対称マルコフ過程の加法汎関数に関する話題

竹田 雅好

1. 序

A. Beurling と J. Deny [4], [5] がディリクレ空間の概念を導入し, ポテンシャル論を展開した. ディリクレ空間のポテンシャル論を用いて福島正俊 [27] は, ディリクレ空間から対称な Hunt 過程を構成することに成功した. それ以来, ディリクレ空間の理論は対称な Hunt 過程の構成と解析の有効な道具として発展してきた ([8], [29], [42], [54]). ディリクレ空間の理論は L^2-理論であり, すべての出発点に対して Hunt 過程が構成されるわけではない. ディリクレ空間から容量が定義され, その容量に関して零の除外集合を許して一意的に構成される. このことはディリクレ空間による構成方法の弱点であるが, 特異なマルコフ過程の構成を可能にしているという意味で利点でもある.

マルコフ過程論は分布を問題にするという意味で L^1-理論であり, すべての出発点を問題にするという意味で C-理論であり L^∞-理論である. L^2-理論であるディリクレ空間論とのギャップを埋めるために, ディリクレ空間の生成するマルコフ半群, さらに一般化した Feynman–Kac (Schrödinger) 半群の増大度に関する L^p-独立性を示す ([60], [63], [70]). 対称マルコフ過程の L^∞-的性質に関する必要十分条件を L^2-スペクトラムの下限の言葉で与えることを L^p-独立性は可能にする. 例えば, Feynman–Kac 汎関数の可積分性 (gaugeability) や Schrödinger 作用素の熱核がガウス型評価を持つための必要十分条件などが, L^2-スペクトラムの下限を用いて与えられる ([61]), [62]). L^p-独立性の証明には, Donsker–Varadhan([23], [24]) による大偏差原理証明のアイデアが用いられる. 特に, レート関数とディリクレ形式の同定が重要である. この講義の主な目的は, 加法汎関数の漸近挙動を時間変更過程の L^p-独立性を用いて調べることにある.

正の連続加法汎関数 (PCAF) による時間変更の理論は, マルコフ過程論において基本的な道具である. マルコフ過程が対称性を満たすときは, その時間変更過程も対称であり, 生成するディリクレ空間は定義域をこめて完全に同定できる ([15], [29]). このことは, ディリクレ形式とマルコフ過程の対応における最も大切な事実のひとつである. マルコフ過程の境界値問題に対しても重要な役割を果たしている (Chen-Fukushima[15]). ここでは, M. Kac による公式の別証明と拡張を, 応用例として与えておこう.

最初の公式は [37] で示されたものである: $(B_t, \mathbb{P}_x^W)$ を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上のブラウン運動とし, K を滑らかな (いわゆる *Kac regularity* を満たす) 境界を持つコンパクト集合とする. このとき

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mathbb{P}_x^W \left(\int_0^\infty 1_K(B_t)dt > \beta \right) = -\frac{1}{\lambda_2} \tag{1.1}$$

が成り立つ. ここで $1/\lambda_2$ は

$$Gf(x) = \frac{1}{\pi} \int_K \frac{f(y)}{|x-y|} dy, \quad f \in L^2(K; dx) \tag{1.2}$$

で定義される作用素 G の最大固有値である. この公式は, 時間変更過程の生存時間に関する公式と考えられる. もっと正確に述べるために, $(Y_t, \check{\mathbb{P}}_x)$ を PCAF $\int_0^t 1_K(B_s)ds$ による時間変更過程とする. Y_t の生存時間 $\check{\zeta}$ は $\int_0^\infty 1_K(B_t)dt$ に等しいことに注意すると, 式 (1.1) における確率は $\check{\mathbb{P}}_x(\check{\zeta} > \beta)$ と等しい. また, 作用素 G が時間変更過程

Y_t のグリーン作用素であることより, λ_2 は Y_t の生成作用素の L^2-最小固有値にほかならない. したがって, 公式は $\check{\mathbb{P}}_x(\check{\zeta} > \beta)$ の長時間挙動が L^2 の量 λ_2 で与えられることを示しており, 時間変更過程における L^p-独立性が背後にあると考えられる. 4 節では, 時間変更過程における L^p-独立性を用いてこの公式を拡張する.

二番目の公式は [38] で示されたものである: $L^1(\mathbb{R}^3)$ に属する正の関数 V に対して, $\Gamma(V)$ を

$$\Gamma(V) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \mathbb{E}_x^W \left(e^{-\int_0^t V(B_s)ds}\right)\right) dx \tag{1.3}$$

で定義する. $\Gamma(V)$ は, 解析的に定義される**散乱距離** (*scattering length*) の確率表現を与えている (M. Kac [38]). 滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^3$ のコンパクト集合 K に対し

$$\Gamma(\alpha 1_K) \longrightarrow \mathrm{Cap}(K), \quad \alpha \to \infty \tag{1.4}$$

を Kac は示した. ここで Cap は**ニュートン容量**である. この公式もまた上で定義した時間変更過程 Y_t の生存時間 $\check{\zeta}$ に関する公式とみなせる. 実際,

$$\Gamma(\alpha 1_K) = \alpha \int_K \mathbb{E}_x^W \left(\exp\left(-\alpha \int_0^\infty 1_K(B_t)dt\right)\right) dx$$

が示せ, 右辺は $\alpha \int_K \check{\mathbb{E}}_x(\exp(-\alpha\check{\zeta}))dx$ に等しい. Kac は, 公式 (1.4) の拡張として次の様な予想をした ([38]): コンパクトな台を持つ正の L^1-関数 V に対して, 極限

$$\gamma_V := \lim_{\alpha\to\infty} \Gamma(\alpha V)$$

は V の台の容量に等しい. M. Taylor[76] がこの予想を確率論的に証明し, H. Tamura [75] は解析的に示した. Y. Takahashi [57] は一般な対称マルコフ過程に対し, $\Gamma(V)$ に新たな確率表現を与え, もし V がコンパクトな台を持つ正の連続関数であれば, 極限 γ_V が存在し, 集合 $\{x : V(x) > 0\}$ にのみ依存することを示した. ディリクレ形式のおける時間変更の理論を用いて, これら結果の簡単な証明を 6 節で与える.

他の節においても L^p-独立性と時間変更に関連する話題について述べる. 5 節では, L^p-独立性の応用として Feynman–Kac 汎関数の可積分性 (gaugeability) について述べる. さらに gaugeability の応用として, Feynman–Kac 処罰問題について 7 節で, 熱核の安定性について 8 節で述べる. 大偏差原理と Feynman–Kac 処罰問題においては, 対称マルコフ過程のエルゴード性が重要な役割を果たす. 9 節で, その要点についてまとめた. 10 節では, 生存時間が有限となる場合も許す対称マルコフ過程に対して, Donsker–Varadhan 型大偏差原理の証明を与えておく.

2. Donsker–Varadhan 型大偏差原理

マルコフ過程の滞在分布に対する Donsker–Varadhan 型大偏差原理の証明は, 対称性を仮定の下で著しく容易になる. M. Donsker と S.R.S. Varadhan は彼らの大偏差原理のレート関数としていわゆる *I-function* を導入したが, その具体形を求めることは一般には難しい. しかし, 対称マルコフ過程の場合であれば, その生成するディリクレ形式に等しい ([23]). さらに, 一次元ブラウン運動の大偏差原理を示すときに用いたオリジナルなアイデア [22] に立ち返って, 爆発や内部消滅を許す対称マルコフ過程に対して大偏差原理を示すことができる.

X を局所コンパクト可分距離空間とし, m をその台が全空間 X である正のラドン測度とする. $\mathbf{M} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \mathbb{P}_x, \zeta)$ を m-対称なマルコフ過程とする. ここで Ω は, $[0,\infty]$ から一点コンパクト化した空間 $X_\Delta = X \cup \{\Delta\}$ への右連続左極限を持ち, 任意の $t \geq \zeta(\omega) = \inf\{s \geq 0 : w(s) = \Delta\}$ に対し $\omega(t) = \Delta$ かつ $\omega(\infty) = \Delta$ を満たすつ写像の全体とする. 確率変数 ζ は**生存時刻**とよばれ, 有限の値をとることもある. X_t は $\omega \in \Omega,\ t \geq 0$ に対し $X_t(\omega) = \omega(t)$ で定義され, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ は極小な容認されるフィルトレーション (minimal (augmented) admissible filtration) とする.

