theta^{\mathrm{s}}(p)$ に概収束するので 1 に近い. さらに, Λ_N 内のクラスター $C^{*,\mathrm{s}}$ は概ね $C^{\mathrm{s}}(\infty) \cap \Lambda_N$ と一致すると考えてもよい. 減少オーダーの冪 $(d-1)/d$ が現れる背景は, $|C^{*,\mathrm{s}}|$ と $|\partial_{ex} C^{*,\mathrm{s}} \cap \Lambda_N|$ の対数比である. ある $\gamma \in (0,1-\delta)$ に対して $|C^{*,\mathrm{s}}| = \gamma N^d$ とすると, 等周不等式よりある $c(\gamma) > 0$ が存在して $|\partial_{ex} C^{*,\mathrm{s}} \cap \Lambda_N| \geq c(\gamma) N^{(d-1)/d}$ となる. この時, $x \in \partial_{ex} C^{*,\mathrm{s}} \cap \Lambda_N$ ならば $\omega_x = 0$ であることより, $\partial_{ex} C^{*,\mathrm{s}} \cap \Lambda_N$ が $*$-連結性と呼ばれる連結性を持つ場合は, $\phi^{1-p,\mathrm{s}}$ の下で $c(\gamma) N^{(d-1)/d}$ 以上の頂点数を持つ $*$-クラスターが現れていることになるが, この確率が $N^{(d-1)/d}$ のオーダーで指数減衰するのである. 残念ながら一般には, $\partial_{ex} C^{*,\mathrm{s}} \cap \Lambda_N$ が複数の $*$-連結成分を持つ為に, 更なる議論が必要となる. このような背景から, 定理 5.14 の証明には次の命題 5.15(証明省略) が $\alpha = (d-1)/d$ として用いられている.

命題 5.15. $\mathcal{P}$ を確率測度とし, 独立同分布である非負値確率変数列 $(R_i)_{i \geq 1}$ は

$$\forall r \in (0,\infty), \qquad \mathcal{P}(R_1 > r) \leq \exp(-c r^{\alpha})$$

をみたすとする. ただし, $\alpha \in (0,1)$, $c \in (0,\infty)$ である. この時, 任意の $r > \mathcal{P}[R_1]$ に対し

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \log \mathcal{P}\left(\frac{1}{n}(R_1 + \cdots R_n) > r\right) \leq -c(r - \mathcal{P}[R_1])$$

が成り立つ.

ここでは任意に $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ を取り, 各スケール $n \in \mathbb{N}$ に対し粗視化 $(X_{\underline{x}})_{\underline{x} \in \Delta} = (X_{\underline{x}}^{\Delta,n})_{\underline{x} \in \Delta}$ を次のように定める. 各 $\underline{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$\mathcal{R}_{\underline{x}}^{\sqrt{n}/2}(n) = \mathcal{U}_{\underline{x}}(n) \cap \left\{ \begin{array}{c} C^*(\Lambda_n(n\underline{x}))\text{ 以外には, } \mathrm{diam}_{\infty}\big(C(\Lambda_n(n\underline{x}))\big) \geq \sqrt{n}/2 \text{ をみたす} \\ \Lambda_n(n\underline{x})\text{ 上のクラスター } C(\Lambda_n(n\underline{x}))\text{ は存在しない} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_{\underline{x}}(n) = \{\Lambda_n(n\underline{x})\text{ を横断する } \Lambda_n(n\underline{x})\text{ 内のクラスター } C^*(\Lambda_n(n\underline{x}))\text{ が唯一存在する}\}$$

と定める. ただし, 各 $x \in \mathbb{Z}^d$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\Lambda(x) = x + \Lambda$ である. 各 $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{Z}^d$ を $\underline{x} \sim \underline{y}$, $\underline{y}_i - \underline{x}_i = 1$ をみたすように取る. すなわち, $\underline{y}$ の第 i-座標の値だけが $\underline{x}$ のものより 1 だけ大きいとする. $n\underline{x}$ と $n\underline{y}$ を両端点とする線分と $\partial_{in}\Lambda_n(n\underline{x})$ との交わりを $m_{\underline{x},\underline{y}}$ とする. 事象 $\mathcal{K}_{\underline{x},\underline{y}}(n), \mathcal{K}_{\underline{y},\underline{x}}(n)$ を

$$\mathcal{K}_{\underline{x},\underline{y}}(n) = \mathcal{K}_{\underline{y},\underline{x}}(n) = \Big\{\Lambda_{n/4}(m_{\underline{x},\underline{y}})\text{ を } i\text{-横断する}\Big\}$$

と定め, 各 $\underline{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathcal{K}_{\underline{x}}(n)$

$$\mathcal{K}_{\underline{x}}(n) = \bigcap_{\underline{y} \in \Delta; \underline{y} \sim \underline{x}} \mathcal{K}_{\underline{x},\underline{y}}(n)$$

と定める. この時, 各 $\underline{x} \in \Delta$ に対し $X_{\underline{x}}^{\Delta,n}$ を

$$X_{\underline{x}}(\omega) = X_{\underline{x}}^{\Delta,n}(\omega) = \begin{cases} 1 & \Big(\omega \in \mathcal{R}_{\underline{x}}^{\sqrt{n}/2}(n) \cap \mathcal{K}_{\underline{x}}(n)\Big), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{5.33}$$

と定める．ここで, $X_{\underline{x}} = X_{\underline{y}} = 1$ ($\underline{x} \sim \underline{y}$, $|\underline{x}_i - \underline{y}_i| = 1$) ならば, $\Lambda_n(n\underline{x}) \cup \Lambda_n(n\underline{y})$ を i-横断するクラスターが存在することに注意する．さらに, 定理 5.8(補題 5.10) より, ある $c \in (0,\infty)$ が存在して n を十分大きく取ると

$$\forall \phi \in \mathscr{R}(\succeq^s, p, q, \Lambda), \qquad \phi\left(X_{\underline{x}} = 1 \,\middle|\, (X_{\underline{y}} : \underline{y} \in \Delta,\ \underline{y} \not\sim \underline{x})\right) \geq 1 - \exp\left(-c\sqrt{n}\right) \tag{5.34}$$

が成り立つ．ただし, $\Lambda = \cup_{\underline{y}\in\Delta}\Lambda_n(n\underline{y})$ である．定理 5.14 と (5.33) より定まる粗視化を用いて次の定理 5.16 を示す．

定理 5.16. $d \geq 3$ として, 任意に $p > \hat{p}_c(q,d)$ を取る．この時, 任意の $\delta > 0$ に対し

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{N} \log\left(\sup_{\phi\in\mathscr{R}(\succeq^s,p,q,N)} \phi\left(\mathcal{V}^\delta(N)^c\right)\right) < 0 \tag{5.35}$$

が成り立つ．

証明. $p > \hat{p}_c(q,d)$ とし $\delta \in (0,1)$ とする．定理 5.8 と補題 5.12 より

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{N} \log\left(\sup_{\phi\in\mathscr{R}(\succeq^s,p,q,N)} \phi\left(\mathcal{U}(N) \cap \{|C^*| \leq (\theta^f - \delta)|\Lambda_N|\}\right)\right) < 0 \tag{5.36}$$

を示せば (5.35) を得る．任意に $k, n \in \mathbb{N}$ を取り, 表記上の簡単の為に $N = (2k+1)n$ とする．粗視化 $(X_{\underline{x}})_{\underline{x}\in\Delta_k}$ で定まる事象 $\mathcal{C}(N)$ を

$$\mathcal{C}(N) = \left\{ \begin{array}{c} (X_{\underline{x}})_{\underline{x}\in\Delta_k} \text{ の意味で, } \Delta_k \text{ を横断するクラスター } \underline{C}^* \text{ が} \\ \text{唯一存在して } |\underline{C}^*| \geq (1-(\delta/2))|\Delta_k| \text{ をみたす} \end{array} \right\}$$

と定めると, 定理 4.3 と定理 5.14 より十分大きな n に対し

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{N} \log\left(\sup_{\phi\in\mathscr{R}(\succeq^s,p,q,N)} \phi\left(\mathcal{C}(N)^c\right)\right) < 0 \tag{5.37}$$

が成り立つ．各 $\underline{x} \in \Delta_k$ に対し

$$Y_{\underline{x}} = \sum_{C\in\mathbb{C}(\Lambda_n(n\underline{x}))} |C|,$$

$$\mathbb{C}(\Lambda_n(n\underline{x})) = \{C : C \text{ は } \Lambda_n(n\underline{x}) \text{ 内のクラスターであって } \mathrm{diam}_\infty(C) \geq \sqrt{n}/2 \text{ をみたす}\}$$

とする．定義より, $\underline{x} \in \underline{C}^*$ ならば $Y_{\underline{x}} = |C^*(\Lambda_n(n\underline{x}))|$ である．事象 $\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{C}(N)$ 上では,

$$\bigcup_{\underline{x}\in\underline{C}^*} C^*(\Lambda_n(n\underline{x})) \subset C^*(\Lambda_N)$$

となるので,

$$|C^*(\Lambda_N)| \geq \sum_{\underline{x}\in\underline{C}^*} Y_{\underline{x}} \geq \sum_{\underline{x}\in\Delta_k} Y_{\underline{x}} - \frac{\delta}{2}|\Lambda_N|$$

となる．従って,

$$\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{C}(N) \cap \{|C^*(\Lambda_N)| \leq (\theta^f - \delta)|\Lambda_N|\} \subset \left\{ \frac{1}{|\Lambda_N|} \sum_{\underline{x}\in\Delta_k} Y_{\underline{x}} \leq \theta^f - \frac{\delta}{2} \right\} \tag{5.38}$$

が成り立つ．ここで, 事象 $\left\{|\Lambda_N|^{-1}\sum_{\underline{x}\in\Delta_k} Y_{\underline{x}} \le \theta^f - (\delta/2)\right\}$ が単調減少であることに注意すると, (5.37), (5.38) と FKG 不等式より

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{N}\log\phi^{p,q}_{N,f}\left(\frac{1}{|\Lambda_N|}\sum_{\underline{x}\in\Delta_k} Y_{\underline{x}} \le \theta^f - \frac{\delta}{2}\;\middle|\;\mathcal{D}\right) < 0 \tag{5.39}$$

を示せば (5.36) を得る．ただし, 事象 $\mathcal{D}$ は

$$\mathcal{D} = \{\omega_e = 0\ (\forall e\in E)\}, \qquad E = \mathbb{E}_N \setminus \bigcup_{\underline{x}\in\Delta_k}\mathbb{E}_{\Lambda_n(n\underline{x})}$$

として定まる単調減少事象である．しかるに, 補題 5.3 より $\{Y_{\underline{x}}\}_{\underline{x}\in\Delta_k}$ は $\phi^{p,q}_{N,w}(\cdot\mid\mathcal{D})$ の下で独立同分布であって, FKG 不等式より

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_n|}\phi^{p,q}_{N,f}\left[Y_{\underline{O}}\mid\mathcal{D}\right] &= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_n|}\phi^{p,q}_{n,f}\left[Y_{\underline{O}}\right]\\
&= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{x\in Q_n}\phi^{p,q}_{n,f}\left(\mathrm{diam}_\infty(C_x)\ge\sqrt{n}/2\right)\\
&\ge \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{x\in Q_n}\phi^{p,q}_{\Lambda_{\sqrt{n}}(x),f}\left(x\longleftrightarrow\partial_{in}\Lambda_{\sqrt{n}}(x)\right)\\
&\ge \theta^f
\end{aligned}$$

が成り立つので, クラメールの定理より (5.30) を得る．ただし,

$$Q_n = \{x\in\Lambda_n : \mathrm{diam}_\infty(x,\partial_{in}\Lambda_n)\ge\sqrt{n}/2\}$$

である． □

6　FK 展開と表面張力

6.1　FK 展開

この小節では $q=2$ として, 外部磁場を持たないイジング模型と FK パーコレーションとの FK 展開に由来する関連について述べる．FK 展開は, $q\in\mathbb{N}$ に対応するポッツ模型や外部磁場を持つイジング模型の場合はもちろん, その他の一般的な模型に応用可能な手法である．まず, +-境界条件をはじめとする境界条件を持つイジング模型との素直な対応を得るため, ランダム・クラスター測度 $\phi^{p,q}_{\Lambda,\bar{\omega}}$ の定義に本質を変更することなく修正を加え, 新たな**ランダム・クラスター測度** $\Phi^{p,q}_{\Lambda,\pi}$ を定める．次小節以後の議論においても $\Phi^{p,q}_{\Lambda,\pi}$ を用いる方が便利である．また, $\Phi^{p,q}_{\Lambda,\pi}$ は [P96] で用いられているものとも異なることに注意する．

定義 6.1. 各 $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ に対し $\pi(\Lambda)\subset\partial_{ex}\Lambda$ を定める写像 $\pi:\mathbb{Z}^d\supset\Lambda\mapsto\pi(\Lambda)\subset\partial_{ex}\Lambda$ の全体を Π と表す．$\pi\in\Pi$ を任意に取る．この π に対して, $\mathbb{E}^\pi_\Lambda = \mathbb{E}_\Lambda\cup\{\{x,y\}\in\mathbb{E}^d : x\in\Lambda, y\in\pi(\Lambda)\}$ とし, $\widehat{\Omega}^\pi_\Lambda = \{0,1\}^{\mathbb{E}^\pi_\Lambda}$ と定める．また, $\Lambda^\pi = \Lambda\cup\pi(\Lambda)$ とする．各 $\omega\in\widehat{\Omega}^\pi_\Lambda$ に対して, $(\Lambda^\pi, \{e\in\mathbb{E}^\pi_\Lambda : \omega_e = 1\})$ の各連結成分を (ωにおける)Λ^π 上の (π-) クラスターと呼ぶ．$\widehat{\Omega}^\pi_\Lambda$ 上の関数 $k_{\Lambda,\pi}$ を

$$k_{\Lambda,\pi}(\omega) = \sharp\{C : C \text{ は } \Lambda^\pi \text{ 上の } \pi\text{-クラスターであって } C\cap\pi(\Lambda)=\emptyset \text{ である }\} \quad (\omega\in\widehat{\Omega}^\pi_\Lambda)$$

と定める．すなわち，$k_{\Lambda,\pi}$ は $\pi(\Lambda)$ と共通部分を持たない Λ^π 上の π-クラスターの個数である．各 $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $p \in [0,1]$, $q \in (0,\infty)$ に対し $\widehat{\Omega}^\pi_\Lambda$ 上の確率測度 $\Phi^{p,q}_{\Lambda,\pi}$ を

$$\Phi^{p,q}_{\Lambda,\pi}(\omega) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\pi}(p,q)} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}^\pi_\Lambda} p^{\omega_e}(1-p)^{1-\omega_e} \right) q^{k_{\Lambda,\pi}(\omega)} \quad (\omega \in \widehat{\Omega}^\pi_\Lambda)$$

で与える．ただし，$Z_{\Lambda,\pi}(p,q)$ は正規化定数である．また，$(w) \in \Pi$ を

$$(w)(\Lambda) = \partial_{ex}\Lambda \quad (\Lambda \subset \mathbb{Z}^d)$$

として定める．各 $N \in \mathbb{N}$ に対して，Λ_N と添字付けるべき場合には略して N と添字付ける．

各 $\beta > 0$ に対し $p_\beta = 1 - \exp(-2\beta)$ と定める．$\{\pm 1\}$ 上の関数 δ. を

$$\delta_{+1} = 1, \qquad \delta_{-1} = 0$$

と定める．各 $\sigma \in \Omega$, $e = \{x,y\}$ $(x,y \in \mathbb{Z}^d)$ に対し $\sigma(e) = \sigma_x\sigma_y$ と表す．各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し

$$\mathscr{O}_\Lambda(\omega) = \{e \in \mathbb{E}_\Lambda : \omega_e = 1\} \quad (\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda)$$

と定める．

外部磁場 h を $h=0$ として記号から h を省略する．導入の簡単の為に，まず自由境界条件の下でのイジング模型を考える．この時，以下の **FK 展開**によって正規化定数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}_\Lambda(\beta) &= \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in \mathbb{E}_\Lambda} \sigma_x\sigma_y \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \prod_{\{x,y\} \in \mathbb{E}_\Lambda} \left(e^{-\beta} + (e^\beta - e^{-\beta})\delta_{\sigma_x\sigma_y} \right) \\
&= e^{\beta|\mathbb{E}_\Lambda|} \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sum_{\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_\Lambda} p_\beta^{\omega_e}(1-p_\beta)^{1-\omega_e} \right) \prod_{e \in \mathscr{O}_\Lambda(\omega)} \delta_{\sigma(e)} \\
&= e^{\beta|\mathbb{E}_\Lambda|} \sum_{\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_\Lambda} p_\beta^{\omega_e}(1-p_\beta)^{1-\omega_e} \right) 2^{k_{\Lambda,f}(\omega)}
\end{aligned}$$

となる．ここで，各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\sigma \in \Omega_\Lambda$ に対し

$$\mathscr{O}_\Lambda(\sigma) = \{\{x,y\} \in \mathbb{E}_\Lambda : \sigma_x = \sigma_y\}$$

と定めると，

$$\prod_{e \in \mathscr{O}_\Lambda(\omega)} \delta_{\sigma(e)} = 1_{\{\mathscr{O}_\Lambda(\omega) \subset \mathscr{O}_\Lambda(\sigma)\}} \quad (\forall(\sigma,\omega) \in \Omega_\Lambda \times \widetilde{\Omega}_\Lambda)$$

となるので，任意の $\sigma \in \Omega_\Lambda$ に対し

$$\begin{aligned}
\mu^\beta_\Lambda(\sigma) &= \frac{1}{\mathrm{Z}_{\Lambda,f}(p_\beta, 2)} \sum_{\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda} 1_{\{\mathscr{O}_\Lambda(\omega) \subset \mathscr{O}_\Lambda(\sigma)\}} \prod_{e \in \mathbb{E}_\Lambda} p_\beta^{\omega_e}(1-p_\beta)^{1-\omega_e} \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}_\Lambda} 2^{-k_{\Lambda,f}(\omega)} 1_{\{\mathscr{O}_\Lambda(\omega) \subset \mathscr{O}_\Lambda(\sigma)\}} \, d\phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,f}(\omega)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

次に $+$-境界条件を持つ Λ_N 上のイジング模型を考える. 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\pi \in \Pi$ に対し

$$\mathscr{O}_\Lambda^\pi(\omega) = \{e \in \mathbb{E}_\Lambda^\pi : \omega_e = 1\} \quad (\omega \in \widetilde{\Omega}_\Lambda^\pi),$$
$$\mathscr{O}_\Lambda^\pi(\sigma) = \{\{x,y\} \in \mathbb{E}_\Lambda^\pi : \sigma_x = \sigma_y\} \quad (\sigma \in \Omega_\Lambda)$$

と定める. この時,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}_{N,+}(\beta) &= \sum_{\sigma \in \Omega_N^+} \exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in \mathbb{E}_N^{(w)}} \sigma_x \sigma_y\right) \\
&= e^{\beta |\mathbb{E}_N^{(w)}|} \sum_{\omega \in \widehat{\Omega}_N^{(w)}} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_N^{(w)}} p_\beta^{\omega_e} (1-p_\beta)^{1-\omega_e}\right) \sum_{\sigma \in \Omega_N^+} \prod_{e \in \mathscr{O}_N^{(w)}(\omega)} \delta_{\sigma(e)} \\
&= e^{\beta |\mathbb{E}_N^{(w)}|} \sum_{\omega \in \widehat{\Omega}_N^{(w)}} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_N^{(w)}} p_\beta^{\omega_e} (1-p_\beta)^{1-\omega_e}\right) 2^{k_{N,(w)}(\omega)}
\end{aligned}$$

となるので,

$$\mu_{N,+}^\beta(\sigma) = \int_{\widehat{\Omega}_N^{(w)}} 2^{-k_{N,(w)}(\omega)} 1_{\{\mathscr{O}_N^{(w)}(\omega) \subset \mathscr{O}_N^{(w)}(\sigma)\}} \, d\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\omega) \quad (\forall \sigma \in \Omega_N^+)$$

が成り立つ.

最後に境界条件 $\bar{\sigma} \in \Omega$ を持つ Λ_N 上のイジング模型を考える. $\omega \in \widehat{\Omega}_N^{(w)}$ 上の事象 $\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma})$ を

$$\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma}) = \{\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma},+) \not\leftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma},-)\},$$
$$\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma},+) = \{x \in \partial_{ex}\Lambda_N : \bar{\sigma}_x = +1\}, \quad \partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma},-) = \{x \in \partial_{ex}\Lambda_N : \bar{\sigma}_x = -1\}$$

と定める. この時,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}_{N,\bar{\sigma}}(\beta) &= \sum_{\sigma \in \Omega_N^{\bar{\sigma}}} \exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in \mathbb{E}_N^{(w)}} \sigma_x \sigma_y\right) \\
&= e^{\beta |\mathbb{E}_N^{(w)}|} \sum_{\omega \in \widehat{\Omega}_N^{(w)}} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_N^{(w)}} p_\beta^{\omega_e} (1-p_\beta)^{1-\omega_e}\right) \sum_{\sigma \in \Omega_N^{\bar{\sigma}}} \prod_{e \in \mathscr{O}_N^{(w)}(\omega)} \delta_{\sigma(e)} \\
&= e^{\beta |\mathbb{E}_N^{(w)}|} \sum_{\omega \in \widehat{\Omega}_N^{(w)}} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_N^{(w)}} p_\beta^{\omega_e} (1-p_\beta)^{1-\omega_e}\right) 2^{k_{N,(w)}(\omega)} 1_{\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma})}(\omega)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\mu_{N,\bar{\sigma}}^\beta(\sigma) = \int_{\widehat{\Omega}_N^{(w)}} 2^{-k_{N,(w)}(\omega)} 1_{\{\mathscr{O}_N^{(w)}(\omega) \subset \mathscr{O}_N^{(w)}(\sigma)\}} 1_{\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma})}(\omega) \, d\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\omega) \quad (\forall \sigma \in \Omega_N^{\bar{\sigma}})$$

が成り立つ. ここで, 境界条件を持つイジング模型に対する FK 展開をまとめておく.

定理 6.2. 任意に $\beta > 0$ を取り, $p_\beta = 1 - \exp(-2\beta)$ とする. この時, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $\bar{\sigma} \in \Omega$ に対し

$$\mu_{N,\bar{\sigma}}^{\beta}(\sigma) = \int_{\widehat{\Omega}_N^{(w)}} 2^{-k_{N,(w)}(\omega)} 1_{\{\mathscr{O}_N^{(w)}(\omega) \subset \mathscr{O}_N^{(w)}(\sigma)\}} 1_{\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma})}(\omega)\, d\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\omega) \quad (\forall \sigma \in \Omega_N^{\bar{\sigma}})$$

が成り立つ. ただし, 各 $\sigma, \bar{\sigma} \in \Omega$, $\omega \in \widehat{\Omega}_N^{(w)}$ に対し

$$\mathscr{O}_N^{(w)}(\sigma) = \{\{x,y\} \in \mathbb{E}_N^{(w)} : \sigma_x = \sigma_y\}, \qquad \mathscr{O}_N^{(w)}(\omega) = \{e \in \mathbb{E}_N^{(w)} : \omega_e = 1\},$$
$$\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma}, +) = \{x \in \partial_{ex}\Lambda_N : \bar{\sigma}_x = +1\}, \qquad \partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma}, -) = \{x \in \partial_{ex}\Lambda_N : \bar{\sigma}_x = -1\}$$

であって

$$\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma}) = \{\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma}, +) \not\longleftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma}, -)\} (\subset \widehat{\Omega}_N^{(w)})$$

である.

スピン配置とボンド配置を同時に考える為に, 次の定義 6.3 を導入する.

定義 6.3. 各 $\beta > 0$ に対し $p_\beta = 1 - \exp(-2\beta)$ とする. 各 $N \in \mathbb{N}$, $\bar{\sigma} \in \Omega$ に対して, $\Omega_N \times \widehat{\Omega}_N^{(w)}$ 上の確率測度 $\mathbb{P}_{N,\bar{\sigma}}^{\beta}$ を

$$\mathbb{P}_{N,\bar{\sigma}}^{\beta}(\sigma, \omega) = P_{N,\bar{\sigma}}^{\omega}(\sigma) \Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\omega) \quad ((\sigma, \omega) \in \Omega_N \times \widehat{\Omega}_N^{(w)}),$$
$$P_{N,\bar{\sigma}}^{\omega}(\sigma) = 2^{-k_{N,(w)}(\omega)} 1_{\{\mathscr{O}_N^{(w)}(\omega) \subset \mathscr{O}_N^{(w)}(\sigma)\}} 1_{\partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma})}(\omega) \quad (\sigma \in \Omega_N,\ \omega \in \widehat{\Omega}_N^{(w)})$$

と定める.

命題 6.4. 任意に $\beta > 0$ を取り $p_\beta = 1 - \exp(-2\beta)$ とし, 任意に $N \in \mathbb{N}$, $\bar{\sigma} \in \Omega$ を取る. この時, 任意の $\mathcal{S} \subset \Omega_N$, $\mathcal{B} \subset \widehat{\Omega}_N^{(w)}$ に対し

$$\mu_{N,\bar{\sigma}}^{\beta}(\mathcal{S}) = \mathbb{P}_{N,\bar{\sigma}}^{\beta}\left(\mathcal{S} \times \widehat{\Omega}_N^{(w)}\right) = \Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\omega)\left[P_{N,\bar{\sigma}}^{\cdot}(\mathcal{S})\right],$$
$$\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}_{N,\bar{\sigma}}^{\beta}\left(\Omega_N \times \mathcal{B}\right)$$

が成り立つ. さらに, 任意の $l \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i=1}^l \subset \Lambda_N$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^l \subset \{0,1\}^l$ に対して,

$$\omega \in \partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma}) \cap \{\{x_i\}_{i=1}^l \not\longleftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N\} \cap \bigcap_{1 \le i \ne j \le l} \{x_i \not\longleftrightarrow x_j\}$$

ならば

$$P_{N,\bar{\sigma}}^{\omega}(\sigma_{x_1} = \varepsilon_1, \ldots, \sigma_{x_l} = \varepsilon_l) = \left(\frac{1}{2}\right)^l$$

が成り立つ. 特に, 任意の $x \in \Lambda_N$ に対して, $\omega \in \partial_{ex}\Lambda_N(\bar{\sigma}) \cap \{x \not\longleftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N\}$ ならば

$$P_{N,\bar{\sigma}}^{\omega}(\sigma_x = +1) = P_{N,\bar{\sigma}}^{\omega}(\sigma_x = -1) = \frac{1}{2}$$

が成り立つ.

証明は省略する. 定理 6.2 もしくは命題 6.4 より, 例えば次の定理 6.5 が成り立つ.

定理 6.5. 任意に $\beta > 0$ を取り $p_\beta = 1 - \exp(-2\beta)$ とすると,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \mu^{\beta}_{N,+}[\sigma_O] = \Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}(O \longleftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N)$$

が成り立つ. 特に, (3.8), (5.7) に注意すると $m_\beta = \theta^w(p_\beta, 2)$ であるので,

$$\beta_c(d) = -\frac{1}{2}\log\left(1 - p_c(2,d)\right) \ \Leftrightarrow \ p_c(2,d) = 1 - \exp\left(-2\beta_c(d)\right)$$

が成り立つ.

証明. $N \in \mathbb{N}$ とすると命題 6.4 より

$$\begin{aligned}
\mu^{\beta}_{N,+}[\sigma_O] &= \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}(\sigma_O = +1) - \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}(\sigma_O = -1) \\
&= \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}(\sigma_O = +1,\ O \longleftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N) + \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}(\sigma_O = +1,\ O \not\longleftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N) \\
&\quad - \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}(\sigma_O = -1,\ O \not\longleftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N) \\
&= \Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}(O \longleftrightarrow \partial_{ex}\Lambda_N)
\end{aligned}$$

を得る. □

6.2 表面張力

まず表記の簡単の為に, 座標軸の方向を法線方向とする表面張力を考える. $\overrightarrow{e_d} = (0, \ldots, 0, 1)$ として, $\pm$ と表される (イジング模型の) 境界条件を

$$(\pm)_x = +1 \quad (x \cdot \overrightarrow{e_d} \geq 0), \qquad (\pm)_x = -1 \quad (x \cdot \overrightarrow{e_d} < 0)$$

と定める. ただし. 各 $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対し $x \cdot y$ は x と y の $\mathbb{R}^d$ における内積 $x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$ である. すなわち, $(\pm)_x = +1$ $(x_d \geq 0)$, $(\pm)_x = -1$ $(x_d < 0)$ である. 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\partial^+\Lambda,\ \partial^-\Lambda \subset \partial_{ex}\Lambda$ を

$$\partial^+\Lambda = \{x \in \partial_{ex}\Lambda : x \cdot \overrightarrow{e_d} \geq 0\}, \qquad \partial^-\Lambda = \{x \in \partial_{ex}\Lambda : x \cdot \overrightarrow{e_d} < 0\}$$

と定める. この時, 各 $\beta > 0$, $N \in \mathbb{N}$ に対し定理 6.2 より

$$-\frac{1}{N^{d-1}}\log\frac{\mathrm{Z}_{N,\pm}(\beta)}{\mathrm{Z}_{N,+}(\beta)} = -\frac{1}{N^{d-1}}\log\Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left(\partial^+\Lambda_N \not\longleftrightarrow \partial^-\Lambda_N\right) \tag{6.1}$$

が成り立つ. 任意に $k, L \in \mathbb{N}$ を取り, $N = (2k+1)L$, $\Delta'_k = \{-k, \ldots, k\}^{d-1} \times \{0\}$ とする. この時, $\{\Lambda_L(Lx)\}_{x \in \Delta'_k}$ が $\left((-N/2, N/2]^{d-1} \times (-L/2, L/2]\right) \cap \mathbb{Z}^d$ の分割となることと FKG 不等式より,

$$\begin{aligned}
\Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left(\partial^+\Lambda_N \not\longleftrightarrow \partial^-\Lambda_N\right) &\geq \Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left(\bigcap_{x \in \Delta'_k}\left\{\Lambda_L(Lx)\text{ 内で}\partial^+\Lambda_L(Lx) \not\longleftrightarrow \partial^-\Lambda_L(Lx)\right\}\right) \\
&\geq \prod_{x \in \Delta'_k}\Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_L(Lx),(w)}\left(\Lambda_L(Lx)\text{ 内で}\partial^+\Lambda_L(Lx) \not\longleftrightarrow \partial^-\Lambda_L(Lx)\right) \\
&= \Phi^{p_\beta,2}_{L,(w)}\left(\partial^+\Lambda_L \not\longleftrightarrow \partial^-\Lambda_L\right)^{(2k+1)^{d-1}}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

が成り立つ. 従って, 劣加法的数列の性質より (6.1) の極限が存在するので,

$$\tau_\beta(\overrightarrow{e_d}) = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\frac{Z_{N,\pm}(\beta)}{Z_{N,+}(\beta)} = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left(\partial^+\Lambda_N \longleftrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;| \;\;\partial^-\Lambda_N\right)$$

と定める. さらに, 各 $\lambda > 0$, $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\Lambda_N^\lambda = \Big((-N/2, N/2]^{d-1} \times (-(\lambda N)/2, (\lambda N)/2]\Big) \cap \mathbb{Z}^d$$

とすると (6.2) と同様にして,

$$\text{(6.3)} \qquad \forall\lambda > 0, \qquad \tau_\beta(\overrightarrow{e_d}) = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^\lambda,(w)}\Big(\partial^+\Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;| \;\;\partial^-\Lambda_N^\lambda\Big)$$

が成り立つ.