$(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ を $\mathbf{M}$ から生成される $L^2(X;m)$ 上のディリクレ形式とする:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \left\{ u \in L^2(X;m) : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(u - p_t u, u)_m < \infty \right\} \\ \mathcal{E}(u,v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(u - p_t u, v)_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は**正則** (*regular*), すなわち, $\mathcal{D}(\mathcal{E})\cap C_0(X)$ は $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ の中で $\mathcal{E}_1$-ノルムに関して稠密であり, $C_0(X)$ の中で一様ノルムに関して稠密であるとする. ここで, $C_0(X)$ はコンパクトな台を持つ X 上の連続関数の空間, $\mathcal{E}_1(u,u)$ は $\mathcal{E}(u,u)+(u,u)_m$ とする. **拡大ディリクレ空間** (*extended Dirichlet space*)$\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$ は, X 上の $|u|<\infty$ m-a.e. なる可測関数 u で, $\mathcal{E}$-コーシー列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{D}(\mathcal{E})$ が存在し $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ m-a.e. なるもの全体として定義される.

ディリクレ空間 $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ に付随する容量 (*1-capacity*) Cap を次で定義する: 任意の開集合 $O\subset X$ に対して,

$$\mathrm{Cap}(O) = \inf\{\mathcal{E}_1(u,u) : u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}), u\geq 1,\ m\text{-a.e. on } O\}$$

で, 任意のボレル集合 $A\subset X$ に対して,

$$\mathrm{Cap}(A) = \inf\{\mathrm{Cap}(O) : O \text{ is open}, O\supset A\}.$$

0-capacity $\mathrm{Cap}_{(0)}$ は, 上の $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ を $\mathcal{E}$ と $\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$ にそれぞれ置き換えることで定義される. いま A を X の部分集合としよう. $x\in A$ に関する主張が "q.e. on A で成り立つ" とは, 容量零の集合 $N\subset A$ が存在して, その主張が全ての $x\in A\setminus N$ に対して成り立つことをいう. "q.e." は "quasi-everywhere" の略記である. X 上 q.e. に定義された実数値関数 u が**準連続** (*quasi continuous*) であるとは, 任意の $\epsilon>0$ に対して開集合 $G\subset X$ が存在し, $\mathrm{Cap}(G)<\epsilon$ かつ $u|_{X\setminus G}$ が連続であるときをいう. ここに, $u|_{X\setminus G}$ は u の $X\setminus G$ への制限を表わす. $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ に属する関数 u は準連続修正 $\tilde{u}$, すなわち, $u=\tilde{u}$ m-a.e. を持つ. 以後, 全ての関数 $u\in\mathcal{D}(\mathcal{E})$ は準連続修正されたものとする.

$\{p_t\}_{t\geq 0}$, $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ を, それぞれ $\mathbf{M}$ の半群, レゾルベントとする:

$$p_t f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t)), \quad R_\alpha f(x) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)dt\right).$$

対称マルコフ過程 $\mathbf{M}$ に対して, 以下の仮定を置く:

I. (**Irreducibility**) もし, ボレル集合 A が p_t-不変, すなわち,

$$p_t(1_A f)(x) = 1_A p_t f(x)\ m\text{-a.e. for any } f\in L^2(X;m)\cap\mathcal{B}_b(X) \text{ and } t>0,$$

ならば, $m(A)=0$ または $m(X\setminus A)=0$ を満たす. ここで, $\mathcal{B}_b(X)$ は有界なボレル関数の全体.

II. (**Strong Feller Property**) $p_t(\mathcal{B}_b(X))\subset C_b(X)$, $t>0$.

III. (**Tightness Property**) 任意の $\epsilon>0$ に対して, コンパクト集合 K が存在して $\sup_{x\in X} R_1 1_{K^c}(x)\leq\epsilon$ を満たす. ここで 1_{K^c} は K の補集合の定義関数.

Remark 2.1. (i) 仮定 II より推移確率 $p_t(x,dy)$ は m に関して絶対連続,

$$p_t(x,dy) = p_t(x,y)m(dy) \quad \text{for } t>0,\ x\in X \tag{2.2}$$

となり, リゾルベント核も m に関して絶対連続, $R_\beta(x,dy)=R_\beta(x,y)m(dy)$ となる. [29, Lemma 4.2.4] によると, 密度 $R_\beta(x,y)$ は対称な非負ボレル関数で, x と y に関して β-excessive となるようにとれる. この絶対連続条件の下, "quasi everywhere" に成立する主張は "everywhere" に成立する主張に強めることができ, 様々な概念を容量零の除外集合なしに定義することができる. 例えば, **狭義の滑らかな測度** (*smooth measures in the strict sense*) や**狭義の正の連続加法汎関数** (*positive continuous additive functional in the strict sense*) などである (cf. [29, Section 5.1]). ここでは仮定 II の下, すべて

狭義の意味の概念を用いるので “狭義の” は省く.
(ii) $m(X) < \infty$ で $\|R_1\|_{1,\infty} < \infty$ が成り立つならば, $\|R_1 1_{K^c}\|_\infty \le \|R_1\|_{1,\infty} m(K^c)$ となり仮定 III を満たす. ここで $\|R_1\|_{1,\infty}$ は $L^1(X;m)$ から $L^\infty(X;m)$ への作用素ノルム.
(iii) $R_1 1 \in C_\infty(X)$ ならば, 仮定 III は満たされる. ここで $C_\infty(X)$ は無限遠点で 0 となる連続関数の全体. もし $C_\infty(X)$ が R_1 の作用で不変, $R_1(C_\infty(X)) \subset C_\infty(X)$, ならば, $R_1 1 \in C_\infty(X)$ は仮定 III と同値になる. マルコフ過程 $\mathbf{M}$ が保存的であるならば, 仮定 III は「任意の $\epsilon > 0$ に対しコンパクト集合 K が存在し, $\inf_{x\in X} R_1 1_K(x) \ge 1-\epsilon$ を満たす.」ことと同値であり, 正再帰性を意味する.
(iv) $\mathcal{P}$ を X 上の確率測度の全体とし, 弱位相を入れる. $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{P}_M$ を

$$\mathcal{P}_M = \left\{ u^2 \cdot m : u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),\ \int_X u^2 dm = 1,\ \mathcal{E}(u,u) \le M \right\},\quad M > 0$$

で定義する. 仮定 III と下の (5.14) から $\mathcal{P}_M$ が緊密 (tightness) であることが従う; 実際, 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ と $u^2 \cdot m \in \mathcal{P}_M$ に対して

$$\int_{K^c} u^2 dm \le \|R_1 1_{K^c}\|_\infty \cdot \left(\mathcal{E}(u,u) + \int_X u^2 dm \right) \le (M+1)\|R_1 1_{K^c}\|_\infty. \tag{2.3}$$

([55]).

Remark 2.2. 対称マルコフ過程 $\mathbf{M}$ が保存的で, その半群が $p_t(C_\infty(X)) \subset C_\infty(X)$ を満たすとする. このことは “任意の $t > 0$ とコンパクト集合 K に対して,

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}_x(\sigma_K \le t) = 0.\text{”}$$

が成り立つことと同値である ([75, Proposition 3.1]). よって, $\lim_{x\to\infty} R_1 1_{K^c}(x) = 1$ となり, $\sup_{x\in X} R_1 1_{K^c}(x) = 1$ が従い, $\mathbf{M}$ は仮定 III を満たさない.

$\mathcal{P}$ 上の関数 $I_\mathcal{E}$ を

$$I_\mathcal{E}(\mu) = \begin{cases} \mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}) & \text{if } \mu = f \cdot m,\ \sqrt{f} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する. $\zeta(\omega) > t$ を満たす $\omega \in \Omega$ に対し, 正規化された滞在時間 $L_t(\omega) \in \mathcal{P}$ を

$$L_t(\omega)(A) = \frac{1}{t}\int_0^t 1_A(X_s(\omega))ds,\quad A \in \mathcal{B}(X)$$

で定義する. このとき, 次の Donsker–Varadhan 型大偏差原理をえる.