次に一般の $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ に対し, $\overrightarrow{n}$ を法線方向とする**表面張力** $\tau_\beta(\overrightarrow{n})$ を定める. $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ とする. $\tau_\beta(\overrightarrow{e_d})$ を定めた時と同様に, $\pm(\overrightarrow{n}) \in \Omega$ を

$$(\pm(\overrightarrow{n}))_x = +1 \quad (x\cdot\overrightarrow{n} \geq 0), \qquad (\pm(\overrightarrow{n}))_x = -1 \quad (x\cdot\overrightarrow{n} < 0)$$

と定め, 各 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\partial^{+,\overrightarrow{n}}\Lambda$, $\partial^{-,\overrightarrow{n}}\Lambda \subset \partial_{ex}\Lambda$ を

$$\partial^{+,\overrightarrow{n}}\Lambda = \{x \in \partial_{ex}\Lambda : x\cdot\overrightarrow{n} \geq 0\}, \qquad \partial^{-,\overrightarrow{n}}\Lambda = \{x \in \partial_{ex}\Lambda : x\cdot\overrightarrow{n} < 0\}$$

と定める. 各 $N \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (0,\infty)$ に対して, Λ_N^λ を $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$ が $\overrightarrow{n}$ に垂直となるように原点 O を中心に回転させたものを $\Lambda_N^\lambda(O;\overrightarrow{n})$ と表す. 混乱の恐れがない場合には, $\Lambda_N^\lambda(\overrightarrow{n}) = \Lambda_N^\lambda(O;\overrightarrow{n})$ と略記する. (6.3) と同様に, 各 $\beta > 0$ に対し

$$\text{(6.4)} \quad \forall\lambda > 0, \qquad \tau_\beta(\overrightarrow{n}) = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^\lambda(\overrightarrow{n}),(w)}\Big(\partial^{+,\overrightarrow{n}}\Lambda_N^\lambda(\overrightarrow{n}) \longleftrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;| \;\;\partial^{-,\overrightarrow{n}}\Lambda_N^\lambda(\overrightarrow{n})\Big)$$

として $\tau_\beta(\overrightarrow{n}) \in [0,\infty)$ を $\lambda > 0$ に依らずに定める.

定理 6.6. 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る. この時, τ_β を正一次同次的に拡張した ($\mathbb{R}^d$上の) 関数は凸であって,

$$\tau_\beta(\overrightarrow{n}) > 0 \quad (\forall\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1})$$

が成り立つ.

証明は省略する. τ_β の正一次同次拡張の凸性は [CP00, MMR92] によって示されている. この凸性と模型の対称性, および, $\tau_\beta(\overrightarrow{e_d}) > 0$ ($\beta > \beta_c(d)$) が [LP81] によって示されていることから, $\tau_\beta(\overrightarrow{n}) > 0$ ($\forall\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$) が従う ([CP00] 参照).

注意 6.7. $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ とし $H(\overrightarrow{n}) = \{x \in \mathbb{R}^d : x\cdot\overrightarrow{n} = 0\}$ とする. 各 $N \in \mathbb{N}$ に対し $\Gamma_N^\infty = (-N/2, N/2]^{d-1} \times \mathbb{R}$, $\Lambda_N^\infty = \Gamma_N^\infty \cap \mathbb{Z}^d$ とし, $\Gamma_N^\lambda = (-N/2, N/2]^{d-1} \times (-(\lambda N)/2, (\lambda N)/2]$ とする. この時, $\lambda \in (0,\infty]$ が $H(\overrightarrow{n}) \cap \Gamma_N^\infty \subset \Gamma_N^\lambda$ を十分大きな $N \in \mathbb{N}$ に対してみたすならば,

$$\text{(6.5)} \qquad \tau_\beta(\overrightarrow{n}) = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(H(\overrightarrow{n}) \cap \Gamma_N^\infty)}\log\frac{Z_{\Lambda_N^\lambda,\pm(\overrightarrow{n})}(\beta)}{Z_{\Lambda_N^\lambda,+}(\beta)}$$

が成り立つ. また, $\tau_\beta(\overrightarrow{n})$ の定義として通常は (6.5) を採用する. ただし, 各 $H \subset \mathbb{R}^d$ に対し $\mathcal{H}^{d-1}(H)$ は H の $(d-1)$-次元ハウスドルフ測度を表す.

以後, 表記の簡単の為に $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_d}$ の場合だけを扱う．一般の $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ についても, (6.4) と同様の変更を用いれば, 次の一連の結果 (補題 6.8, 補題 6.9, 定理 6.10) と同様の主張が成り立つ．

補題 6.8. 任意に $\beta > 0$ を取る．この時, 任意の $\lambda \in (0,\infty)$ に対し

$$\tau_\beta(\overrightarrow{e_d}) = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},(w)} \left(\partial^+\Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^-\Lambda_N^\lambda\right) \tag{6.6}$$

が成り立つ．

証明. $\lambda \in (0,\infty)$ とする．事象 $\{\partial^+\Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^-\Lambda_N^\lambda\}$ が単調減少なので, FKG 不等式より

$$\begin{aligned} \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},(w)} \left(\partial^+\Lambda_N^{2\lambda} \longleftrightarrow \partial^-\Lambda_N^{2\lambda}\right) &\geq \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},(w)} \left(\partial^+\Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^-\Lambda_N^\lambda\right) \\ &\geq \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{\lambda},(w)} \left(\partial^+\Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^-\Lambda_N^\lambda\right) \end{aligned}$$

となる．従って, (6.3) より (6.6) を得る． □

各 $N \in \mathbb{N}$ に対し $(wf)_N \in \Pi$ を

$$(wf)_N(\Lambda) = \partial_{ex}\Lambda \cap (\Lambda_N^\infty)^c \quad (\Lambda \subset \mathbb{Z}^d)$$

として定める．この時, 定理 5.6 に注意して [CP00] の 3 節を用いると次の補題 6.9(証明省略) が分かる．[B99] では, この補題 6.9 の証明にパイエルス型議論を用いていることから, $\beta > 0$ が十分大きいという条件が必要となる．

補題 6.9. 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る．この時, 任意の $\lambda \in (0,\infty)$ に対し

$$\tau_\beta(\overrightarrow{e_d}) = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},(wf)_N} \left(\partial^+\Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^-\Lambda_N^\lambda\right)$$

が成り立つ．

各 $\lambda \in (0,\infty)$, $N \in \mathbb{N}$ に対し $\Xi_N^{\epsilon,\lambda} = \partial^\epsilon\Lambda_N^\lambda \cap \Lambda_N^\infty$ と定める．ただし, $\epsilon = +$ もしくは $-$ とする．$(f) \in \Pi$ を

$$(f)(\Lambda) = \emptyset \quad (\Lambda \subset \mathbb{Z}^d)$$

として定める．この時, 任意の $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $p \in [0,1]$, $q \in (0,\infty)$ に対し $\Phi^{p,q}_{\Lambda,(f)} = \phi^{p,q}_{\Lambda,f}$ が成り立つことに注意する．

定理 6.10. 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る．この時, 任意の $\lambda \in (0,\infty)$ に対しある $c_\beta \in (0,\infty)$ が存在して,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \left(\sup_{\pi\in\Pi} \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},\pi} \left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right)\right) \leq -\tau_\beta(\overrightarrow{e_d}) + c_\beta\lambda \tag{6.7}$$

が成り立つ．ただし, 任意の $\lambda \in (0,\infty)$, $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sup_{\pi\in\Pi} \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},\pi} \left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right) = \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},(f)} \left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right) = \phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},f} \left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right) \tag{6.8}$$

が成り立つ．

証明. (6.8) は FKG 不等式より従う. $\beta > \beta_c(d)$ とし, $\lambda \in (0,\infty)$, $N \in \mathbb{N}$ として $\Lambda = \Lambda_N^{2\lambda}$, $(wf) = (wf)_N$ とする. 補題 6.9 より

$$\Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,(f)}\left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right) \le \exp\left(c_\beta \lambda N^{d-1}\right) \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,(wf)}\left(\partial^+ \Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^- \Lambda_N^\lambda\right) \tag{6.9}$$

を示せば (6.7) を得る. ただし, $c_\beta \in (0,\infty)$ とする. $\bar{\xi} \subset \widetilde{\Omega}$ を $\bar{\xi}_e = 0$ $(e \in \mathbb{E}_{\Lambda_N^\infty})$, $\bar{\xi}_e = 1$ $(e \notin \mathbb{E}_{\Lambda_N^\infty})$ とし, $E' = \{\{x,y\} \in \mathbb{E}^d : x \in \Lambda,\ y \notin \Lambda_N^\infty\}$, $E = \mathbb{E}_\Lambda \cup E'$ とする. さらに, $\bar{\xi}' \subset \widetilde{\Omega}$ を $(\bar{\xi}')_e = 0$ $(e \in \mathbb{E}_{\Lambda_N^\infty} \cup E')$, $(\bar{\xi}')_e = 1$ $(e \notin \mathbb{E}_{\Lambda_N^\infty} \cup E')$ とする. この時, 全ての $\omega \in \widehat{\Omega}_\Lambda^{(wf)}$ に対し

$$\left|k_\Lambda(\omega_{(E\setminus E')}\bar{\xi}') - k_\Lambda(\omega_E \bar{\xi})\right| \le 2(d-1)\lambda N^{d-1}$$

が成り立つ. 従って, (5.2) より補題 3.4 と同様にすると, 適当な $c'_\beta \in (0,\infty)$ に対し

$$\begin{aligned}\Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,(wf)}\left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right) &= \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,(wf)}\left(\phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,(\cdot)_E\bar{\xi}}\left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right)\right) \\ &\ge \exp\left(-c'_\beta \lambda N^{d-1}\right) \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,(f)}\left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right)\end{aligned} \tag{6.10}$$

となる. また,

$$\left\{\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right\} \cap \left\{\omega_e = 0\ (\forall e \in E')\right\} \subset \left\{\partial^+ \Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^- \Lambda_N^\lambda\right\}$$

であることに注意すると, 定理 4.5 より適当な $c''_\beta \in (0,\infty)$ に対し

$$\Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,(wf)}\left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right) \le \exp\left(c''_\beta \lambda N^{d-1}\right) \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda,(wf)}\left(\partial^+ \Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^- \Lambda_N^\lambda\right)$$

となるので, (6.10) と合わせて (6.9) を得る. □

注意 6.11. (f) の定め方より任意の $\lambda \in (0,\infty)$, $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},(f)}\left(\Xi_N^{+,\lambda} \longleftrightarrow \Xi_N^{-,\lambda}\right) = \Phi^{p_\beta,2}_{\Lambda_N^{2\lambda},(f)}\left(\partial^+ \Lambda_N^\lambda \longleftrightarrow \partial^- \Lambda_N^\lambda\right)$$

が成り立つ.

7 表面積オーダー大偏差原理

7.1 定理 7.1 と定理 7.2

この小節では, $m \in \varphi_\beta^{-1}(0)$ であるために定理 3.9 からは減衰オーダーが分からなかった $\mu^\beta_{N,+}(\mathbb{M}_N \le m)$ $(m \in [-m_\beta, m_\beta])$ という確率について, 定理 7.1 と定理 7.2 で述べる. $(d-1)$ 次元単位球面を $\mathbb{S}^{d-1}$ と表し, 法線ベクトル $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ に対する表面張力を $\tau_\beta(\overrightarrow{n}) \in (0,\infty)$ と表す. $\mathcal{T} = (-1/2, 1/2]^d$ とし, $\mathrm{BV}(\mathcal{T}; \{\pm 1\})$ を $\mathcal{T}$ 上の $\{\pm 1\}$-値有界変動関数全体とする: $u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T}; \{\pm 1\})$ であるとは, 各ボレル集合 $U \subset \mathcal{T}$ に対し

$$\mathcal{P}(U) = \sup\left\{\int_U \mathrm{div}\psi(t)\,dt : \psi \in \mathscr{C}^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d),\ \|\psi\|_\infty \le 1\right\}$$

として定まる汎関数 $\mathcal{P}$ に対して,

$$\mathcal{P}(\{u = -1\}) < \infty$$

をみたす時に言う．任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取り, 各 $u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1)$ に対して, $\partial\{u=-1\}$ の reduced boundary $\partial^*\{u=-1\}$ を $\partial^* u$ と表し,

$$\mathcal{F}_\beta(u) = \int_{\partial^* u} \tau_\beta(\overrightarrow{n}_s)\, d\mathcal{H}_s \tag{7.1}$$

と定める．ここで, τ_β が ($\mathbb{S}^{d-1}$ 上で) 有界であることより $\mathcal{F}_\beta(u) < \infty$ ($\forall u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1)$) となることに注意する．さらに,

$$\mathcal{F}_\beta(u) = \infty \quad \Big(u \in \mathrm{L}^1(\mathcal{T};[-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}])\backslash \mathrm{BV}(\mathcal{T};\{\pm 1\})\Big)$$

として $\mathcal{F}_\beta : \mathrm{L}^1(\mathcal{T};[-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}]) \to [0,\infty]$ を定めると, $\mathcal{F}_\beta$ は $\mathrm{L}^1(\mathcal{T};[-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}])$ の位相に関して下半連続関数となる ([AB90] 参照)．ボレル集合 $A \subset \mathcal{T}$ に対し A の総表面張力 $\mathcal{F}_\beta(A)$ を

$$\mathcal{F}_\beta(A) = \mathcal{F}_\beta(\chi_A), \qquad \chi_A = -1_A + 1_{\mathcal{T}\backslash A}$$

と定める．ただし, 各 $A \subset \mathcal{T}$ に対し 1_A を A の指示関数とする．この定義より χ_A は, $(NA)\cap\mathbb{Z}^d$ ($N \in \mathbb{N}$) 上のスピン配置が μ_-^β に従い, $\Lambda_N \backslash ((NA)\cap\mathbb{Z}^d)$ 上のスピン配置が μ_+^β に従っている状態を表していると言える．$\mathcal{T}$ という制限を除けば, 一定体積の下での $\mathcal{F}_\beta$ の最小値は

$$\mathcal{W}_\beta = \bigcap_{\overrightarrow{n}\in\mathbb{S}^{d-1}} \{t \in \mathbb{R}^d : t\cdot\overrightarrow{n} \le \tau_\beta(\overrightarrow{n})\}$$

として定まる**ウルフ (Wulff) 図形** $\mathcal{W}_\beta$ の相似形によって実現される．ただし, 各 $t, t' \in \mathbb{R}^d$ に対し $t\cdot t'$ は t と t' の $\mathbb{R}^d$ における内積を表す．τ_β は $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ に関して連続であって, $\beta > \beta_c(d)$ ならば $\tau_\beta(\overrightarrow{n}) > 0$ ($\forall \overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$) であるので, $\mathcal{W}_\beta$ ($\beta > \beta_c(d)$) は内点を持つ凸集合となる．また, $\mathcal{W}_\beta$ は座標軸の入れ替えに関して対称となる．$\mathcal{T}$ という制限を考慮する為に

$$\bar\lambda_\beta = \sup\{\lambda > 0 : \lambda\mathcal{W}_\beta \subset \mathcal{T}\}$$

と定め,

$$m'_\beta = m_\beta \int_{\mathcal{T}} \chi_{(\bar\lambda_\beta \mathcal{W}_\beta)}(t)\, dt$$

と定める．ここで,

$$\bar\lambda_\beta\mathcal{W}_\beta\text{の体積} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{T}} \Big(1 - \chi_{(\bar\lambda_\beta\mathcal{W}_\beta)}(t)\Big)\, dt = \frac{m_\beta - m'_\beta}{2m_\beta}$$

であることに注意する．この時, 各 $m \in (m'_\beta, m_\beta]$ に対し一定体積の下での $\mathcal{F}_\beta$ の最小値は

$$\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m)) = \min\left\{\mathcal{F}_\beta(u) : u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\{\pm\}),\ m_\beta\int_{\mathcal{T}} u(t)\, dt \le m\right\}, \tag{7.2}$$
$$\mathcal{W}_\beta(m) = \lambda_m \mathcal{W}_\beta \quad (\exists \lambda_m > 0)$$

とウルフ図形の相似形 $\mathcal{W}_\beta(m)$ によって実現される．さらに, この最小値を実現するのは自身の合同形を除いて $\mathcal{W}_\beta(m)$ が唯一であって, λ_m は

$$m = m_\beta \int_{\mathcal{T}} \chi_{(\lambda_m\mathcal{W}_\beta)}(r) dr$$

をみたすものとして特徴付けられる．また, 定め方より $\lambda_{m_\beta} = 0, \lambda_{m'_\beta} = \bar\lambda_\beta$ である．

定理 7.1. *$d \geq 3$ として, 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る. この時, 任意の $m \in (m'_\beta, m_\beta]$ に対し*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mu_{N,+}^{\beta}(\mathbb{M}_N \leq m) = -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))$$

が成り立つ.