Theorem 2.3. (i) ([58]) *For any open set G of $\mathcal{P}$*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\nu(L_t \in G, t < \zeta) \ge -\inf_{\mu\in G} I_\mathcal{E}(\mu) \quad \textit{for all } \nu \in \mathcal{P}.$$

(ii) *For any closed set K of $\mathcal{P}$*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in X} \mathbb{P}_x(L_t \in K, t < \zeta) \le -\inf_{\mu\in K} I_\mathcal{E}(\mu).$$

上の定理に関して, いくつかのコメントを与える. 関数空間 $\mathcal{D}^+$ を

$$\mathcal{D}^+ = \left\{ R_\alpha f :\ \alpha > 0,\ f \in L^2(X;m) \cap C_b^+(X) \text{ and } f \not\equiv 0 \right\}$$

で定義する. ここで $C_b^+(X)$ は非負で有界な連続関数の空間. $\mathcal{D}^+$ に属する任意の関数は, 仮定 I より正値である. 乗法汎関数 L_t^ϕ, $\phi = R_\alpha f \in \mathcal{D}^+$, を

$$L_t^\phi = \frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)} \exp\left(-\int_0^t \frac{A\phi}{\phi}(X_s)ds \right) 1_{\{t<\zeta\}},\quad A\phi = \alpha R_\alpha f - f \tag{2.4}$$

で定義する. $\mathbf{M}^\phi = (\Omega, X_t, \mathbb{P}_x^\phi, \zeta)$ は, $\mathbf{M}$ を乗法汎関数 L_t^ϕ で変換してできるマルコフ過程とする:

$$\mathbb{P}_x^\phi, (F; t < \zeta) = \mathbb{E}_x(L_t^\phi 1_F; t < \zeta), \quad F \in \mathcal{F}_t.$$

Theorem 2.3 (i) の証明については, $\mathbf{M}$ の対称性が不可欠である. $\mathbf{M}$ が対称であれば, 爆発や内部での消滅があったとしても, $\mathbf{M}^\phi$ は平衡測度 $\phi^2 m$ を持つエルゴディックな対称マルコフ過程となる. この事実の証明に関しては, そのスケッチを 11 節で与える. もし K が $\mathcal{P}$ のコンパクト集合であれば, Theorem 2.3 (ii) は仮定 III なしで成り立つ. 仮定 III は, コンパクト集合から閉集合に主張を強めるときに必要となる. さらに, 仮定 III は初期値に関して一様な上からの評価を得るためにも必要となる. 実際, Ornstein-Uhlenbeck 過程は仮定 III を満たさないし, 局所一様な上からの評価は成り立つが一様な評価は成り立たない ([24],[79]).

$\mathcal{P}$ 上の関数 I を

$$I(\mu) = -\inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^+ \\ \epsilon > 0}} \int_X \frac{Au}{u+\epsilon} d\mu \tag{2.5}$$

で定義する. 関数 I は [23] で導入された Donsker–Varadhan の *I-function* と呼ばれるものの変型である. $\mathbf{M}$ は爆発を許すので, 関数 f が一様に正の定数で下から評価されていたとしても, 関数 $u = R_\alpha f \in \mathcal{D}^+$ は必ずしもそうはならない. 結果として Au/u は必ずしも有界とはならない. 正の定数 ϵ を加えるのは, $Au/(u+\epsilon)$ を有界連続関数にするためで, このことより, (2.5) で定義される I-function は弱位相に関して下半連続となる. このことが, Donsker–Varadhan の I-function を修正した理由である. その修正にも拘わらず, I-function (2.5) はディリクレ形式と同定される ([29, Theorem 6.4.2]):

Proposition 2.4.

$$I(\mu) = I_{\mathcal{E}}(\mu), \qquad \mu \in \mathcal{P}.$$

Proposition 2.4 から $I_{\mathcal{E}}$ も弱位相に関して下半連続となることが分かる. 無限次元空間を許すより一般な状態空間上の対称マルコフ過程を扱うため, Jain–Krylov[36] はリゾルベント $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ の代わりに半群 $\{p_t\}_{t\geq 0}$ を用いた I-function の変型を提案している.

Corollary 2.5. (**Extended variational formula for Dirichlet forms**) *For* $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

$$\mathcal{E}(f,f) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{D}^+ \\ \epsilon > 0}} \int_X \frac{-Au}{u+\epsilon} f^2 dm. \tag{2.6}$$

λ_2 をスペクトルの下限とする:

$$\lambda_2 = \inf\left\{\mathcal{E}(f,f) : f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),\ \int_X f^2 dm = 1\right\}. \tag{2.7}$$

Corollary 2.5 を用いると, 任意の $u \in \mathcal{D}^+(A)$ と $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lambda_2 \geq \inf_{x \in X} \frac{-Au}{u+\epsilon}(x). \tag{2.8}$$

が成り立つ. Corollary 2.5 の拡張については, [53] をみよ. ディリクレ形式の変分表現の応用については [12] をみよ.

S.R.S. Varadhan [78] は大偏差原理の抽象的な定義を与えた. Theorem 2.3 は彼の定式化とは若干異なる; マルコフ過程が保存的であることを仮定していないので,

Theorem 2.3 は不変測度からの大偏差原理とはみなせない．このため, 正規化した $\mathcal{P}$ 上の確率測度 $\widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}$ を

$$\widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(B) = \frac{\mathbb{P}_x(L_t \in B, t < \zeta)}{\mathbb{P}_x(t < \zeta)}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \tag{2.9}$$

で定義すると, $\{\widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}\}_{t>0}$ は $J(\nu) := I_{\mathcal{E}}(\nu) - \lambda_2$, $\nu \in \mathcal{P}$, をレート関数とする Varadhan の意味での大偏差原理を満たす．言い換えると, $\{\widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}\}_{t>0}$ は, $J(\nu)$ を *good rate function* とする *full large deviation principle* を満たす．さらに, ground state ϕ_0 が存在し (Lemma 2.6), $\phi_0^2 \cdot m$ は $J(\nu) = 0$ を満たす唯一の確率測度となる．ここで, 関数 ϕ_0 が, $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $\|\phi_0\|_2 = 1$ かつ $\mathcal{E}(\phi_0, \phi_0) = \lambda_2$ を満たすとき, $\mathcal{E}$ から決まる自己共役作用素の *ground state* という．このことから, Theorem 2.3 は ground state からの大偏差原理として解釈することができることをみていこう．

Lemma 2.6. ([71]) *Assume that* $\mathbf{M}$ *satisfies I∼III. Then there exists a ground state* ϕ_0 *of* A *uniquely up to a sign.* ϕ_0 *can be taken to be strictly positive on* X*.*

Proof. In our proof of the existence of the minimizer in the right hand side of (2.7), the identification of the I-function with the Dirichlet form (Proposition 2.4) plays a crucial role. In fact, let $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$ be a minimizing sequence, that is, $\|u_n\|_2 = 1$ and $\lambda_2 = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n)$.

We see from (2.3) that for any $\epsilon > 0$ there exists a compact set K such that

$$\sup_n \int_{K^c} u_n^2 \cdot dm \le \|R_1 I_{K^c}\|_\infty \cdot \left(\sup_n \mathcal{E}(u_n, u_n) + 1\right) < \epsilon,$$

that is, the subset $\{u_n^2 \cdot m\}_{n=1}^{\infty}$ of $\mathcal{P}$ is tight. Hence there exists a subsequence $\{u_{n_k}^2 \cdot m\}_{k=1}^{\infty}$ such that $u_{n_k}^2 m$ converges weakly to a probability measure ν. It follows from Proposition 2.4 that the function $I_{\mathcal{E}}$ is lower semi-continuous with respect to the weak topology,

$$I_{\mathcal{E}}(\nu) \le \liminf_{k\to\infty} I_{\mathcal{E}}(u_{n_k}^2 \cdot m) = \liminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(u_{n_k}, u_{n_k}) < \infty.$$

Therefore we see that ν is expressed as $\nu = \phi_0^2 \cdot m$, $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $\phi_0 \ge 0$. ϕ_0 is just a ground state of A.

It follows from the inequality $\|\phi_0 + \epsilon g\|_{\mathcal{E}}^2 \ge \lambda_2 \|\phi_0 + \epsilon g\|_2^2$ holding for any $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ and any $\epsilon > 0$ that $\mathcal{E}(\phi_0, g) = \lambda_2(\phi_0, g)$. Hence $\alpha R_{\alpha-\lambda_2}\phi_0 = \phi_0$, $\alpha > \lambda_2$, which implies that ϕ_0 is strictly positive by the irreducibility.

To prove the uniqueness of the ground state, we introduce a closed symmetric form $(\mathcal{E}^{\phi_0}, \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\phi_0}))$ on $L^2(X; \phi_0^2 m)$ by

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{\phi_0}(u, v) = \mathcal{E}(u\phi_0, v\phi_0) - \lambda_2(u\phi_0, v\phi_0) \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\phi_0}) = \{u \in L^2(X; \phi_0^2 \cdot m) : u\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Since $1 \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\phi_0})$, $\mathcal{E}^{\phi_0}(1,1) = 0$ and the associated resolvent $R_\alpha^{\phi_0}$ satisfies $R_\alpha^{\phi_0} f = \phi_0^{-1} R_{\alpha-\lambda_2}(f\phi_0)$, $\alpha > \lambda_2$, we see from Lemma 9.4 that $(\mathcal{E}^{\phi_0}, \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\phi_0}))$ is an irreducible recurrent Dirichlet form so that f is constant whenever $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\phi_0})$, $\mathcal{E}^{\phi_0}(f, f) = 0$. Let ψ_0 be another ground state of A. Then $\psi_0 = f\phi_0$ with $f = \psi_0/\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\phi_0})$, $\mathcal{E}^{\phi_0}(f, f) = \mathcal{E}(\psi_0, \psi_0) - \lambda_2 = 0$, which yields that f is constant and $\psi_0 = \pm\phi_0$. □

通常の ground state の存在証明においては, $\mathcal{E}_1$-弱位相に関する $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ のコンパクト性と $\mathcal{E}$ の下半連続性が使われる (e.g. [41])．ここでは, 確率空間における $\{u_n^2 \cdot m\}_{n=1}^{\infty}$ の tightness と $I_{\mathcal{E}}$ の下半連続性が使われたことを強調しておく．Lemma 2.6 の証明からレベル集合 $\{\nu \in \mathcal{P} : I_{\mathcal{E}}(\nu) \le \ell\}$ が $\mathcal{P}$ のコンパクト集合であることが従う．

Lemma 2.7. *The set* $\{\nu \in \mathcal{P} : I_{\mathcal{E}}(\nu) \le \ell\}$ *is compact in* $\mathcal{P}$*.*

したがって, 次の補題を得る.

Lemma 2.8. *The function J satisfies:*
(i) $0 \le J(\nu) \le \infty$.
(ii) *J is lower semi-continuous.*
(iii) *For each $l < \infty$, the set $\{\nu \in \mathcal{P} : J(\nu) \le l\}$ is compact.*
(iv) $J(\phi_0^2 \cdot m) = 0$ *and* $J(\nu) > 0$ *for* $\nu \neq \phi_0^2 \cdot m$.

Lemma 2.8 は $J(\nu) = I_{\mathcal{E}}(\nu) - \lambda_2,\ \nu \in \mathcal{P}$, が大偏差原理において (good な) レート関数の性質を持っていることを主張している. 次の等式も成り立つことを注意しておく.

$$J(\nu) = I_{\mathcal{E}^{\phi_0}}(\nu), \quad \nu \in \mathcal{P}, \tag{2.11}$$

ここに $I_{\mathcal{E}^{\phi_0}}$ はディリクレ形式 (2.10) を用いて

$$I_{\mathcal{E}^{\phi_0}}(\nu) = \begin{cases} \mathcal{E}^{\phi_0}(\sqrt{f}, \sqrt{f}) & \text{if } \nu = f\phi_0^2 \cdot m,\ \sqrt{f} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{\phi_0}) \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.12}$$

で定義される. Theorem 2.3 より次の大偏差原理が成り立つ:

Theorem 2.9. ([71]) *Let $\{\widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}\}_{t>0}$ be a family of probability measures defined by* (2.9)*. Then the sequence $\{\widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}\}_{t>0}$ obeys the large deviation principle with rate function J*:
(i) *For each open set $G \subset \mathcal{P}$*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(G) \ge - \inf_{\nu \in G} J(\nu).$$

(ii) *For each closed set $K \subset \mathcal{P}$*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(K) \le - \inf_{\nu \in K} J(\nu).$$

Corollary 2.10. *The measure $\widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}$ converges weakly to $\delta_{\phi_0^2 \cdot m}$ as $t \to \infty$.*

Proof. If a closed set K does not contain $\phi_0^2 \cdot m$, then $\inf_{x\in K} J(x) > 0$ by Lemma 2.8 (iv). Hence Theorem 2.9 (ii) says that $\lim_{t\to\infty} \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(K) = 0$ and $\lim_{t\to\infty} \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(K^c) = 1$. For a positive constant δ and a bounded continuous function f on $\mathcal{P}$, define the closed set $K \subset \mathcal{P}$ by $K = \{\nu \in \mathcal{P} : |f(\nu) - f(\phi_0^2 \cdot m)| \ge \delta\}$. Then we have

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathcal{P}} f(\nu) \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(d\nu) - f(\phi_0^2 \cdot m) \right| \le \int_{\mathcal{P}} |f(\nu) - f(\phi_0^2 \cdot m)| \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(d\nu) \\ &= \int_K |f(\nu) - f(\phi_0^2 \cdot m)| \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(d\nu) + \int_{K^c} |f(\nu) - f(\phi_0^2 \cdot m)| \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(d\nu) \\ &\le 2\|f\|_\infty \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(K) + \delta \widetilde{\mathbb{Q}}_{x,t}(K^c) \longrightarrow \delta \end{aligned}$$

as $t \to \infty$. Since δ is arbitrary, the proof of the corollary is complete. □

Corollary 2.10 より, Theorem 2.9 は ground state からの大偏差原理とみなせる.

Theorem 2.3 に $G = K = \mathcal{P}$ を代入すると次を得る.

Corollary 2.11.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in X} \mathbb{P}_x(t < \zeta) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_x(t < \zeta) \\ &= -\inf \left\{ \mathcal{E}(u,u) : u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),\ \int_X u^2 dm = 1 \right\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

マルコフ過程 $\mathbf{M}$ がさらに保存的, $\mathbb{P}_x(\zeta=\infty)=1$, であることを仮定する．そのとき (2.13) の左辺は 0 であり, ground state ϕ_0 は $\mathcal{E}(\phi_0,\phi_0)=0$ を満たす．もし $\mathbf{M}$ が過渡的ならば, $\phi_0=0$ が従い ([29, Theorem 1.6.2]), $\int_E \phi_0^2 dm=1$ に反する．よって, $\mathbf{M}$ は再帰性を持ち, ϕ_0 は定数関数となる ([40](or [15, Theorem 5.2.6]))．このことは $m(E)<\infty$ かつ $\phi_0=1/\sqrt{m(E)}$ であり, $\mathbf{M}$ が正再帰的であることを意味する．

作用素 p_t の $L^p(X;m)$ から $L^p(X;m)$ への作用素ノルムを $\|p_t\|_{p,p}$ と記し,

$$-\lambda_p=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|p_t\|_{p,p},\quad 1\le p\le\infty.$$

とおく．$-\lambda_p$ は半群 $\{p_t\}_{t\ge 0}$ の長時間増大度を表す．

$\sup_{x\in X}\mathbb{P}_x(t<\zeta)=\|p_t\|_{\infty,\infty}$ であり, (2.13) の右辺はスペクトル定理より $-\lambda_2$ に等しいことに注意すると, Corollary 2.11 から

$$\lambda_\infty=\lambda_2 \tag{2.14}$$

が従う．一方, $\{p_t\}$ の対称性と正値性から $f\in L^2(X;m)$ に対して

$$\begin{aligned}\|p_tf\|_2^2&\le(p_t1,p_tf^2)_m\le\|p_t\|_{\infty,\infty}(1,p_tf^2)_m\\&=\|p_t\|_{\infty,\infty}(p_t1,f^2)_m\le\|p_t\|_{\infty,\infty}^2\|f\|_2^2\end{aligned}$$

となり, $\|p_t\|_{2,2}\le\|p_t\|_{\infty,\infty}$ が従う．ゆえに Riesz-Thorin の補間定理より

$$\|p_t\|_{2,2}\le\|p_t\|_{p,p}\le\|p_t\|_{\infty,\infty},\quad 1\le p\le\infty$$

が導かれる．

Theorem 2.12. ([60]) *Under the assumptions I $\sim$ III, λ_p $(1\le p\le\infty)$ is independent of p.*

Example 2.1. Let us consider the symmetric bilinear form

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx,\qquad u,v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

where $(a_{ij}(x))$ is a symmetric matrix satisfying

$$\lambda(2+|x|)^2\log(2+|x|)^\beta|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\Lambda(2+|x|)^2\log(2+|x|)^\beta|\xi|^2$$

for some positive constant λ,Λ. Let $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ be the closure of $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Then, $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ becomes a strongly local Dirichlet form on $L^2(\mathbb{R}^d)$. Denote by $\mathbf{M}=(\Omega,X_t,\mathbb{P}_x,\zeta)$ the associated diffusion process on $\mathbb{R}^d$.