証明の概略は次小節で述べる. ここでは, そのために必要な概念や記号を導入し,

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{N,+}^{\beta}\left(\begin{array}{c} \text{粗視化されたスピン配置がウルフ図形 } \mathcal{W}_\beta(m) \text{ に} \\ \mathrm{L}^1\text{-距離の意味で近い} \end{array} \middle| \, M_N \leq m \right) = 1$$

という趣旨の主張を正確に述べる. 任意に

$$\alpha \in \left(\frac{1}{d}, \frac{3d+1}{3d^2}\right) \cap \mathbb{Q} \tag{7.3}$$

を取り, 議論の簡単の為に $k \in \mathbb{N}$ に対し $N = (2k+1)N^\alpha$ をみたす場合だけを考える (注意 7.3 参照). 各 $\sigma \in \Omega_N$ に対し $\mathcal{T}$ 上の関数 $\mathcal{M}_N(\cdot, \sigma)$ を次のように定める (σ を明示しない時は $\mathcal{M}_N(\cdot)$ と表す): 各 $t \in \mathcal{T}$ に対し

$$Nt \in \Gamma_{N^\alpha}(N^\alpha \underline{x})$$

をみたす唯一の $\underline{x} \in \Delta_k$ を取り,

$$\mathcal{M}_N(t, \sigma) = \frac{1}{N^{\alpha d}} \sum_{y \in \Lambda_{N^\alpha}(N^\alpha \underline{x})} \sigma_y \tag{7.4}$$

とする. ただし, 各 $L \in \mathbb{N}$ に対し $\Gamma_L = (-L/2, L/2]^d$ であって, 各 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $\Gamma(x) = x + \Gamma$ である. 各 $u \in \mathrm{L}^1(\mathcal{T}; [-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}])$, $\delta > 0$ に対し u の δ 近傍を

$$\mathbb{V}(u, \delta) = \left\{ v \in \mathrm{L}^1(\mathcal{T}; [-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}]) : \int_{\mathcal{T}} |v(t) - u(t)| \, dt \leq \delta \right\}$$

と定める.

定理 7.2. *$d \geq 3$ として, 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る. この時, 任意の $m \in (m'_\beta, m_\beta)$, $\delta > 0$ に対し*

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in \bigcup_{t \in \mathcal{T}'} \mathbb{V}\left(\chi_{(\mathcal{W}_\beta(m)+t)}, \delta\right) \, \middle| \, M_N \leq m \right) = 1$$

が成り立つ. ただし, $\mathcal{T}' = \{t \in \mathcal{T} : \mathcal{W}_\beta(m) + t \subset \mathcal{T}\}$ とする.

定理 7.2 は, [BIV00] においては $\alpha \in (0, 1/d)$ をみたす場合にも, [CP00] においては $\alpha \in (0, 1/(d-1))$ をみたす場合にも得られている. より正確なことについては, [CP00, BIV00] を参照して頂きたい.

注意 7.3. $k, n \in \mathbb{N}$ とし $N = (2k+1)n$ とするのは, 定理 5.8 と定理 5.16 において各座標方向に均等な Λ_l ($l \in \mathbb{N}$) のみを扱っているからである. それ故,

$$\widetilde{\mathbb{B}}(l, O) = \left\{ \Lambda \subset \mathbb{Z}^d : \begin{array}{c} i = 1, \ldots, d, \ \epsilon = +, - \text{ に対し } l/2 \leq l_{i,\epsilon} \leq l \text{ であって,} \\ \Lambda = \big((-l_{1,-}, l_{1,+}] \times \cdots \times (-l_{d,-}, l_{d,+}]\big) \cap \mathbb{Z}^d \text{ である} \end{array} \right\}$$

とし, 定理 5.8 と定理 5.16 を $\widetilde{\mathbb{B}}(l, O)$ に関する一様評価の形に拡張しておけば, $N = (2k+1)n$ をみたす場合に限らなくともよい.

7.2 証明の概略

定理 7.1 と定理 7.2 は次の三つの命題を用いて証明される．これら三つの命題には次小節以降で証明を与える．

命題 7.4. $d \geq 3$ として，任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る．この時，任意の $m \in (m'_\beta, m_\beta)$ に対し

$$\lim_{\delta\to 0}\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mu^\beta_{N,+}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in\mathbb{V}\left(\chi_{\mathcal{W}_\beta(m)},\delta\right)\right)\geq -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m)) \tag{7.5}$$

が成り立つ．

命題 7.5. $d \geq 3$ として，任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る．この時，任意の $u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1)$ に対し

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mu^\beta_{N,+}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in\mathbb{V}(u,\delta)\right)\leq -\mathcal{F}_\beta(u) \tag{7.6}$$

が成り立つ．

各 $\beta > \beta_c(d)$, $a > 0$ に対し $K_\beta(a) \subset \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1)$ を

$$K_\beta(a) = \{u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1) : \mathcal{F}_\beta(u) \leq a\}$$

と定める．この時，$\mathcal{F}_\beta$ の下半連続性より $K_\beta(a)$ は閉である．さらに，

$$\tau^{\min}_\beta = \min\{\tau_\beta(\vec{n}) : \vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1}\} > 0$$

であることより $\{u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1) : \mathcal{P}(\{u=-1\}) \leq (a/\tau^{\min}_\beta)\}$ がコンパクトであって ([EG92] 参照)，定め方より $K_\beta(a) \subset \{u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1) : \mathcal{P}(\{u=-1\}) \leq (a/\tau^{\min}_\beta)\}$ が成り立つので，$K_\beta(a)$ はコンパクトである．各 $K \subset \mathrm{L}^1(\mathcal{T};[-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}])$, $\delta > 0$ に対し $\mathbb{V}(K,\delta) \subset \mathrm{L}^1(\mathcal{T};[-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}])$ を

$$\mathbb{V}(K,\delta) = \left\{v \in \mathrm{L}^1(\mathcal{T};[-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}]) : \text{ある } u \in K \text{ に対し } v \in \mathbb{V}(u,\delta) \text{ である}\right\}$$

と定める．

命題 7.6. $d \geq 3$ として，任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る．この時，ある $c_\beta \in (0,\infty)$ が存在して任意の $a > 0$, $\delta > 0$ に対し

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mu^\beta_{N,+}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in\mathbb{V}(K_\beta(a),\delta)^{\mathrm{c}}\right)\leq -c_\beta a \tag{7.7}$$

が成り立つ．

証明 (定理 7.1)．$\beta > \beta_c(d)$, $m \in (m'_\beta, m_\beta)$ とする．$k, N \in \mathbb{N}$ は $N = (2k+1)N^\alpha$ をみたすとし，$n = N^\alpha$ とする．

まず $\mu^\beta_{N,+}(\mathbb{M}_N \leq m)$ の下からの評価を導く．任意に $\varepsilon \in (0,m)$ を取ると，命題 7.4 より

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mu^\beta_{N,+}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in\mathbb{V}\left(\chi_{\mathcal{W}_\beta(m-\varepsilon)},\delta\right)\right)&\geq -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m-\varepsilon))\\ &= -\left(\frac{\lambda_{(m-\varepsilon)}}{\lambda_m}\right)^{d-1}\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))\end{aligned} \tag{7.8}$$

が成り立つ. さらに, $\delta \le (\varepsilon/m_\beta)$ とすると $\{m_\beta^{-1}\mathcal{M}_N \in \mathbb{V}(\chi_{\mathcal{W}_\beta(m-\varepsilon)}, \delta)\}$ 上では,

$$\mathbb{M}_N = \int_{\mathcal{T}} \mathcal{M}_N(\cdot, t)\,dt = m_\beta \int_{\mathcal{T}} \left(\chi_{\mathcal{W}_\beta(m-\varepsilon)}(t) + \frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}(t) - \chi_{\mathcal{W}_\beta(m-\varepsilon)}(t) \right) dt \le m$$

が成り立つので, (7.8) と合わせて

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mu_{N,+}^{\beta}\left(\mathbb{M}_N \le m\right) \ge -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))$$

を得る.

次に $\mu_{N,+}^{\beta}(\mathbb{M}_N \le m)$ の上からの評価を導く. $a > 0$ を $c_\beta a > \mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))$ をみたすように取る. 各 $\sigma \in \Omega_N$ に対し

$$m_\beta \int_{\mathcal{T}} \frac{\mathcal{M}_N(t,\sigma)}{m_\beta}\,dt = \frac{1}{N^{(1-\alpha)d}} \sum_{\underline{x}\in\Delta_k} \frac{1}{n^d} \sum_{y\in\Lambda_n(n\underline{x})} \sigma_y = \mathbb{M}_N$$

となるので,

$$F = \left\{ u \in \mathrm{L}^1(\mathcal{T}; [-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}]) : m_\beta \int_{\mathcal{T}} u(t)\,dt \le m \right\}$$

とすると

$$\{\mathbb{M}_N \le m\} = \left\{ \frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in F \right\} \tag{7.9}$$

が成り立つ. 任意に $\varepsilon > 0$ を取ると, 命題 7.5 と $K_\beta(a)$ のコンパクト性より, ある $\{u_i\}_{i=1}^{l} \subset K_\beta(a)$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{l} \subset (0,\varepsilon)^l$ が存在して十分小さな $\delta > 0$ に対し

$$1 \le \forall i \le l, \qquad \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in \mathbb{V}(u_i, \varepsilon_i) \right) \le -\mathcal{F}_\beta(u_i) + \varepsilon,$$

$$\mathbb{V}(K_\beta(a), \delta) \subset \bigcup_{i=1}^{l} \mathbb{V}(u_i, \varepsilon_i)$$

が成り立つ. 従って,

$$\mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in F \cap \mathbb{V}(K_\beta(a), \delta) \right) \le \sum_{1\le i\le l} 1_{\{\mathbb{V}(u_i,\varepsilon_i)\cap F \ne \emptyset\}} \mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in \mathbb{V}(u_i, \varepsilon_i) \right)$$

に注意すると, $\mathcal{F}_\beta$ の下半連続性と $\mathcal{W}_\beta(m)$ の定義より

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in F \cap \mathbb{V}(K_\beta(a), \delta) \right) &\le -\lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{u\in\mathbb{V}(F,\varepsilon)} \mathcal{F}_\beta(u) \\ &\le -\inf_{u\in F} \mathcal{F}_\beta(u) \\ &\le -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m)) \end{aligned} \tag{7.10}$$

が成り立つ. しかるに, 命題 7.6 と $a > 0$ の取り方より

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in \mathbb{V}(K_\beta(a), \delta)^c \right) \le -c_\beta a < -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))$$

が成り立つので, (7.9), (7.10) と合わせて

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mu_{N,+}^{\beta}(\mathbb{M}_N\le m)=\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in F\right)$$
$$\le -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))$$

を得る. □

証明 (定理 7.2). $\beta>\beta_c(d)$, $m\in(m'_\beta,m_\beta)$, $\delta>0$ とする. $k,N\in\mathbb{N}$ は $N=(2k+1)N^\alpha$ をみたすとし, $n=N^\alpha$ とする. また, $a>0$ を $c_\beta a>\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))$ をみたすように取り,

$$G=\bigcap_{t\in\mathcal{T}'}\mathbb{V}\left(\chi_{(\mathcal{W}_\beta(m)+t)},\delta\right)^c$$

とする. ここで,

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in G\cap\{\mathbb{M}_N\le m\}\cap\mathbb{V}(K_\beta(a),\delta)\right)<-\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m)) \tag{7.11}$$

を示せば, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $N\in\mathbb{N}$ を十分大きく取ると

$$\begin{aligned}&\mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in G\cap\{\mathbb{M}_N\le m\}\right)\\&\le\mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in G\cap\{\mathbb{M}_N\le m\}\cap\mathbb{V}(K_\beta(a),\delta)\right)+\mu_{N,+}^{\beta}\left(\mathbb{V}(K_\beta(a),\delta)^c\right)\\&\le\varepsilon\mu_{N,+}^{\beta}(\mathbb{M}_N\le m)\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\lim_{N\to\infty}\mu_{N,+}^{\beta}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in\bigcup_{r\in\mathcal{T}'}\mathbb{V}\left(\chi_{(\mathcal{W}_\beta(m)+t)},\delta\right)\;\middle|\;M_N\le m\right)=1$$

を得る. しかるに (7.11) は, 合同形を除いて唯一 $\mathcal{W}_\beta(m)$ が最小値 $\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))$ を実現することと $\mathcal{F}_\beta$ の下半連続性に注意すると, 定理 7.1 の証明で上からの評価を導いたのと同様にして得られる. □

7.3 粗視化と中間スケール

確率測度 $\mathbb{P}_{N,+}^{\beta}$(定義 6.3 参照) を用いた粗視化を導入する. $k,n\in\mathbb{N}$ とし $N=(2k+1)n$ とする. 特に $n=N^\alpha$ とすれば定理 7.2 の設定となる. 表記の簡単の為に, $\beta>\beta_c(d)$ が与えられる毎に $\theta=\theta^w(p_\beta,2)=\theta^f(p_\beta,2)$ とする (定理 5.6 参照). 任意に $r\in(0,1)$, $\zeta\in(0,1)$ を取る. この小節以降では, $\widehat{\Omega}_N^{(w)}$ を $\{\omega\in\Omega:\omega_e=1\ (\forall e\in\mathbb{E}\backslash\mathbb{E}_N^{(w)})\}$ とみなすことにする. 各 $\underline{x}\in\Delta_k$ に対して, 事象 $\mathcal{U}_{\underline{x}},\mathcal{R}_{\underline{x}},\mathcal{O}_{\underline{x}},\mathcal{V}_{\underline{x}}\subset\widehat{\Omega}_N^{(w)}$ を

$$\mathcal{U}_{\underline{x}}=\left\{\Lambda_{2n}(n\underline{x})\text{ 内に }\Lambda_{2n}(n\underline{x})\text{-横断クラスター }C_{\underline{x}}^*(\Lambda_{2n}(n\underline{x}))\text{ が唯一存在する}\right\},$$

$$\mathcal{R}_{\underline{x}}=\mathcal{U}_{\underline{x}}\cap\left\{\begin{array}{c}C_{\underline{x}}^*\text{ 以外には, }\mathrm{diam}_\infty(C(\Lambda_{2n}(n\underline{x})))\ge n^r\text{ をみたす}\\ \Lambda_{2n}(n\underline{x})\text{ 内のクラスター }C(\Lambda_{2n}(n\underline{x}))\text{ は存在しない}\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{O}_{\underline{x}}=\mathcal{R}_{\underline{x}}\cap\left\{\begin{array}{c}Q\in\mathbb{B}(n^r)\text{ が }Q\subset\Lambda_{2n}(n\underline{x})\text{ をみたすならば,}\\ C_{\underline{x}}^*\text{ は }Q\text{ を横断する}\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{V}_{\underline{x}}^{\zeta}=\mathcal{U}_{\underline{x}}\cap\left\{|\Lambda_n(n\underline{x})|^{-1}|C_{\underline{x}}^*\cap\Lambda_n(n\underline{x})|\in(\theta-\zeta,\theta+\zeta)\right\}$$

と定め,

$$Y_{\underline{x}}^{\zeta}(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega\in\mathcal{O}_{\underline{x}}\cap\mathcal{V}_{\underline{x}}^{\zeta})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

と定める. ただし, 各 $l>0$ に対し

$$\mathbb{B}(l)=\{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d:\text{ある } x\in\mathbb{Z}^d \text{ が存在して } \Lambda=x+((-l/2,l/2]^d\cap\mathbb{Z}^d)\text{ である }\}$$

である. この時, 定理 5.8 と定理 5.16 より, ある $c_r\in(0,\infty)$, $n_\zeta\in\mathbb{N}$ が存在して任意の $n\geq n_\zeta$ に対し

$$\forall\underline{x}\in\Delta_k,\qquad \Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}\left(Y_{\underline{x}}^{\zeta}=0\;\middle|\;\mathscr{G}_{\mathbb{E}_N^{(w)}}^{E_{n,\underline{x}}}\right)\leq\exp\left(-c_rn^r\right)\tag{7.12}$$

が成り立つ. ただし, 各 $n\in\mathbb{N}$, $\underline{x}\in\mathbb{Z}^d$ に対し $E_{n,\underline{x}}=\mathbb{E}_{\Lambda_{2n}(n\underline{x})}$ とする. 特に,

$$\forall\underline{x}\in\Delta_k,\qquad \Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}\left(Y_{\underline{x}}^{\zeta}=0\;\middle|\;\left(Y_{\underline{y}}:d_\infty(\underline{y},\underline{x})\geq 2\right)\right)\leq\exp\left(-cn^r\right)$$

が成り立つ.