Let us define a metric ρ (so-called *intrinsic metric*) on $\mathbb{R}^d$ as follows.

$$\rho(x,y)=\sup\left\{u(x)-u(y):u\in\mathcal{D}_{loc}(\mathcal{E})\cap C(\mathbb{R}^d),\ \sum_{i,j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\le 1\text{ a.e.}\right\}. \tag{2.15}$$

Then, we can show that if $\beta\le 2$, $(\mathbb{R}^d,\rho)$ is a complete metric space and the induced topology is equivalent to the usual one. Let $B_\rho(r)=\{x\in\mathbb{R}^d;\rho(0,x)<r\}$. Then

$$m(B_\rho(r))\simeq\begin{cases}e^{e^r} & \beta=2\\ e^{r^{\frac{2}{2-\beta}}} & \beta<2,\end{cases} \tag{2.16}$$

where $g(r)\simeq f(r)$ means $0<\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\le\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}<\infty$. We see from Note 6.6 in [19] that if $a_{ij}(x)$ are smooth and $\beta>1$, the function R_11 belongs

to $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, and thus obtain
(2.17)
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x(t<\zeta)=-\inf\left\{\mathcal{E}(u,u);u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}),\int_{\mathbb{R}^d}u^2dm=1\right\}\quad\text{for all } x\in\mathbb{R}^d.$$

For $\beta\le 1$, the diffusion process $\mathbf{M}$ is conservative. Thus, for $\beta<0$, the both side of (2.17) are equal to zero. If $0\le\beta\le 1$, then $\mathrm{Sp}(H)\subset[\frac{1}{8}\lambda d^2,\infty)$ (Theorem 1.5.14 in [20]). Here H is the self-adjoint operator associated to the Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ and $\mathrm{Sp}(H)$ is the set of spectrum of H. Hence, the relation (2.17) does not hold for $0\le\beta\le 1$ because the left hand side is equal to zero by the conservativeness of $\mathbf{M}$.

Feynman–Kac 汎関数の重み付き対称マルコフ過程に対して Theorem 2.3 を拡張することで ([21], [63], [68], [70], [77]), Feynman–Kac 半群の L^p-独立性に拡張することができる. Feynman–Kac 半群の L^p-独立性から加法汎関数の対数モーメント母関数の極限の存在が導け, この事実は Gärtner–Ellis の定理を応用して加法汎関数の大偏差原理を示すうえでの前提となる ([72], [73]).

λ_∞ の確率論的意味付けの一つは次で与えられる:

Theorem 2.13. ([51]) *Suppose $\lambda_\infty>0$. Then*
$$\sup_{x\in X}\mathbb{E}_x(\exp(\lambda\zeta))<\infty\quad\textit{if and only if}\quad\lambda<\lambda_\infty.$$

Corollary 2.14. *Assume I $\sim$ III. Then*
$$\sup_{x\in X}\mathbb{E}_x(\exp(\zeta))<\infty\quad\textit{if and only if}\quad\lambda_2>1.$$

$K\subset X$ をコンパクト集合とし, D を K の補集合, $D:=X\setminus K$, とする. X^D で D 上の部分過程 (吸収壁過程) を記す:

$$X^D=\begin{cases}X_t & t<\tau_D\\ \Delta & t\ge\tau_D,\quad \tau_D=\inf\{t\ge 0:X_t\notin D\}.\end{cases}\tag{2.18}$$

$(\mathcal{E}^D,\mathcal{D}(\mathcal{E}^D))$ を X^D から生成されるディリクレ形式とし ([29, Theorem 4.4.3]), λ^D を $(\mathcal{E}^D,\mathcal{D}(\mathcal{E}^D))$ のスペクトルの下限,

$$\lambda^D=\inf\left\{\mathcal{E}(u,u):u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^D),\ \int_D u^2dm=1\right\}\tag{2.19}$$

とする. そのとき, (2.3) から

$$\int_D u^2dm=\int_X u^2 1_D dm\le\|R_1 1_D\|_\infty\cdot\left(\mathcal{E}(u,u)+\int_X u^2dm\right),\quad u\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^D),$$

が成り立ち,

$$1\le\|R_1 1_D\|_\infty\cdot(\lambda^D+1)\tag{2.20}$$

となる. 仮定 III より, コンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ で $\cup_{n=1}^\infty K_n=X$ かつ $\|R_1 1_{K_n^c}\|_\infty\to 0$, $n\to\infty$ を満たすものが存在する. よって, $D_n=K_n^c$ に対して

$$\lambda^{D_n}\uparrow\infty\quad\text{as}\quad n\to\infty\tag{2.21}$$

が (2.20) から導かれる.

Theorem 2.3(ii) は上からの評価が一様に成り立つことを主張している. 以下, $\mathbf{M}$ が保存的であれば, 下からの評価も一様に成り立つことを示す.

正のボレル測度 μ で $\mu(X) < \infty$ かつ $R_1\mu(x)(= \int_X R_1(x,y)\mu(dy))$ が一様に有界となるもの全体を S_{00} と記す．もし $E_n \uparrow E$ なる単調増大なボレル集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し, 各 n に対し $1_{E_n}\cdot\mu \in S_{00}$ であり

$$\mathbb{P}_x\left(\lim_{n\to\infty}\sigma_{X\setminus E_n} \geq \zeta\right) = 1, \quad \forall x \in X,$$

を満たすとき正のボレル測度 μ は**滑らか** (*smooth*) と言われる．ここに $\sigma_{X\setminus E_n}$ は $X\setminus E_n$ への到達時刻. 滑らかな測度の全体を S_1 と記す.

各 $\omega \in \Lambda$ に対し, 加法汎関数 $\{A_t\}_{t\geq 0}$ が正で t に関して連続であれば, **正の連続加法汎関数** (*positive continuous additive functional*) (PCAF と略記) と呼ばれる. [29, Theorem 5.1.7] によると, 正の滑らかな測度と PCAF's の間には 1 対 1 対応 (**Revuz correspondence**) が存在する: 滑らかな測度 μ に対し, PCAF$\{A_t\}_{t\geq 0}$ が一意的に存在し, 任意の正のボレル関数 f と γ-超過関数 h $(\gamma \geq 0)$, $e^{-\gamma t}p_t h \leq h$, に対して

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathbb{E}_{h\cdot m}\left(\int_0^t f(X_s)dA_s\right) = \int_E f(x)h(x)\mu(dx). \tag{2.22}$$

ここに $\mathbb{E}_{h\cdot m}(\,\cdot\,) = \int_X \mathbb{E}_x(\,\cdot\,)h(x)m(dx)$. 滑らかな測度 μ に対応する PCAF を A_t^{μ} と記す. Z.-Q. Chen [13] に従って, 滑らかな測度のクラスを導入する.