各 $n\in\mathbb{N}$, $\underline{x}\in\Delta_k$ に対し

$$M_{\underline{x}}=M_{\underline{x}}^{(n)}=\frac{1}{n^d}\sum_{y\in\Lambda_n(n\underline{x})}\sigma_y\tag{7.13}$$

と定め, $\beta>\beta_c(d)$ が与えられる毎に

(7.14)

$$Z_{\underline{x}}^{\zeta}(\sigma,\omega)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(C_{\underline{x}}^*)(\sigma,\omega)Y_{\underline{x}}^{\zeta}(\omega) & (|M_{\underline{x}}(\sigma)-\mathrm{sgn}(C_{\underline{x}}^*)(\sigma,\omega)m_\beta|\leq 3\zeta)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}\qquad (\mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\text{-}a.s.\ (\sigma,\omega))$$

と定める. ただし, 各 $\underline{x}\in\Delta_k$ に対して, $C_{\underline{x}}^*\neq\emptyset$ ならば適当に $z=z(C_{\underline{x}}^*)\in C_{\underline{x}}^*$ を取り

$$\mathrm{sgn}(C_{\underline{x}}^*)(\sigma,\omega)=\sigma_z\quad(\mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\text{-}a.s.\ (\sigma,\omega))$$

とし, $\mathrm{sgn}(\emptyset)=0$ とする. ここで, $\mathrm{sgn}(C_{\underline{x}}^*)$ は $z\in C_{\underline{x}}^*$ の取り方には依らないことに注意する. すなわち,

$$Z_{\underline{x}}^{\zeta}=\begin{cases}\mathrm{sgn}(C_{\underline{x}}^*) & (Y_{\underline{x}}^{\zeta}=1\text{ かつ }|M_{\underline{x}}-\mathrm{sgn}(C_{\underline{x}}^*)m_\beta|\leq 3\zeta)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}\qquad \mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\text{-}a.s.$$

である.

命題 7.7. $d\geq 3$ として, 任意に $\beta>\beta_c(d)$ を取る. 任意に $k\in\mathbb{N}$ を取り, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $N=(2k+1)n$ とする. この時, 任意の $r\in(0,1/3)$, $\zeta\in(0,1-\theta)$ に対し $n\in\mathbb{N}$ を十分大きく取ると

$$\mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\circ\left(\{|Z_{\underline{x}}^{\zeta}|\}_{\underline{x}\in\Delta_k}\right)^{-1}\succeq\phi_{\Delta_k}^{\rho_n^{\zeta},\mathrm{s}}\tag{7.15}$$

が成り立つ. ただし,

$$\rho_n^{\zeta}=1-\exp(-c_\zeta n^\gamma),\qquad \gamma=\min\{r,(1-3r)d\}$$

であって, $c_\zeta\in(0,\infty)$ である. また, 各 $p\in(0,1)$ に対して, $\phi_{\Delta_k}^{p,\mathrm{s}}$ は $\{0,1\}$-値 p ベルヌーイ Δ_k 直積測度である. すなわち, $\phi_{\Delta_k}^{p,\mathrm{s}}$ は $\{0,1\}^{\Delta_k}$ 上の $\phi_{\Delta_k}^{p,\mathrm{s}}(\eta_x=1)=p$ $(\forall x\in\Delta_k)$ をみたす直積測度である.

証明. $\beta > \beta_c(d)$ とする. $r \in (0,1/3)$, $\zeta \in (0,1-\theta)$ とし, 記号から ζ を省略する. 定理 4.4 より

$$\forall \underline{x} \in \Delta_k, \qquad \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(|Z_{\underline{x}}| = 0 \;\middle|\; \left(|Z_{\underline{y}}| : d_\infty(\underline{y},\underline{x}) \geq 2\right)\right) \leq \exp\left(-cn^{\gamma}\right) \tag{7.16}$$

を示せばよい. 任意に $\underline{x} \in \Delta_k$ を取り, $\Delta^{\underline{x}} = \Delta_k \backslash \Delta_1(\underline{x})$ とする. ここで, $\underline{y} \in \Delta^{\underline{x}}$ ならば $d_\infty(\underline{y},\underline{x}) \geq 2$ であることに注意する. 任意に $\{\varepsilon_{\underline{y}}\}_{\underline{y}\in\Delta^{\underline{x}}} \in \{0,1\}^{\Delta^{\underline{x}}}$ を取り

$$\mathcal{E}^{\underline{x}} = \left\{Z_{\underline{y}} = \varepsilon_{\underline{y}} \ (\forall \underline{y} \in \Delta^{\underline{x}})\right\}$$

と定めると,

$$\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(|Z_{\underline{x}}| = 0; \mathcal{E}^{\underline{x}}\right) = \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(|Y_{\underline{x}}| = 0; \mathcal{E}^{\underline{x}}\right) + \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(|Y_{\underline{x}}| = 1, |M_{\underline{x}} - \mathrm{sgn}(C^*_{\underline{x}})m_\beta| > 3\zeta; \mathcal{E}^{\underline{x}}\right) \tag{7.17}$$

となるので, この右辺の各項をそれぞれ評価する.

まず第一項を評価する. 定義 6.3($\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}$ の定義) と (7.12) より, 任意の $n \geq n_\zeta$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(|Y_{\underline{x}}| = 0; \mathcal{E}^{\underline{x}}\right) &= \Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left[\Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left[P^{\cdot}_{N,+}\left(\mathcal{E}^{\underline{x}}\right) 1_{\{Y_{\underline{x}}=0\}} \;\middle|\; \mathscr{G}^{E_{n,\underline{x}}}_N\right]\right] \\
&= \Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left[P^{\cdot}_{N,+}\left(\mathcal{E}^{\underline{x}}\right) \Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left(Y_{\underline{x}} = 0 \;\middle|\; \mathscr{G}^{E_{n,\underline{x}}}_N\right)\right] \\
&\leq \exp(-c_r n^r)\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\mathcal{E}^{\underline{x}}\right)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

が成り立つ.

次に第二項を評価する. $\Lambda_n(n\underline{x})$ 内のクラスターの族 $\mathbb{C}^\circ_{\underline{x}}$ を

$$\mathbb{C}^\circ_{\underline{x}} = \{C : C \text{ は } \Lambda_n(n\underline{x}) \text{ 内のクラスターであって } C \cap \partial_{in}\Lambda_n(n\underline{x}) = \emptyset \text{ である }\}$$

とする. $\mathrm{sgn}(C^*_{\underline{x}})$ と同様に, 各 $C \in \mathbb{C}^\circ_{\underline{x}}$ に対し適当に $z = z(C) \in C$ を取り, $\mathrm{sgn}(C)$ を

$$\mathrm{sgn}(C)(\sigma,\omega) = \mathrm{sgn}(C(\omega))(\sigma) = \sigma_z \quad (\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\text{-}a.s.\ (\sigma,\omega))$$

と定める. 事象 $\{Y_{\underline{x}} = 1\}$ 上では, $|n^{-d}|C^*_{\underline{x}} \cap \Lambda_n(n\underline{x})| - m_\beta| < \zeta$ となることが $\theta = m_\beta$ より分かる. さらに, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して, $C^*_{\underline{x}}$ 以外のクラスターの直径が n^r 未満であることより

$$\left|n^d M_{\underline{x}} - \mathrm{sgn}(C^*_{\underline{x}})|C^*_{\underline{x}} \cap \Lambda_n(n\underline{x})| - \sum_{C\in\mathbb{C}^\circ_{\underline{x}}} \mathrm{sgn}(C)|C|\right| \leq \zeta n^d$$

が成り立つので,

$$\left\{|M_{\underline{x}} - \mathrm{sgn}(C^*_{\underline{x}})m_\beta| > 3\zeta\right\} \subset \left\{n^{-d}\sum_{C\in\mathbb{C}^\circ_{\underline{x}}} \mathrm{sgn}(C)|C| > \zeta\right\}$$

を得る. 従って, $n \in \mathbb{N}$ を十分大きく取ると全ての $\omega \in \{Y_{\underline{x}} = 1\}$ に対し

$$\begin{aligned}
P^{\omega}_{N,+}\left(|M_{\underline{x}} - \mathrm{sgn}(C^*_{\underline{x}})m_\beta| > 3\zeta; \mathcal{E}^{\underline{x}}\right) &\leq P^{\omega}_{N,+}\left(n^{-d}\sum_{C\in\mathbb{C}^\circ_{\underline{x}}} \mathrm{sgn}(C)|C| > \zeta; \mathcal{E}^{\underline{x}}\right) \\
&= P^{\omega}_{N,+}\left(n^{-d}\sum_{C\in\mathbb{C}^\circ_{\underline{x}}} \mathrm{sgn}(C)|C| > \zeta\right) P^{\omega}_{N,+}\left(\mathcal{E}^{\underline{x}}\right)
\end{aligned} \tag{7.19}$$

が成り立つ．しかるに, $\sharp\mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ} \geq (1-\theta-\zeta)n^{(1-r)d}$ なので, $(\mathrm{sgn}(C) : C \in \mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ})$ が $P_{N,+}^{\omega}$ の下ではそれぞれが $\{\pm 1\}$-値 $\frac{1}{2}$ ベルヌーイ分布に従う独立確率変数列であることに注意すると, 以下の計算より

$$P_{N,+}^{\omega}\left(n^{-d}\sum_{C\in\mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ}}\mathrm{sgn}(C)|C| > \zeta\right) \leq \exp\left(-c'_{\beta,\zeta}n^{(1-3r)d}\right) \tag{7.20}$$

が分かる．ただし, $\sharp\mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ}$ は $\mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ}$ に属するクラスターの個数を表し, $c'_{\beta,\zeta} \in (0,\infty)$ である．それ故, 定義 6.3($\mathbb{P}_{N,+}^{\beta}$ の定義) と (7.19), (7.20) より

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\left(|Y_{\underline{x}}| = 1, |M_{\underline{x}} - \mathrm{sgn}(C_{\underline{x}}^{*})m_{\beta}| > 3\zeta; \mathcal{E}^{\underline{x}}\right) \\
&= \Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}\left[P_{N,+}^{\cdot}\left(|M_{\underline{x}} - \mathrm{sgn}(C_{\underline{x}}^{*})m_{\beta}| > 3\zeta; \mathcal{E}^{\underline{x}}\right); Y_{\underline{x}} = 1\right] \\
&\leq \exp\left(-c'_{\beta,\zeta}n^{(1-3r)d}\right)\mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\left(\mathcal{E}^{\underline{x}}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので, (7.17), (7.18) と合わせて (7.16) を得る．

最後に (7.20) を示す．ψ を $\{\pm 1\}$-値 $\frac{1}{2}$ ベルヌーイ分布に対する大偏差原理における速さ関数とする．すなわち,

$$\psi(u) = \frac{1-u}{2}\log(1-u) + \frac{1+u}{2}\log(1+u) \quad (u \in (-1,1))$$

である．ここで, $\psi(u) \geq u^2/2$ $(\forall u \in (-1,1))$ に注意する．$l = \sharp\mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ}$ とするとチェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}
P_{N,+}^{\omega}\left(n^{-d}\sum_{C\in\mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ}}\mathrm{sgn}(C)|C| > \zeta\right) &\leq P_{N,+}^{\omega}\left(\sum_{C\in\mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ}}\mathrm{sgn}(C)|C| > \zeta l\right) \\
&\leq \inf_{u\in(0,1)}\exp\left(-u\zeta l + \sum_{C\in\mathbb{C}_{\underline{x}}^{\circ}}\log\cosh(u|C|)\right) \\
&\leq \exp\left(-\sup_{u\in(0,1)}\Big(u\zeta - \log\cosh\big(un^{rd}\big)\Big)\, l\right) \\
&= \exp\left(-\psi\left(\frac{\zeta}{n^{rd}}\right)l\right) \\
&\exp\left(-\frac{(1-\theta-\zeta)\zeta^2}{2}n^{(1-3r)d}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので, (7.20) を得る． □

注意 7.8. 命題 7.7 の証明よりその設定の下では, 事象 $\mathcal{A} \subset \widehat{\Omega}_N^{(w)}$ が $\mathscr{G}_{\mathbb{E}_N^{(w)}}^{E_{n,\underline{x}}}$-可測ならば, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\forall \underline{x} \in \Delta_k, \qquad \mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\left(|Z_{\underline{x}}^{\zeta}| = 0 \,\middle|\, \mathcal{A}\right) \leq \exp\left(-c_{\zeta}n^{\gamma}\right) \tag{7.21}$$

が成り立つ．ただし, 各 $\underline{x} \in \Delta_k$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $E_{n,\underline{x}} = \mathbb{E}_{\Lambda_{2n}(n\underline{x})}$ である．

直積測度に対する評価に帰着可能な命題 7.7 の設定の下では, (7.3) をみたす α に対し $n = N^{\alpha}$ とすると次の補題を得る．

補題 7.9. $d \geq 3$ として, 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る. 任意に α を (7.3) をみたすように取り $n = N^\alpha$ とし, $r = d/(1+3d)$ とする. この時, 任意の $\delta \in (0,\infty)$, $\zeta \in (0, 1-\theta)$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\left| \left\{ \underline{x} \in \Delta_k : Z^{\zeta}_{\underline{x}} = 0 \right\} \right| \geq \delta N^{(1-\alpha)d} \right) = -\infty \tag{7.22}$$

が成り立つ.

証明. 命題 7.7 より

$$\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\left| \left\{ \underline{x} \in \Delta_k : Z^{\zeta}_{\underline{x}} = 0 \right\} \right| \geq \delta N^{(1-\alpha)d} \right) \leq 2^{N^{(1-\alpha)d}} \exp\left(-c_\zeta \delta N^{\alpha\gamma} N^{(1-\alpha)d} \right)$$

となるので, $\gamma = r = d/(3d+1)$ として (7.22) を得る. □

$N \in \mathbb{N}$, $\zeta \in (0,1)$ とし, $\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}$-*a.s.* (σ,ω) に対し $\mathcal{T}$ 上の関数 $\mathcal{Z}^{\zeta}_N(\cdot,(\sigma,\omega))$ を次のように定める ((σ,ω) を明示しない時は $\mathcal{Z}^{\zeta}_N(\cdot)$ と表す): 各 $t \in \mathcal{T}$ に対し

$$Nt \in \Gamma_{N^\alpha}(N^\alpha \underline{x})$$

をみたす唯一の $\underline{x} \in \Delta_k$ を取り,

$$\mathcal{Z}^{\zeta}_N(t,(\sigma,\omega)) = Z^{\zeta}_{\underline{x}}(\sigma,\omega) \tag{7.23}$$

とする. ただし, 各 $L \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $\Gamma_L(x) = x + (-L/2, L/2]^d$ である.

命題 7.10. $d \geq 3$ として, 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る. 任意に α を (7.3) をみたすように取り $n = N^\alpha$ とし, $r = d/(1+3d)$ とする. この時, 任意の $\delta \in (0, 3(1-\theta))$, $\zeta \in (0, \delta/3)$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\int_{\mathcal{T}} \left| m_\beta \mathcal{Z}^{\zeta}_N(t) - \mathcal{M}^{\zeta}_N(t) \right| dt \geq \delta \right) = -\infty \tag{7.24}$$

が成り立つ.

証明. (7.4), (7.13), (7.14), (7.23) より $\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}$-*a.s.* (σ,ω) に対し

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{T}} \left| m_\beta \mathcal{Z}^{\zeta}_N(t) - \mathcal{M}^{\zeta}_N(t) \right| dt &\leq \frac{1}{N^{(1-\alpha)d}} \sum_{\underline{x}\in\Delta_k} \left| m_\beta Z^{\zeta}_{\underline{x}} - M_{\underline{x}} \right| \\ &\leq \frac{1}{N^{(1-\alpha)d}} \sum_{\underline{x}\in\Delta_k} 1_{\{Z^{\zeta}_{\underline{x}}=0\}} + 3\zeta\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$\left\{ \int_{\mathcal{T}} \left| m_\beta \mathcal{Z}^{\zeta}_N(t) - \mathcal{M}^{\zeta}_N(t) \right| dt \geq \delta \right\} \subset \left\{ \left| \left\{ \underline{x} \in \Delta_k : Z^{\zeta}_{\underline{x}} = 0 \right\} \right| \geq (\delta - 3\zeta) N^{(1-\alpha)d} \right\}$$

であるので, 補題 7.9 より (7.24) を得る. □

7.4　命題 7.4 の証明

各 $s \in (0,1)$ に対し

$$\mathscr{B}'(s;\overrightarrow{e_d}) = \left\{ (R,B) : \begin{array}{c} \text{ある } t \in \mathbb{R}^d \text{ が存在して次をみたす:} \\ R = t + [-s/2, s/2]^d,\ B = t + [-s/2,s/2]^{d-1} \times \{0\} \end{array} \right\}$$

と定める．各 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ に対し Γ° は Γ の内部を表す．各 $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ に対し $\Gamma(O;\overrightarrow{n})$ は, Γ を $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$ が $\overrightarrow{n}$ に垂直となるように原点 O を中心に回転させたものを表す．各 $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$, $s \in (0,1)$ に対し

$$\mathscr{B}^\circ(s;\overrightarrow{n}) = \left\{ (R,B) : \begin{array}{c} \text{ある } (R',B') \in \mathscr{B}'(s;\overrightarrow{e_d}) \text{ が存在して次をみたす:} \\ R \subset \mathcal{T}^\circ,\ R = R'(O;\overrightarrow{n}),\ B \subset \mathcal{T}^\circ,\ B = B'(O;\overrightarrow{n}) \end{array} \right\}$$

と定め, $\mathscr{B}^\circ(s) = \{(R,B) : \text{ある } \overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ に対し } (R,B) \in \mathscr{B}^\circ(s;\overrightarrow{n}) \text{ である}\}$ と定める．すなわち, $\mathscr{B}^\circ(s)$ は $\mathcal{T}^\circ$ に含まれる一辺 s の超立方体の全体である．ここで, $\mathcal{T}^\circ = (-1/2,1/2)^d$ である．

定理 7.11. $d \geq 3$ として, 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る．この時, 任意の $m \in (m'_\beta, m_\beta]$, $\delta > 0$ に対しある多面体 $W \subset \mathcal{T}^\circ$ が存在して,

$$\chi_W \in \mathbb{V}\left(\chi_{\mathcal{W}_\beta(m)}, \frac{\delta}{3}\right), \qquad |\mathcal{F}_\beta(W) - \mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m))| \leq \frac{\delta}{2}$$

が成り立つ．さらに, $s \in (0,1)$ を十分小さく取ると, 適当な $l \in \mathbb{N}$ に対しある $\left\{(R^{(i)}, B^{(i)})\right\}_{i=1}^{l} \subset \mathscr{B}^\circ(s)$ が取れて,

$$\left| \sum_{i=1}^{l} \int_{B^{(i)}} \tau_\beta(\overrightarrow{n}_i)\, d\mathcal{H}_x - \mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m)) \right| \leq \delta, \qquad \mathcal{H}\left(\partial W \backslash \left(B^{(1)} \cup \cdots \cup B^{(l)}\right)\right) \leq \delta$$

が成り立つ．ただし, 任意の $1 \leq i \leq l$ に対し $\overrightarrow{n}_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ は $(R^{(i)}, B^{(i)}) \in \mathscr{B}^\circ(s;\overrightarrow{n}_i)$ をみたす W の外法線と同じ向きである．ここで, 各 $1 \leq i < j \leq l$ に対し $\overrightarrow{n}_i = \overrightarrow{n}_j$ となることもあることに注意する．

証明は省略する．

証明 (命題 7.4)．$\beta > \beta_c(d)$ とし, $m \in (m'_\beta, m_\beta]$, $\delta > 0$ とする．α を (7.3) をみたすように取り, $N \in \mathbb{N}$ を取る毎に $n = N^\alpha$ とする．さらに, $k \in \mathbb{N}$ は $N = (2k+1)n$ をみたすとする．$\zeta = \delta/4$ として, 記号から ζ を省略する．定理 7.11 より適当に多面体 $W \subset \mathcal{T}^\circ$ を取ると, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\left\{\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in \mathbb{V}\left(\mathcal{Z}_N, \frac{\delta}{3}\right)\right\} \cap \left\{\mathcal{Z}_N \in \mathbb{V}\left(\chi_W, \frac{\delta}{3}\right)\right\} \subset \left\{\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in \mathbb{V}\left(\chi_{\mathcal{W}_\beta(m)}, \delta\right)\right\} \quad (\mathbb{P}^\beta_{N,+}\text{-}a.s.)$$

が成り立つ．従って, 命題 7.10 より

(7.25)
$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mathbb{P}^\beta_{N,+}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in \mathbb{V}\left(\chi_{\mathcal{W}_\beta(m)}, \delta\right)\right) \geq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mathbb{P}^\beta_{N,+}\left(\mathcal{Z}_N \in \mathbb{V}\left(\chi_W, \frac{\delta}{3}\right)\right)$$

が成り立つ．各 $\varepsilon \in (0,1)$ に対し

$$\mathcal{S}^\varepsilon = \{t \in \mathcal{T} : d(t,\partial W) \leq \varepsilon\},$$
$$W^{\varepsilon,+} = \{t \in \mathcal{T}\backslash W : d(t,\partial W) > \varepsilon\}, \qquad W^{\varepsilon,-} = \{t \in W : d(t,\partial W) > \varepsilon\}$$

とする．ただし，$t,t' \in \mathbb{R}^d$ に対し $d(t,t') = \left((t_1-t_1')^2+\cdots(t_d-t_d')^2\right)^{\frac{1}{2}}$ とする．各ボレル集合 $\Gamma \subset \mathcal{T}$ に対し

$$\mathrm{vol}(\Gamma) = \int_{\mathcal{T}} 1_\Gamma(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{T}} (1-\chi_\Gamma(t))\,dt$$

とする．$\varepsilon \in (0,1)$ を $\mathrm{vol}\,(\mathcal{S}^\varepsilon) \le \delta/10$ をみたすように十分小さく取り，$s \in (0,1)$ を $s \le \varepsilon$ をみたすように取る．このような $\delta > 0$, $s \in (0,\varepsilon)$ に対して，$\left\{(R^{(i)},B^{(i)})\right\}_{i=1}^l \subset \mathscr{B}^\circ(s)$, $\{\overrightarrow{n}_i\}_{i=1}^l$ を定理 7.11 の主張をみたすように取り，$D = W\backslash(B^{(1)}\cup\cdots\cup B^{(l)})$ とする．各 $N\in\mathbb{N}$, $1\le i\le l$ に対し

$$R_N^{(i)} = (NR^{(i)})\cap\Lambda_N, \qquad D_N = \{x\in\Lambda_N : \text{ある } t\in D \text{ に対し } d(x,Nt)\le 10 \text{ である}\}$$

とし，$\mathcal{A}_N, \mathcal{B}_N \subset (\Omega_N\times)\widehat{\Omega}_N^{(w)}$ を

$$\mathcal{A}_N = \bigcap_{i=1}^l \left\{\partial^{+,\overrightarrow{n}_i}R_N^{(i)} \longleftrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\;| \;\; \partial^{-,\overrightarrow{n}_i}R_N^{(i)}\right\}, \qquad \mathcal{B}_N = \{\omega_e = 0\ (\forall e\in\mathbb{E}_{D_N})\}$$

と定める．この時，事象 $\{\partial^{+,\overrightarrow{n}_i}R_N^{(i)} \not\longleftrightarrow \partial^{-,\overrightarrow{n}_i}R_N^{(i)}\}$ $(1\le i\le l)$ が単調減少なので，定理 7.11 と FKG 不等式より

$$\begin{aligned}
(7.26)\quad \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\mathcal{A}_N) &\ge \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\prod_{i=1}^l \Phi_{R_N^{(i)},(w)}^{p_\beta,2}\left(\partial^{+,\overrightarrow{n}_i}R_N^{(i)} \not\longleftrightarrow \partial^{-,\overrightarrow{n}_i}R_N^{(i)}\right)\\
&= -\sum_{i=1}^l\int_{B^{(i)}}\tau_\beta(\overrightarrow{n}_i)\,d\mathcal{H}_x\\
&\ge -\mathcal{F}_\beta(\mathcal{W}_\beta(m)) - \delta
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，ある $c_\beta\in(0,\infty)$ が存在して十分大きな $N\in\mathbb{N}$ に対し

$$(7.27)\qquad \mathbb{P}_{N,+}^\beta\left(\mathcal{Z}_N \in \mathbb{V}\left(\chi_W, \frac{\delta}{3}\right)\right) \ge \frac{1}{4}\exp\left(-c_\beta\delta N^{d-1}\right)\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\mathcal{A}_N)$$

が成り立つことを示せば，(7.25), (7.26) と合わせて命題 7.4 を得る．

以後は特に断りなく，$N\in\mathbb{N}$ は十分大きいとする．$\epsilon = +$ もしくは $-$ に対し

$$\Delta_k^\epsilon = \{\underline{x}\in\Delta_k : \Lambda_n(n\underline{x}) \subset (NW^{\varepsilon,\epsilon})\cap\Lambda_N\}$$

とすると，FKG 不等式より

$$\begin{aligned}
\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\mathcal{A}_N)\,\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\mathcal{B}_N) &\le \mathbb{P}_{N,+}^\beta(\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N)\\
&= \mathbb{P}_{N,+}^\beta\left(|Z_{\underline{x}}| = 1\ (\forall\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-); \mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N\right)\\
&\quad + \mathbb{P}_{N,+}^\beta\left(|Z_{\underline{x}}| = 0\ (\exists\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-); \mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N\right)
\end{aligned}$$

となる．また，それぞれの定義より

$$\left(\bigcup_{i=1}^l \mathbb{E}_{R_N^{(i)}}\cup\mathbb{E}_{D_N}\right)\cap\bigcup_{\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-}\mathbb{E}_{\Lambda_{2n}(n\underline{x})} = \emptyset$$

であるので, 注意 7.8 より

$$\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(|Z_{\underline{x}}|=0\ (\exists\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-)\mid\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N\right)\le N^{(1-\alpha)d}\exp\left(-cN^{\alpha\gamma}\right)$$

が成り立つ. 従って事象 $\mathcal{B}_N$ の定義に注意すると, 適当な $c_\beta\in(0,\infty)$ に対し

$$\begin{aligned}\exp\left(-c_\beta\delta N^{d-1}\right)\Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left(\mathcal{A}_N\right)&\le\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N\right)\\&\le 2\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(|Z_{\underline{x}}|=1\ (\forall\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-);\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N\right)\end{aligned}\tag{7.28}$$

を得る. 事象 $\{|Z_{\underline{x}}|=1\ (\forall\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-)\}$ 上では, $(NW^{\varepsilon/2,+})\cap\Lambda_N^{(w)}$ 内のクラスター C^+ と $(NW^{\varepsilon/2,-})\cap\Lambda_N^{(w)}$ 内のクラスター C^- が存在して,

$$C^+\supset\bigcup_{\underline{x}\in\Delta_k^+}(C^*_{\underline{x}}\cap\Lambda_n(n\underline{x})),\quad C^+\cap\partial_{ex}\Lambda_N\neq\emptyset,\qquad C^-\supset\bigcup_{\underline{x}\in\Delta_k^-}(C^*_{\underline{x}}\cap\Lambda_n(n\underline{x}))$$

をみたす. さらに, 事象 $\{|Z_{\underline{x}}|=1\ (\forall\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-)\}\cap\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N$ 上では, $C^+\cap C^-=\emptyset$, $C^-\cap\partial_{ex}\Lambda_N=\emptyset$ となるので

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(|Z_{\underline{x}}|=1\ (\forall\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-);\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N\right)\\&=\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\mathcal{C}_N\right)+\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(Z_{\underline{x}}=1\ (\forall\underline{x}\in\Delta_k^+\cup\Delta_k^-);\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N\right)\\&=2\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\mathcal{C}_N\right)\end{aligned}\tag{7.29}$$

を得る. ただし,

$$\mathcal{C}_N=\mathcal{A}_N\cap\mathcal{B}_N\cap\left\{Z_{\underline{x}}=+1\ (\forall\underline{x}\in\Delta_k^+)\right\}\cap\left\{Z_{\underline{x}}=-1\ (\forall\underline{x}\in\Delta_k^-)\right\}$$

とする. しかるに, $\mathrm{vol}(\mathcal{S}^\varepsilon)\le\delta/10$, $\mathcal{T}=W^{\varepsilon,+}\cup W^{\varepsilon,-}\cup\mathcal{S}^\varepsilon$ であることより

$$\mathcal{C}_N\subset\left\{\mathcal{Z}_N\in\mathbb{V}\left(\chi_W,\frac{\delta}{3}\right)\right\}$$

となるので, (7.28), (7.29) と合わせて (7.27) を得る. □

7.5 命題 7.5 の証明

本稿では, $u\in\mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm1)$ ならば

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mu^{\beta}_{N,+}\left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta}\in\mathbb{V}(u,\delta)\right)\le-\mathcal{F}_\beta(u)\tag{7.30}$$

が成り立つことを, $u\in\mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm1)$ が $\partial^*u\subset\mathcal{T}^\circ$ をみたす場合についてのみ示す. $\partial^*u\cap\partial\mathcal{T}\neq\emptyset$ となる場合の証明も本質的には同様である.

各 $s\in(0,1)$, $\lambda\in(0,1)$ に対し

$$\mathscr{B}'(s,\lambda;\overrightarrow{e_d})=\left\{\begin{array}{c}\text{ある } t\in\mathbb{R}^d \text{ が存在して次をみたす:}\\(R,B):\ \ R=t+[-s/2,s/2]^{d-1}\times(-(\lambda s)/2,(\lambda s)/2],\\B=t+[-s/2,s/2]^{d-1}\times\{0\}\end{array}\right\}$$

と定める. 各 $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$, $s \in (0,1)$, $\lambda \in (0,1)$ に対し

$$\mathscr{B}^\circ(s,\lambda;\overrightarrow{n}) = \left\{ (R,B) : \begin{array}{c} \text{ある } (R',B') \in \mathscr{B}'(s,\lambda;\overrightarrow{e_d}) \text{ が存在して次をみたす:} \\ R \subset \mathcal{T}^\circ,\ R = R'(O;\overrightarrow{n}),\ B \subset \mathcal{T}^\circ,\ B = B'(O;\overrightarrow{n}) \end{array} \right\}$$

と定め, $\mathscr{B}^\circ(s,\lambda) = \{(R,B) : \text{ある } \overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ に対し } (R,B) \in \mathscr{B}^\circ(s,\lambda;\overrightarrow{n}) \text{ である}\}$ と定める. ただし, $\mathcal{T}^\circ = (-1/2,1/2)^d$ であって, 各 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, $\overrightarrow{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ に対し $\Gamma(O;\overrightarrow{n})$ は, Γ を $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$ が $\overrightarrow{n}$ に垂直となるように原点 O を中心に回転させたものである. 各 $(R,B) \in \mathscr{B}^\circ(s,\lambda;\overrightarrow{n})$ に対し

$$R^+ = \{t \in R : t \cdot \overrightarrow{n} \geq 0\}, \qquad R^- = \{t \in R : t \cdot \overrightarrow{n} < 0\}, \qquad \chi'_R = 1_{R^+} - 1_{R^-}$$

とする.

定理 7.12. 任意に $u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1)$ を $\partial^* u \subset \mathcal{T}^\circ$ をみたすように取る. この時, 任意の $\delta > 0$ に対し $s \in (0,1)$ を十分小さく取ると, 適当な $l \in \mathbb{N}$ に対しある $\left\{(R^{(i)},B^{(i)})\right\}_{i=1}^{l} \subset \mathscr{B}^\circ(s;\delta)$ が取れて,

$$\left| \sum_{i=1}^{l} \int_{B^{(i)}} \tau_\beta(\overrightarrow{n}_i)\, d\mathcal{H}_x - \mathcal{F}_\beta(u) \right| \leq \delta,$$

$$\int_{B^{(i)}} \left| \chi'_{R^{(i)}}(t) - u(t) \right| d\mathcal{H}_x \leq \delta \mathrm{vol}(R^{(i)}) \quad (1 \leq \forall i \leq l)$$

が成り立つ. ただし, 任意の $1 \leq i \leq l$ に対し $\overrightarrow{n}_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ は $(R^{(i)},B^{(i)}) \in \mathscr{B}^\circ(s,\delta;\overrightarrow{n}_i)$ をみたす $\{u=-1\}$ の $\partial^* u$ における唯一の外法線と同じ向きである. ここで, 各 $1 \leq i < j \leq l$ に対し $\overrightarrow{n}_i = \overrightarrow{n}_j$ となることもあることに注意する.