Definition 2.15. (i) A positive Borel measure μ is said to be the *Kato measure* (in notation, $\mu \in \mathcal{K}$), if $\mu \in S_1$ and

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x\in X}\mathbb{E}_x(A_t^{\mu}) = 0.$$

(ii) A measure $\mu \in \mathcal{K}$ is said to be in the class $\mathcal{K}_\infty$, if for any $\epsilon > 0$ there exist a compact subset K and a positive constant $\delta > 0$ such that for all measurable set $B \subset K$ with $\mu(B) < \delta$,

$$\sup_{x\in X}\int_{K^c\cup B} R_1(x,y)\mu(dy) \leq \epsilon.$$

仮定 I∼III から測度 m はクラス $\mathcal{K}_\infty$ に属する ([13]). リゾルベントの依存性を示すために, $\mathcal{K}_\infty$ の代わりに $\mathcal{K}_\infty(R_1)$ と記す. R_1^D を部分過程 X^D の 1-リゾルベントとし, m^D を m の D への制限, $m^D(\bullet) = m(D\cap\bullet)$ とする.

Lemma 2.16. *Let K be a compact set. Then $m^D \in \mathcal{K}_\infty(R_1^D)$, $D = K^c$.*

Proof. Let $\widetilde{K}$ and δ be a compact set and a positive constant in the definition of $\mathcal{K}_\infty$(Definition 2.15). We can suppose $K \subset \widetilde{K}$. Let G be a relatively compact open set such that $K \subset G \subset \bar{G} \subset \widetilde{K}$ and $m(G\setminus K) < \delta$. Then $\widetilde{K}\cap G^c$ is a compact subset of D and

$$R_1^D 1_{(\widetilde{K}\cap G^c)^c} = R_1^D 1_{\widetilde{K}^c\cup(G\setminus K)} \leq R_1 1_{\widetilde{K}^c} + R_1 1_{G\setminus K} \leq 2\epsilon.$$

Moreover, $R_1^D 1_B \leq R_1 1_B$ for any Borel set $B \subset \widetilde{K}\cap G^c$. □

Lemma 2.17. *Suppose X is conservative. For any compact set K with non-empty interior K^o, the principal eigenvalue λ^D, $D = K^c$, is positive.*

Proof. Let $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}^D)\cap C_0(D)$ be an approximating sequence in (2.19) such that $\mathcal{E}(\phi_n,\phi_n) \to \lambda^D$. Since the set $\{\phi_n^2\cdot m\}_{n=1}^{\infty}$ of probability measures is tight by Lemma 2.7, we see by the same argument as in Lemma 2.6 that there exists a subsequence $\{\phi_{n_k}^2\cdot m\}_{k=1}^{\infty}$ which weakly converges to $\phi_0^2\cdot m$, $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Hence

$$1 = \limsup_{k\to\infty}\int_{X\setminus K^o}\phi_{n_k}^2 dm \leq \int_{X\setminus K^o}\phi_0^2 dm,$$

and thus ϕ_0 equals 0, m-a.e. on K^o. In particular, the function ϕ_0 is not constant on X, because $m(K^o) > 0$ by the assumption on m. Hence we have $\mathcal{E}(\phi_0,\phi_0) > 0$.

In fact, noting that $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ is irreducible recurrent, we see from [40, Theorem 1.3] that if $\mathcal{E}(\phi_0,\phi_0)=0$, then ϕ_0 must be a constant. We now conclude

$$\lambda^D=\liminf_{k\to\infty}\mathcal{E}(\phi_{n_k},\phi_{n_k})\geq\mathcal{E}(\phi_0,\phi_0)>0.$$

□

$\mathbf{M}$ が保存的ならば, X^D の生存時間は K への到達時刻 σ_K と等しい. Lemma 2.16 と [13, Theorem 4.1] を合わせると, X^{D_n} が irreducible ならば,

$$\sup_{x\in X}\mathbb{E}_x(\exp(\gamma\sigma_{K_n}))\left(=\sup_{x\in D_n}\mathbb{E}_x(\exp(\gamma\sigma_{K_n}))\right)<\infty\Longleftrightarrow\gamma<\lambda^{D_n}\tag{2.23}$$

が従う. よって

Lemma 2.18. *If X is conservative and there exists a increasing sequence $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ of compact sets such that $\cup_{n=1}^\infty K_n=X$ and X^{D_n}, $D_n=K_n^c$, is irreducible, then X has the following property.*

(H) *For any $\gamma>0$ there exists a compact set K such that* $\sup_{x\in X}\mathbb{E}_x(\exp(\gamma\sigma_K))<\infty.$

性質 (H) は *uniform hyper-exponential recurrence* と呼ばれている ([79]). X^D が irreducible であるための十分条件は, Lemma 2.21, Lemma 2.22 で与えられる.

$$p_t(x,U)=0 \text{ for } \forall t>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{P}_x(\sigma_U<\infty)=0,$$

に注意すると, X が irreducible ならば, 半群 $\{p_t\}_{t\geq0}$ は *topological transitive*, すなわち, すべての空でない開集合 U と $x\in X$ に対し, $t>0$ が存在して $p_t(x,U)>0$ を満たす. よって, Wu [79] の Theorem 1.2 から次のことが分かる:

Theorem 2.19. *Suppose X is conservative. If there exists an increasing sequence $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ of compact sets such that $\cup_{n=1}^\infty K_n=X$ and X^{D_n}, $D_n=K_n^c$, are irreducible, then the uniform lower bound holds: for each open set G of $\mathcal{P}$*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\inf_{x\in X}\mathbb{P}_x(L_t\in G)\geq-\inf_{\mu\in G}I_{\mathcal{E}}(\mu).$$

Example 2.2. (**One-dimensional diffusion processes**) Let us consider a one-dimensional diffusion process $X=(X_t,\mathbb{P}_x,\zeta)$ on an open interval $I=(r_1,r_2)$ such that $\mathbb{P}_x(X_{\zeta-}=r_1 \text{ or } r_2,\ \zeta<\infty)=\mathbb{P}_x(\zeta<\infty),\ x\in I$, and $\mathbb{P}_a(\sigma_b<\infty)>0$ for any $a,b\in I$. The diffusion X is symmetric with respect to its canonical measure m and it satisfies I and II. The boundary point r_i of I is classified into four classes: *regular boundary, exit boundary, entrance boundary and natural boundary* ([35, Chapter 5]):

(a) If r_2 is a regular or exit boundary, then $\lim_{x\to r_2}R_11(x)=0$.
(b) If r_2 is an entrance boundary, then $\lim_{r\to r_2}\sup_{x\in(r_1,r_2)}R_11_{(r,r_2)}(x)=0$.
(c) If r_2 is a natural boundary, then $\lim_{x\to r_2}R_11_{(r,r_2)}(x)=1$ and thus $\sup_{x\in(r_1,r_2)}R_11_{(r,r_2)}(x)=1$.

Therefore, the tightness property III is fulfilled if and only if no natural boundaries are present. As a corollary of the equation (2.21), If r_2 is an entrance boundary, for any $\lambda>0$ there exists $r_1<r<r_2$ such that

$$\sup_{x>r}\mathbb{E}_x(\exp(\lambda\sigma_r))<\infty,$$

where σ_r is the first hitting time of $\{r\}$. Therefore, if the both boundaries are entrance ones, then the uniform large deviation holds.

We see from [35] that the Ornstein-Uhlenbeck process on one-dimensional space $\mathbb{R}$ has natural boundaries and satisfies the invariance of $C_\infty(\mathbb{R})$. Hence on account of Remark 2.2, we see that the Ornstein-Uhlenbeck process does not possess the tightness property. Moreover, it is known in [79] that the Ornstein-Uhlenbeck process does not satisfy the uniform large deviation, while it satisfies locally uniform large deviation. The statement above implies the uniqueness of quasi-stationary distribution ([11]).

部分過程が irreducible となるための十分条件を与えよう. もし X が局所一様楕円作用素から生成される拡散過程であれば, 領域上の部分過程は irreducible となる ([29, Corollary 4.6.4, Example 4.6.1]). より一般的には

Lemma 2.20. *Assume $R_1 1 \in C_\infty(X)$. If $D \subset X$ is a connected open set, then X^D satisfies I∼III.*

Proof. By the assumption, X is a doubly Feller process, that is, it satisfies the strong Feller property and the invariance of $C_\infty(X)$. We then know from Chung [18] that X^D has the strong Feller property. Hence Exercise 4.6.3 in [29] leads us to this lemma. □

次にジャンプ過程について考えよう. $(N(x,dy),H_t)$ を Lévy system とし, 次の仮定を置く:

$$\text{(J)}\quad \begin{cases} (i) & \text{If } m(B)>0, \text{ then } N(x,B)>0 \ \text{ for any } x\in X. \\ (ii) & \mathrm{Supp}[H](:=\{x\in X:\inf\{t>0:H_t>0\}=0\})=X. \end{cases}$$

Lemma 2.21. *Assume (J). Then for any compact set $F \subset D$ with $m(F) > 0$, $\mathbb{P}_x(\sigma_F < \tau_D) > 0$.*

Proof. Let $x \notin D \setminus F$ and take $r > 0$ such that $B(x,r) \cap F = \emptyset$. Then

$$\mathbb{E}_x\left(\sum_{0<s<\tau_D} 1_{B(x,r)}(X_{s-})1_F(X_s)\right) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{\tau_D} 1_{B(x,r)}(X_s)N(X_s,F)dH_s\right).$$

The right hand side is positive by the assumption, which leads us to the lemma. □

Lemma 2.22. *Assume (J). Let $K \subset D$ be a set with $m(K) > 0$. Then $R_1^D(x,K) > 0$ for any $x \in D$.*

Proof. Since

$$\int_D R_1^D(x,K)dm = \int_D R_1^D 1(x)1_K(x)dm > 0,$$

the set $\{x \in D : R_1^D(x,K) > 0\}$ is of positive m-measure. Take a compact set F such that $F \subset \{x \in D : R_1^D(x,K) > 0\}$ and $m(F) > 0$. Then

$$\begin{aligned} R_1^D(x,K) &= \mathbb{E}_x\left(\int_0^{\tau_D} e^{-t}1_K(X_t)dt\right) \geq \mathbb{E}_x\left(\int_{\sigma_F}^{\tau_D} e^{-t}1_K(X_t)dt;\sigma_F<\tau_D\right) \\ &= \mathbb{E}_x\left(R_1^D(X_{\sigma_F},K);\sigma_F<\tau_D\right). \end{aligned}$$

The right hand side is positive by Lemma 2.21. □

2.1. **Explosive case.**

Lemma 2.23. **M** *satisfies one of next two properties:*

(a) *(Conservative)* $\mathbb{P}_x(\zeta < \infty) = 0$ *for all* $x \in X$.
(b) *(Explosive)* $\mathbb{P}_x(\zeta < \infty) > 0$ *for all* $x \in X$.

Proof. Suppose $O := \{x \in X : \mathbb{P}_x(\zeta < \infty) > 0\}$ is not empty. Since $g(x) := \mathbb{P}_x(\zeta < \infty)$ is an excessive function, the set O is a finely open set (e.g. [29, Theorem A.2.7]) and $\mathrm{Cap}(O) > 0$. Indeed, if $\mathrm{Cap}(O) = 0$, then O is polar ([29, Theorem 4.1.2]) and so $\mathbb{P}_x(\sigma_O < \infty) = 0$ for all $x \in X$, which is contradictory to that $\mathbb{P}_x(\sigma_O < \infty) > 0$ for $x \in O$. Since $O = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n = \{x \in X : \mathbb{P}_x(\zeta < \infty) \geq 1/n\}$, $\mathrm{Cap}(F_n) > 0$ for some n. On account of (2.2), we see from [29, Exercise 4.7.1] that $\mathbb{P}_x(\sigma_{F_n} < \infty) > 0$ for all $x \in X$. Note that the set F_n is finely closed and thus $X_{\sigma_{F_n}} \in F_n$ on $\{\sigma_{F_n} < \infty\}$. We then have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\zeta < \infty) &= \mathbb{P}_x(\zeta < \infty,\ \sigma_{F_n} < \infty) + \mathbb{P}_x(\zeta < \infty,\ \sigma_{F_n} = \infty) \\
&\geq \mathbb{P}_x(\zeta(\theta_{\sigma_{F_n}}) < \infty,\ \sigma_{F_n} < \infty) \\
&= \mathbb{E}_x(\mathbb{P}_{X_{\sigma_{F_n}}}(\zeta < \infty); \sigma_{F_n} < \infty) \\
&\geq \frac{1}{n}\mathbb{P}_x(\sigma_{F_n} < \infty) > 0.
\end{aligned}$$

□

$\mathbf{M}$ が保存性を満たさないとき, λ_2 は正となる. 実際 ground state ϕ_0 が $\mathcal{E}(\phi_0, \phi_0) = 0$ を満たすとすると, 過渡性より $\phi_0 = 0$ となる. [29, Theorem 6.4.3, Theorem 6.4.4] によると

$$\sup_{x \in X} \mathbb{E}_x(\exp(\gamma\zeta)) < \infty \Longleftrightarrow \gamma < \lambda_2$$

が成り立ち, 特に Lemma 2.23 の性質 (b) は $\mathbb{P}_x(\zeta < \infty) = 1$ に強められる.

3. ランダムな時間変更

この節では, 加藤測度に対応する PCAF によるブラウン運動の時間変更について述べる. 時間変更を考えるうえで, 加藤測度に対応する PCAF が適当なクラスであることが分かる.

$\mathbf{D}$ を古典的なディリクレ積分とする:

$$\mathbf{D}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \text{for } u, v \in H^1(\mathbb{R}^d), \tag{3.1}$$

ここに $H^1(\mathbb{R}^d)$ は 1 位のソボレフ空間. $(B_t, \mathbb{P}_x^W)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の d-次元ブラウン運動とする.

正のラドン測度 μ が *Kato class* K_d に属するとは

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y|<\alpha} \frac{\mu(dy)}{|x-y|^{d-2}} = 0, \quad d \geq 3$$

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y|<\alpha} (\log|x-y|^{-1})\mu(dy) = 0, \quad d = 2$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y|\leq 1} \mu(dy) < \infty, \quad d = 1$$

を満たすこととする. $d \geq 3$ のとき, K_d のサブクラス K_d^{∞} を [81] に従って次で定義する:

$$K_d^{\infty} = \left\{\mu \in K_d : \lim_{A \to \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| \geq A} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-2}}\right] = 0\right\}.$$

$\mu \in K_d$ は滑らかな測度であり, PCAFA_t^{μ} が Revuz 対応する. μ が Lebesgue 測度に対して絶対連続, $\mu = V(x)dx$, であれば, A_t^{μ} は $\int_0^t V(B_s)ds$ に他ならない. $\{\tau_t\}_{t\geq 0}$ を A_t^{μ} の右連続な逆関数とする:

$$\tau_t = \inf\{s > 0 : A_s^{\mu} > t\}.$$

このとき, ブラウン運動 B_t の PCAFA_t^μ による時間変更過程 Y_t^μ は

$$Y_t^\mu = B_{\tau_t}$$

で定義される. Y_t^μ は, 細開集合 $F=\{x\in\mathbb{R}^d : \mathbb{P}_x^W(\tau_0=0)=1\}$ を状態空間に, A_∞^μ を生存時間に持つ μ-対称マルコフ過程となる (Theorem 6.2.1 in [29] and Theorem 65.9 in [52]). 集合 F が μ の位相的台に等しいことを仮定しよう:

$$F=\mathrm{supp}[\mu]. \tag{3.2}$$

集合 F への到達時刻 $\sigma_F=\inf\{t>0; B_t\in F\}$ を用いて

$$H_F u(x)=\mathbb{E}_x^W(u(B_{\sigma_F});\sigma_F<\infty),$$

で作用素 H_F を定義する. そのとき, 時間変更過程 Y_t^μ の生成する $L^2(F;\mu)$ 上のディリクレ形式 $(\check{\mathcal{E}},\mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}))$ は次で与えられる:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}})=\{\varphi\in L^2(F;\mu):\varphi=u\ \mu\text{-a.e. on } F \text{ for some } u\in H_e^1(\mathbb{R}^d)\} \\ \check{\mathcal{E}}(\varphi,\varphi)=\frac{1}{2}\mathbf{D}(H_F u, H_F u),\ \varphi\in\mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}). \end{cases} \tag{3.3}$$

ここに $H_e^1(\mathbb{R}^d)$ は, $(\frac{1}{2}\mathbf{D},H^1(\mathbb{R}^d))$ の拡大ディリクレ空間である (Theorem 6.2.1 in [29]).