証明は省略する.

証明 (命題 7.5($\partial^* u \subset \mathcal{T}^\circ$)). $\beta > \beta_c(d)$ とする. $u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1)$ は $\partial^* u \subset \mathcal{T}^\circ$ をみたすとし, $\delta \in (0, 3(1-\theta))$ とする. α を (7.3) をみたすように取り, $N \in \mathbb{N}$ を取る毎に $n = N^\alpha$ とする. さらに, $k \in \mathbb{N}$ は $N = (2k+1)n$ をみたすとする. 各 $R \subset \mathcal{T}$, $\varepsilon > 0$ に対し

$$\mathbb{V}'(R,\varepsilon) = \left\{ v \in \mathrm{L}^1(\mathcal{T};[-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}]) : \int_R \left| v(t) - \chi'_R(t) \right| dt \leq \varepsilon \right\}$$

とする. 定理 7.12 の主張をみたす $\left\{(R^{(i)},B^{(i)})\right\}_{i=1}^{l} \subset \mathscr{B}^\circ(s;\delta)$, $\{\overrightarrow{n}_i\}_{i=1}^{l}$ を適当に取り,

$$F(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{l} \mathbb{V}'(R^{(i)}, \varepsilon \mathrm{vol}(R^{(i)})$$

とする. δ と s に対し $\zeta \in (0,1)$ を十分小さく取ると命題 7.10 より

$$\begin{aligned} \lim_{\delta' \to 0} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mu_{N,+}^{\beta} \left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in \mathbb{V}(u,\delta') \right) &\leq \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mu_{N,+}^{\beta} \left(\frac{\mathcal{M}_N}{m_\beta} \in F(2\delta) \right) \\ &\leq \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \mathbb{P}_{N,+}^{\beta} \left(\mathcal{Z}_N^{\zeta} \in F(3\delta) \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. しかるに, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sharp \left\{ z_N \in \mathrm{L}^1(\mathcal{T};[-m_\beta^{-1}, m_\beta^{-1}]) : \mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\left(\mathcal{Z}_N = z_N\right) > 0 \right\} \leq 3^{N^{(1-\alpha)d}} \tag{7.31}$$

が成り立つので, $(1-\alpha)d < d-1$ に注意すると,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-1}} \log \left(\sup_{z_N \in F(3\delta)} \mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\mathcal{Z}^{\zeta}_N = z_N \right) \right) \le -\mathcal{F}_\beta(u) + c_{\beta,u}\delta \tag{7.32}$$

を示せば (7.30) を得る. ただし, $c_{\beta,u} \in (0,\infty)$ である.

以後は特に断りなく, $N \in \mathbb{N}$ は十分大きいとし $c \in (0,\infty)$ とする. ここで, $c \in (0,\infty)$ は行毎に異なる場合があることに注意する. また表記の簡単の為に, 記号から ζ を省略し, $\mathcal{Z}_N$ の実現値も $\mathcal{Z}_N$ と表し, その実現値が $\mathcal{Z}_N$ である事象を $\{\mathcal{Z}_N\}$ と表す. 任意に $\mathcal{Z}_N \in F(3\delta)$ を取る. 各 $1 \le i \le l$ に対し $\widetilde{R}^{(i)}$ を

$$\widetilde{R}^{(i)} \subset R^{(i)}, \qquad (\widetilde{R}^{(i)}, B^{(i)}) \in \mathscr{B}^{\circ}(s, \delta/2; \overrightarrow{n}_i)$$

をみたす唯一のものとし,

$$R^{(i)}_N = (NR^{(i)}) \cap \Lambda_N, \qquad \widetilde{R}^{(i)}_N = (N\widetilde{R}^{(i)}) \cap \Lambda_N$$

とする. さらに, $\epsilon = +$ もしくは $-$ に対し

$$R^{(i),\epsilon}_N = NR^{(i),\epsilon} \cap \Lambda_N, \qquad \Xi^{(i),\epsilon}_N = \partial_{ex}\widetilde{R}^{(i)}_N \cap R^{(i),\epsilon}_N,$$
$$\Delta^{(i)}_k = \{\underline{x} \in \Delta_k : \Lambda_n(n\underline{x}) \cap R^{(i)}_N \ne \emptyset\}, \qquad \Delta^{(i),\epsilon}_k = \{\underline{x} \in \Delta_k : \Lambda_n(n\underline{x}) \cap R^{(i),\epsilon}_N \ne \emptyset\},$$
$$\widetilde{\Delta}^{(i),\epsilon}_k = \{\underline{x} \in \Delta_k : \Lambda_n(n\underline{x}) \cap \widetilde{R}^{(i),\epsilon}_N \ne \emptyset\}$$

とする.

任意に $1 \le i \le l$ を取る. 事象 $\{\mathcal{Z}_N\}$ 上で, $\Lambda_n(n\underline{x})$ $(\underline{x} \in \Delta^{(i)}_k)$ が悪いとは,

$$\text{(i) } Z_{\underline{x}} = 0, \qquad \text{(ii) } Z_{\underline{x}} = -1, \quad \Lambda_n(n\underline{x}) \cap R^{(i),+}_N \ne \emptyset, \qquad \text{(iii) } Z_{\underline{x}} = +1, \quad \Lambda_n(n\underline{x}) \cap R^{(i),-}_N \ne \emptyset,$$

すなわち,

$$\text{(i) } Z_{\underline{x}} = 0, \qquad \text{(ii) } Z_{\underline{x}} = -1, \quad (\underline{x} \in \Delta^{(i),+}_k), \qquad \text{(iii) } Z_{\underline{x}} = +1, \quad (\underline{x} \in \Delta^{(i),-}_k)$$

のいずれかをみたす時に言う. また, $\Lambda_n(n\underline{x})$ が良いとは (i)–(iii) のいずれもみたさない時に言う. この時, $G^{(i)}_N = \{y \in \Lambda_N : \underline{x} \in \Delta^{(i)}_k$ である良い $\Lambda_n(n\underline{x})$ が存在して $y \in \Lambda_n(n\underline{x})$ である $\}$ とし, $G^{(i)}_N$ 内のクラスター $C(G^{(i)}_N)$ を取ると,

$$C(G^{(i)}_N) \cap \Xi^{(i),+}_N = \emptyset \quad \text{もしくは} \quad C(G^{(i)}_N) \cap \Xi^{(i),-}_N = \emptyset \tag{7.33}$$

が成り立つ. まず悪い $\Lambda_n(n\underline{x})$ の数を評価する.

$$\left| N^{(1-\alpha)d} \int_{R^{(i),+}} |\mathcal{Z}_N(t) - 1| \, dt - \sum_{\underline{x} \in \Delta_k} 1_{\{\Lambda_n(n\underline{x}) \cap R^{(i),+}_N \ne \emptyset\}} |Z_{\underline{x}} - 1| \right| \le c \left(sN^{(1-\alpha)} \right)^{d-1}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \underline{x} \in \Delta^{(i),+}_k : \Lambda_n(n\underline{x}) \text{ は悪い} \right\} \right| &\le \sum_{\underline{x} \in \Delta_k} 1_{\{\Lambda_n(n\underline{x}) \cap R^{(i),+}_N \ne \emptyset\}} |Z_{\underline{x}} - 1| \\ &\le c \left(sN^{(1-\alpha)} \right)^{d-1} + 3\delta \mathrm{vol}(R^{(i)}) N^{(1-\alpha)d} \end{aligned} \tag{7.34}$$

を得る. 同様にして,

$$\left|\left\{\underline{x} \in \Delta_k^{(i),-} : \Lambda_n(n\underline{x}) \text{ は悪い}\right\}\right| \le c\left(sN^{(1-\alpha)}\right)^{d-1} + 3\delta \mathrm{vol}(R^{(i)})N^{(1-\alpha)d} \tag{7.35}$$

を得る. 次に $\widetilde{\Delta}_k^{(i),+}$ と $\widetilde{\Delta}_k^{(i),-}$ から悪い $\Lambda_n(n\underline{x})$ が最も少なくなる階層をそれぞれ取り出す (正確な定義は [B99, BIV00] 参照). $\widetilde{\Delta}_k^{(i),+}$ から $\overrightarrow{n}_i$ の方向を基準にして互いに素ないくつかの階層を少なくとも $c\delta sN^{1-\alpha}$ は取り出す. この時, (7.34), (7.35) と階層の数が少なくとも $c\delta sN^{1-\alpha}$ であることより, 各階層の悪い $\Lambda_n(n\underline{x})$ の数に関する最小値 m_i^+ は

$$m_i^+ \le cs^{d-1}\delta N^{(1-\alpha)(d-1)}$$

をみたす. 同様にして, $(-\overrightarrow{n}_i)$ の方向の各階層の悪い $\Lambda_n(n\underline{x})$ の数に関する最小値 m_i^- も

$$m_i^- \le cs^{d-1}\delta N^{(1-\alpha)(d-1)}$$

をみたす. 従って, ある $c_u \in (0,\infty)$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{l}\left(m_i^+ + m_i^-\right) \le c_u \delta N^{(1-\alpha)(d-1)} \tag{7.36}$$

が成り立つ.

各 $1 \le i \le l$, $\epsilon \in \{+,-\}$ に対し

$$S^{(i),\epsilon} = \{\underline{x} \in \widetilde{\Delta}_k^{(i),\epsilon} : \underline{x} \text{は } m_i^\epsilon \text{ を実現する (特別な) 階層に属し } \Lambda_n(n\underline{x}) \text{ は悪い}\ \}$$

とし,

$$E(\mathcal{Z}_N) = \bigcup_{i=1}^{l}\bigcup_{\epsilon\in\{+,-\}}\left\{\{y,z\} \in \mathbb{E}^d : y \in \Lambda_n(n\underline{x}),\ z \notin \Lambda_n(n\underline{x})\ (\exists \underline{x} \in S^{(i),\epsilon})\right\}$$

とする. 事象 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} = \{\omega \in \widehat{\Omega}_N^{(w)}$: ある $\sigma \in \Omega_N$ が存在して $(\sigma,\omega) \in \{\mathcal{Z}_N\}$ である $\}$ と定め, 各 $\omega \in \mathcal{A}$ に対して $\widetilde{\omega}$ を

$$\widetilde{\omega}_e = 0 \quad (e \in E(\mathcal{Z}_N)), \qquad \widetilde{\omega}_e = \omega_e \quad (e \notin E(\mathcal{Z}_N))$$

と定める. この時, (7.33) より

$$\forall \omega \in \mathcal{A}, \qquad \widetilde{\omega} \in \bigcap_{i=1}^{l}\left\{R_N^{(i)}\text{内で}\Xi_N^{(i),+} \not\longleftrightarrow \Xi_N^{(i),-}\right\}$$

が成り立つ. 従って, (7.36) より $|E(\mathcal{Z}_N)| \le dc_u\delta N^{d-1}$ となることに注意して定理 4.5 を用いると,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{N,+}^{\beta}\left(\mathcal{Z}_N\right) &\le \Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}(\mathcal{A}) \\ &\le \exp\left(c'_{\beta,u}\delta N^{d-1}\right)\Phi_{N,(w)}^{p_\beta,2}\left(\bigcap_{i=1}^{l}\left\{R_N^{(i)}\text{内で}\Xi_N^{(i),+} \not\longleftrightarrow \Xi_N^{(i),-}\right\}\right) \end{aligned} \tag{7.37}$$

を得る. ただし, $c'_{\beta,u} \in (0,\infty)$ である. しかるに, $\Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)} = \phi^{p_\beta,2}_{(N+1),w}\left(\cdot \mid \omega_e = 1 \ (\forall e \in \mathbb{E}_{\partial_{in}\Lambda_{N+1}})\right)$ に注意すると, FKG 不等式より

$$
\begin{aligned}
&\Phi^{p_\beta,2}_{N,(w)}\left(\bigcap_{i=1}^{l}\left\{R_N^{(i)}\text{内で}\Xi_N^{(i),+} \longleftrightarrow \Xi_N^{(i),-}\right\}\right)\\
&\le \phi^{p_\beta,2}_{N+1,w}\left(\phi^{p_\beta,2}_{R_N^{(l)},\cdot}\left(\left\{\Xi_N^{(l),+} \longleftrightarrow \Xi_N^{(l),-}\right\}\right); \bigcap_{i=1}^{l-1}\left\{R_N^{(i)}\text{内で}\Xi_N^{(i),+} \longleftrightarrow \Xi_N^{(i),-}\right\}\right)\\
&\le \phi^{p_\beta,2}_{R_N^{(l)},f}\left(\left\{\Xi_N^{(l),+} \longleftrightarrow \Xi_N^{(l),-}\right\}\right)\phi^{p_\beta,2}_{N+1,w}\left(\bigcap_{i=1}^{l-1}\left\{R_N^{(i)}\text{内で}\Xi_N^{(i),+} \longleftrightarrow \Xi_N^{(i),-}\right\}\right)\\
&\ \vdots\\
&\le \prod_{i=1}^{l}\phi^{p_\beta,2}_{R_N^{(i)},f}\left(\left\{\Xi_N^{(i),+} \longleftrightarrow \Xi_N^{(i),-}\right\}\right)
\end{aligned}
$$

となる. 従って, 定理 6.10 と定理 7.12 と (7.37) より

$$
\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\left(\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\{\mathcal{Z}_N\}\right)\right) \le -\mathcal{F}_\beta(u) + \delta + c_\beta\delta s^{d-1}l + c'_{\beta,u}\delta
$$

となるので,

$$
s^{d-1}l\tau_\beta^{\min} \le \sum_{i=1}^{l}\int_{B^{(i)}}\tau_\beta(\overrightarrow{n}_i)\,d\mathcal{H}_x \le \mathcal{F}_\beta(u) + 3
$$

に注意すると (7.32) を得る.

□

7.6 命題 7.6 の証明

命題 7.10 より次の補題 7.13 を示せば命題 7.6 を得る.

補題 7.13. $d \ge 3$ として, 任意に $\beta > \beta_c(d)$ を取る. 任意に α を (7.3) をみたすように取り $n = N^\alpha$ とし, $r = d/(1+3d)$ とする. 任意に $\delta \in (0, 3(1-\theta))$, $\zeta \in (0, \delta/3)$ を取る. この時, ある $c_\beta \in (0,\infty)$ が存在して任意の $a > 0$ に対し

$$
\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-1}}\log\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\mathcal{Z}_N \in \mathbb{V}(K_\beta(a),\delta)^c\right) \le -c_\beta a \tag{7.38}
$$

が成り立つ. ただし, 各 $a > 0$ に対し $K_\beta(a) = \{u \in \mathrm{BV}(\mathcal{T};\pm 1) : \mathcal{F}_\beta(u) \le a\}$ である.

証明. $\beta > \beta_c(d)$ とする. $\delta \in (0, 3(1-\theta))$, $\zeta \in (0, \delta/3)$ とし, 記号から ζ を省略する. また表記の簡単の為に, $\mathcal{Z}_N$ の実現値も $\mathcal{Z}_N$ と表し, その実現値が $\mathcal{Z}_N$ である事象を $\{\mathcal{Z}_N\}$ と表す. 以後は特に断りなく, $N \in \mathbb{N}$ は十分大きいとし $c \in (0,\infty)$ とする. ここで, $c \in (0,\infty)$ は行毎に異なる場合があることに注意する. $(1-\alpha)d < d-1$ に注意すると (7.31) より, $\mathcal{Z}_N \in \mathbb{V}(K_\beta(a),\delta)^c$ を任意に取り

$$
\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\{\mathcal{Z}_N\}\right) \le c\exp\left(-c_\beta a N^{d-1}\right) \tag{7.39}
$$

を示せば (7.38) を得る．ただし，$c_\beta \in (0,\infty)$ である．

$\mathcal{Z}_N \in \mathbb{V}(K_\beta(a),\delta)^c$ とする．互いに素な $\mathcal{T}^+,\mathcal{T}^-,\mathcal{T}^0 \subset \mathcal{T}$ を

$$\mathcal{Z}_N(t)=+1 \quad (t\in\mathcal{T}^+), \qquad \mathcal{Z}_N(t)=-1 \quad (t\in\mathcal{T}^-), \qquad \mathcal{Z}_N(t)=0 \quad (t\in\mathcal{T}^0),$$
$$\mathcal{T}^+\cup\mathcal{T}^-\cup\mathcal{T}^0=\mathcal{T}$$

をみたすように取り，

$$\Lambda_N^+=(N\mathcal{T}^+)\cap\mathbb{Z}^d, \qquad \Lambda_N^-=(N\mathcal{T}^-)\cap\mathbb{Z}^d$$

とする．この時，任意の $\Lambda_N^{(w)}$ 内のクラスター C は

$$C\cap(\Lambda_N^+\cup\partial_{ex}\Lambda_N)=\emptyset \quad \text{もしくは} \quad C\cap\Lambda_N^-=\emptyset \tag{7.40}$$

をみたす．また補題 7.9 より

$$\mathrm{vol}(\mathcal{T}^0)=\int_{\mathcal{T}} 1_{\{\mathcal{Z}_N=0\}}(t)\,dt\le\delta \tag{7.41}$$

としてもよい．ここで，ボレル集合 $A\subset\mathcal{T}$ が $\mathcal{P}(A)<\infty$, $\mathcal{T}^-\subset A\subset\mathcal{T}\backslash\mathcal{T}^+$ をみたすならば，

$$\int_{\partial^* A} d\mathcal{H}_x \ge \frac{a}{\tau_\beta^{\max}} \tag{7.42}$$

が成り立つことを背理法を用いて示す．ただし，$\tau_\beta^{\max}=\max\{\tau_\beta(\overrightarrow{n}) : \overrightarrow{n}\in\mathbb{S}^{d-1}\}<\infty$ とする．いま，

$$\mathcal{F}_\beta(A)=\int_{\partial^* A}\tau_\beta(\overrightarrow{n}_x)\,d\mathcal{H}_x\le\tau_\beta^{\max}\int_{\partial^* A} d\mathcal{H}_x\le a$$

となるが，(7.41) と A の取り方より

$$\int_{\mathcal{T}}|\chi_A(t)-\mathcal{Z}_N(t)|\,dt\le\delta$$

であるので，$\mathcal{Z}_N\in\mathbb{V}(K_\beta(a),\delta)^c$ に矛盾である．

以後，粗視化をもう一度行う為に $k',L\in\mathbb{N}$ に対し $n=(2k'+1)L$ をみたす場合だけを考える．$l=2(2kk'+k+k')$ とする．この時，$N=(2l+1)L$ であることに注意する．各 $\underline{x}_L\in\Delta_l$ に対し事象 $\mathcal{R}_{\underline{x}_L}\subset\widehat{\Omega}_N^{(w)}$ を

$$\mathcal{R}_{\underline{x}_L}=\mathcal{U}_{\underline{x}_L}\cap\left\{\begin{array}{c} C^*_{\underline{x}_L}\text{ 以外には, }\mathrm{diam}_\infty(C(\Lambda_{2L}(L\underline{x}_L)))\ge L^r\text{ をみたす} \\ \Lambda_{2L}(L\underline{x}_L)\text{ 上のクラスター }C(\Lambda_{2L}(L\underline{x}_L))\text{ は存在しない}\end{array}\right\},$$
$$\mathcal{U}_{\underline{x}_L}=\left\{\Lambda_{2L}(L\underline{x}_L)\text{ 内に }\Lambda_{2L}(L\underline{x}_L)\text{-横断クラスター }C^*_{\underline{x}_L}(\Lambda_{2L}(L\underline{x}_L))\text{ が唯一存在する}\right\}$$

と定め，$X_{\underline{x}_L}$ を

$$X_{\underline{x}_L}(\omega)=1 \quad (\omega\in\mathcal{R}_{\underline{x}_L}), \qquad X_{\underline{x}_L}(\omega)=1 \quad (\text{その他})$$

と定める．$(\Delta_l,\{\{\underline{x}_L,\underline{y}_L\}\in\mathbb{E}^{d,*} : X_{\underline{x}_L}=X_{\underline{y}_L}=1\})$ の各連結成分を (Δ_l 内のスケール L である)$*$-クラスターと呼び，$\underline{x}_L$ を含む $*$-クラスターを $(\underline{C}_L^\infty)_{\underline{x}_L}$ と表す．ただし，$\mathbb{E}^{d,*}=\{\{x,y\} : x,y\in\mathbb{Z}^d$であって $d_\infty(x,y)=1$ である $\}$ とする．ここで，

$$\left\{z\in\Lambda_N :\ \text{ある }\underline{y}_L\in(\underline{C}_L^\infty)_{\underline{x}_L}\text{ が存在して }z\in C^*_{\underline{y}_L}\text{ である}\right\}$$

は連結であって同一のクラスターに含まれることに注意する．$\Delta_l^+, \Delta_l^- \subset \Delta_l$ を

$$\Delta_l^+ = \left\{\underline{x}_L \in \Delta_l : \Lambda_L(L\underline{x}_L) \subset \Lambda_N^+\right\}, \qquad \Delta_l^- = \left\{\underline{x}_L \in \Delta_l : \Lambda_L(L\underline{x}_L) \subset \Lambda_N^-\right\}$$

とし,

$$\widetilde{A}_N = \Lambda_N^- \cup \bigcup_{\underline{x}_L \in \Delta_l^-} \left\{z \in \Lambda_N : \text{ある } \underline{y}_L \in (\underline{C}_L^\infty)_{\underline{x}_L} \text{ が存在して } z \in \Lambda_L(L\underline{y}_L) \text{ である}\right\}$$

とする．(7.40) より, 任意の Δ_l 内のクラスター $\underline{C}_L$ は

$$\underline{C}_L \cap (\Delta_l^+ \cup (\partial_{in}\Delta_l \backslash \Delta_l^-)) = \emptyset \quad \text{もしくは} \quad \underline{C}_L \cap \Delta_l^- = \emptyset$$

をみたすので,

$$\Lambda_N^- \subset \widetilde{A}_N \subset \Lambda_N \backslash \Lambda_N^+$$

が成り立つ．$G_N = \Lambda_N \backslash \widetilde{A}_N (\supset \Lambda_N^+)$ とし, $\Delta_{l,G} = \{\underline{x}_L \in \Delta_l : \Lambda_L(L\underline{x}_L) \subset G_N\}$ とする．$\Delta_{l,G}$ が $*$-連結であるとは限らないので, $(\Delta_{l,G}, \{\{\underline{x}_L, \underline{y}_L\} \in \mathbb{E}^{d,*} : \underline{x}_L, \underline{y}_L \in \Delta_{l,G}\})$ の連結成分全体を $\{\Delta_{l,G}^{(i)}\}_{i=1}^J$ と表す．この時, $\underline{x} \in \Delta_k$ を $Z_{\underline{x}} = +1$ をみたすように取ると, $\{\underline{y}_L \in \Delta_l^+ : \Lambda_L(L\underline{y}_L) \subset \Lambda_n(n\underline{x})\}$ は同一の連結成分に含まれる．従って,

$$J^{\mathrm{s}} = \left\{1 \le i \le J : \left|\Delta_{l,G}^{(i)}\right| < (2k'+1)^d\right\}, \qquad J^{\mathrm{b}} = \{1 \le i \le J : i \notin J^{\mathrm{s}}\}$$

として,

$$A_N = \widetilde{A}_N \cup \bigcup_{i \in J^{\mathrm{s}}} \left\{y \in \Lambda_N : \text{ある } \underline{x}_L \in \Delta_{l,G}^{(i)} \text{ が存在して } y \in \Lambda_L(L\underline{x}_L) \text{ である}\right\}$$

とすると,

$$\Lambda_N^- \subset A_N \subset \Lambda_N^+ \tag{7.43}$$

が成り立つ．

$\Delta_{l,A} = \{\underline{x}_L \in \Delta_l : \Lambda_L(L\underline{x}_L) \subset A_N\}$ とすると,

$$\partial_{ex}\Delta_{l,A} \subset \bigcup_{i \in J^{\mathrm{b}}} \partial_{in}\Delta_{l,G}^{(i)}$$

であって, 等周不等式より

$$\forall i \in J^{\mathrm{b}}, \qquad \left|\partial_{in}\Delta_{l,G}^{(i)}\right| \ge c\left(\frac{N^\alpha}{L}\right)^{d-1} \tag{7.44}$$

をみたす．さらに, (7.42), (7.43) と等周不等式より

$$\sum_{i \in J^{\mathrm{b}}} \left|\partial_{in}\Delta_{l,G}^{(i)}\right| \ge ca\left(\frac{N}{L}\right)^{d-1} \tag{7.45}$$

をみたす．しかるに, 定理 5.8 と $(X_{\underline{x}_L})_{\underline{x}_L \in \Delta_l}$ の定義より

$$\limsup_{L \to \infty} \frac{1}{L^r} \log \mathbb{P}_{N,+}^\beta \left(X_{\underline{x}_L} = 0 \,\middle|\, \left(X_{\underline{y}_L} : d_\infty(\underline{y}_L, \underline{x}_L) \ge 2\right)\right) < 0$$

となるので，$L \in \mathbb{N}$ を十分大きく取り定理 4.4 とパイエルス型議論を用いると，(7.44), (7.45) より (7.39) を得る．

最後に，ここで用いたパイエルス型議論について述べておく．区別のつかない総数 m 個の集合を各集団が少なくとも s 個から成る j 個の (区別のある) 集団に分割するには ($m \geq sj$ として),

$$\binom{m - sj + j}{j}$$

通りの方法がある．以後，$s = \lceil cN^{\alpha(d-1)} L^{1-d} \rceil$ とし，$X_{\underline{x}_L} = X_{\underline{y}_L} = 0$ ($\underline{x}_L \sim \underline{y}_L$) から定まる連結性を用いる．連結成分の代表点の選び方を考慮すると，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{\beta}_{N,+}\left(\left| \left\{ \underline{x}_L : \begin{array}{c} X_{\underline{x}_L} = 0 \text{ であって,} \\ \underline{x}_L \text{は頂点数 } s \text{ 以上の連結成分に属する} \end{array} \right\} \right| = m \right) \\
&\leq \sum_{j \leq (m/s)} \binom{N^d L^{-d}}{j} \binom{m - sj + j}{j} \exp\left(-(cL^r - \log \kappa_d) m\right) \\
&\leq \frac{m}{s} \exp\left(-(cL^r - ds^{-1} - \log 2 - \log \kappa_d) m\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，κ_d は連結定数であって $\kappa_d \in (0, 2d-1)$ をみたす． □

注意 7.14. 補題 7.13 の証明の後半では，A_N の (スケール L の) 外部境界は $\{\Lambda_L(L\underline{x}_L) : X_{\underline{x}_L} = 0\}$ のいくつかの連結成分で構成されるが，$X_{\underline{x}_L} = 0$ となる確率が非常に小さいために，A_N はそれ程大きくはなれないということを主張している．また，このことと定理 5.14 が成り立つ背景には共通性がみられる．

参考文献

[AB90] L. Ambrosio, A. Braides: Functionals defined on partitions in sets of finite perimeter II: Semicontinuity, relaxation and homogenization. J. Math. pures et appl., **69** (1990) 307–333.

[Al92] K.S. Alexander: Stability of the Wulff minimum and fluctuations in shape for large finite clusters in two-dimensional percolation. Probab. Theory Rela. Fields, **91** (1992) 507–532.

[ACC90] K.S. Alexander, J.T. Chayes, L. Chayes: The Wulff construction and asymptotics of the infinite cluster distribution for two-dimensional Bernoulli percolation. Comm. Math. Phys., **131** (1990) 1–50.

[B99] T. Bodineau: The Wulff construction in three and more dimensions. Comm. Math. Phys., **207** (1999) 197–229.

[B05] T. Bodineau: Slab percolation for the Ising model. Probab. Theory Rela. Fields, **132** (2005) 83–118.

[B06] T. Bodineau: Translation invariant Gibbs states for the Ising model. Probab. Theory Rela. Fields, **135** (2006) 153–168.

[BIV00] T. Bodineau, D. Ioffe, Y. Velenik: Rigorous probabilistic analysis of equilibrium crystal shapes. Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics. J. Math. Phys., **41** (2000) 1033–1098.

[BIV01] T. Bodineau, D. Ioffe, Y. Velenik: Winterbottom construction for finite range ferromagnetic models: an $\mathbb{L}_1$-approach. J. Stat. Phys., **105** (2001) 93–131.

[BM02] T. Bodineau, F. Martinelli: Some new results on the kinetic Ising model in a pure phase. J. Stat. Phys., **109** (2002) 207–235.

[CP00] R. Cerf, A. Pisztora: On the Wulff crystal in the Ising model. Ann. Probab., **28** (2000) 947–1017.

[CP01] R. Cerf, A. Pisztora: Phase coexistence in Ising, Potts and percolation models. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat., **37** (2001) 643–724.

[CGMS96] F. Cesi, G. Guadagni, F. Martinelli, R.H. Schonmann: On the 2D stochastic Ising model in the phase coexistence region near the critical point. J. Stat. Phys., **85** (1996) 55–102.

[Co86] F. Comets: Grandes deviations pour des champs de Gibbs sur $\mathbb{Z}^d$. C.R.Acad.Sci.Ser.I, **303** (1986) 511–513.

[DP96] J.-D. Deuschel, A. Pisztora: Surface order large deviations for high-density percolation. Probab. Theory Relat. Fields, **104** (1996) 467–482.

[DKS92] R.L. Dobrushin, R. Kotecký, S.B. Shlosman: Wulff Construction. A Global Shape from Local Interaction. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1992.

[EG92] L. Evans, R. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions. CRC Press, London, 1992.

[FO88] H. Föllmer, S. Orey: Large deviations for the empirical field of a Gibbs measure. Ann. Probab., **16** (1988) 961–977.

[Geo88] H-O. Georgii: Gibbs Measures and Phase Transitions. Walter de Gruyter, 1988.

[Gri99] G.R. Grimmett: Percolation. second edition. Springer Verlag, 1999.

[Gri06] G.R. Grimmett: The Random-Cluster Model. Springer Verlag, 2006.

[GM90] G.R. Grimmett, J.M. Marstrand: The supercritical phase of percolation is well behaved. Proc. R. Soc. Lond. A, **430** (1990) 439–457.

[H92] 樋口 保成: パーコレーション ちょっと変わった確率論入門. 遊星社, 1992.

[H98] 樋口 保成: 現代の数理物理 別冊 · 数理科学. サイエンス社, 1998.

[I95] D. Ioffe: Exact large deviation bounds up to T_c for the Ising model in two dimensions. Probab. Theory Relat. Fields, **102** (1995) 313–330.

[I94] D. Ioffe: Large deviations for the 2D Ising model: A lower bound without cluster expansions. J. Stat. Phys., **74** (1994) 411–432.

[KH06] 黒田耕嗣, 樋口保成: 統計力学 相転移の数理, 培風館, 2006.

[LP81] J. Lebowitz, C.E. Pfister: Surface tension and phase coexistence. Phys. Rev. Lett., **46** (1981) 1031–1033.

[LSS97] T.M. Liggett, R.H. Schonmann, A.M. Stacey: Domination by product measures. Ann. Probab., **25** (1997) 71–95.

[MMR92] A. Messager, S. Miracle-Solé, J. Ruiz: Convexity property of the surface tension and equilibrium crystals. J. Stat. Phys., **67** (1992) 449–470.

[O88] S. Olla: Large deviations for Gibbs random fields. Probab. Theory Rela. Fields, **77** (1988) 343–357.

[P96] A. Pisztora: Surface order large deviations for Ising, Potts and percolation models. Probab. Theory Relat. Fields, **104** (1996) 427–466.

[Sch87] R.H. Schonmann: Second order large deviation estimates for ferromagnetic system in the phase coexistence region. Comm. Math. Phys., **112** (1987) 409–422.

[SS96] R.H. Schonmann, S.B. Shlosman: Constrained variational problem with applications to the Ising model. J. Stat. Phys., **83** (1996) 867–905.