以後 $d\geq 3$ を仮定し, ブラウン運動のグリーン関数, $c(d)/|x-y|^{d-2}$, を $R(x,y)$ と記す. $\mu\in K_d^\infty$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} R(x,y)d\mu(y)\in C_\infty(\mathbb{R}^d) \tag{3.4}$$

が成り立つ　実際, $R(x,y)\wedge n$ を $R^n(x,y)$ と記すとき, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\downarrow 0$ を満たす正数の列 α_n が存在して, $R^n(x,y)=R(x,y)$, $|x-y|\geq\alpha_n$ となる. $\mu\in K_d$ の定義より,

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}R(x,y)1_{\{|y|<R\}}d\mu(y)-\int_{\mathbb{R}^d}R^n(x,y)1_{\{|y|<R\}}d\mu(y)\right| \\ \leq\ & 2\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<\alpha_n}R(x,y)1_{\{|y|<R\}}d\mu(y)\to 0\quad n\to\infty. \end{aligned}$$

$\int_{\mathbb{R}^d}R^n(x,y)1_{\{|y|<R\}}d\mu(y)\in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ であるから,

$$\int_{\mathbb{R}^d}R(x,y)1_{\{|y|<R\}}d\mu(y)\in C_\infty(\mathbb{R}^d).$$

したがって, (3.4) が K_d^∞ の定義より導かれる.

$\{R_\alpha^\mu(x,dy)\}_{\alpha\geq 0}$ を Y_t^μ のリゾルベント核とする. 等式

$$\mathbb{E}_x^W\left(\int_0^\infty f(Y_t)dt\right)=\mathbb{E}_x^W\left(\int_0^\infty f(B_t)dA_t^\mu\right),$$

に注意すると

$$R_0^\mu(x,dy)=R(x,y)\mu(dy) \tag{3.5}$$

が従う. 任意の (x,y) に対して $R(x,y)>0$ であるから,

$$R_0^\mu 1_A(x)=\int_F R(x,y)1_A(y)d\mu(y)>0$$

が, $\mu(A)>0$ を満たす $A\in\mathcal{B}(F)$ に対して成立する. このことは Y_t^μ の既約性を意味する. 以上をまとめると, 次の補題を得る.

Lemma 3.1. *The time-changed process Y_t^μ satisfies I $\sim$ III.*

Schrödinger 作用素のポテンシャルとしてだけでなく時間変更においても, 加藤クラスは取り扱い易いクラスであることがこの補題から分かる.

4. 全滞在時間に関する M. Kac の定理

Proposition 4.1. If $\mu \in K_d^\infty$ satisfies (3.2), then

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\log \mathbb{P}_x^W(A_\infty^\mu>\beta) = -\inf\left\{\check{\mathcal{E}}(u,u) : u\in\mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}),\ \int_F u^2d\mu = 1\right\}. \tag{4.1}$$

Proof. As mentioned above, the time-changed process Y_t^μ satisfies Assumption I $\sim$ III. Since A_∞^μ is the lifetime of Y_t^μ, Corollary 2.11 tells us that the equation (4.1) holds for any $x\in F$. Since $A_{\sigma_F}^\mu = 0$ and thus

$$A_\infty^\mu = A_{\sigma_F}^\mu + A_\infty^\mu(\theta_{\sigma_F}) = A_\infty^\mu(\theta_{\sigma_F}),\quad \mathbb{P}_x^W\text{-a.s. on }\ \sigma_F<\infty,$$

we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x^W(A_\infty^\mu>\beta) &= \mathbb{P}_x^W(A_\infty^\mu>\beta;\sigma_F<\infty)\\ &= \mathbb{E}_x^W(\mathbb{P}_{X_{\sigma_F}}(A_\infty^\mu>\beta);\sigma_F<\infty)\\ &= \mathbb{P}_\nu^W(A_\infty^\mu>\beta),\end{aligned}$$

by the strong Markov property. Here, ν is the positive measure on F defined by $\nu(B) = \mathbb{P}_x(X_{\sigma_F}\in B;\sigma_F<\infty)$, $B\in\mathcal{B}(F)$. Therefore, (4.1) holds for any $x\in\mathbb{R}^d$. □

Lemma 4.2. *It holds that*

$$\begin{aligned}&\inf\left\{\check{\mathcal{E}}(u,u) : u\in\mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}),\ \int_F u^2d\mu=1\right\}\\ =\ &\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) : u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu=1\right\}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Proof. On account of the regularity of $(\check{\mathcal{E}},\mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}))$ (Theorem 6.2.1 (iii) in [29]), the left hand side of (4.2) equals to

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(H_Fu,H_Fu) : u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu=1\right\},$$

and the above is equal to the right hand side of (4.2) because

$$\mathbf{D}(H_Fu,H_Fu)\le\mathbf{D}(u,u)$$

by the Dirichlet principle (Theorem 4.3.2 in [29]). □

$\|R\mu\|_\infty<\infty$ を満たす $\mu\in K_d$ に対して, 時間変更過程 Y^μ の生成作用素を L^μ, そのスペクトル下限を λ_2^μ と記す. 等式

$$\frac{-L^\mu R\mu}{R\mu+\epsilon} = \frac{-L^\mu R_0^\mu 1}{R\mu+\epsilon} = \frac{1}{R\mu+\epsilon}$$

より, $\lambda_2^\mu\ge 1/\|R\mu\|_\infty$ が (2.8) から導かれる.

Corollary 4.3. ([55]) *For $\mu\in K_d$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu\le\frac{\|R\mu\|_\infty}{2}\mathbf{D}(u,u)\quad\text{for } u\in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Proposition 4.1 と Lemma 4.2 を合わせると次の定理を得る.

Theorem 4.4. ([59]) *It holds that for $\mu\in K_d^\infty$,*

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\log\mathbb{P}_x^W(A_\infty^\mu>\beta) = -\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) : u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu=1\right\}.$$

Remark 4.5. Considering the absorbing Brownian motion, we can extend Theorem 4.4 as follows: for a Green bounded domain $D \subset \mathbb{R}^2(d=1,2)$ and any domain $(d \geq 3)$,

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mathbb{P}_x^W(A^\mu_{\tau_D} > \beta) = -\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) : u \in C_0^\infty(D),\ \int_D u^2 d\mu = 1\right\}.$$

Here $\tau_D = \inf\{t > 0 : B_t \notin D\}$.

Example 4.1. Let $d = 3$. Let $\mu(dx) = 1_{B(0,1)}(x)dx$. Then, by Theorem 4.4

$$\begin{aligned} &\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mathbb{P}_x^W\left(\int_0^\infty 1_{B(0,1)}(B_t)dt > \beta\right) \\ = \quad &-\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u); u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),\ \int_{\{|x|<1\}} u^2 dx = 1\right\}. \end{aligned}$$

The right hand side equals $\frac{\pi^2}{8}$ (e.g. [29, Exercise 6.4.10]). $\frac{\pi^2}{8}$ is also the principal eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on the interval $(-1,1)$. Hence, for any $x \in \mathbb{R}^3$ and $y \in (-1,1)$

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log \mathbb{P}_x^W\left(\int_0^\infty 1_{B(0,1)}(B_t)dt > \beta\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_y^W(t < \tau_{(-1,1)}).$$

Here, $\mathbb{P}_y^W$ means the one-dimensional Brownian motion. When both x and y are the origin of $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}$ respectively, the equation above is a corollary of Ciesielski-Taylor theorem ([48]): $\tau_{(-1,1)}$ with respect to the one-dimensional Wiener measure $\mathbb{P}_o^W$ has the same distribution as $\int_0^\infty 1_{B(0,1)}(B_t)dt$ with respect to the three-dimensional Wiener measure $\mathbb{P}_o^W$.

5. Feynman–Kac 汎関数の可積分性

この節では Feynman–Kac 汎関数の可積分性, いわゆる gaugeability について, Corollary 2.14 を応用することを考える.

Theorem 5.1. ([60]) *Suppose that $\mu \in K_d^\infty$ satisfies (3.2). Then*

$$\sup_{x\in D} \mathbb{E}_x^W\left(\exp(A^\mu_{\tau_D})\right) < \infty \tag{5.1}$$

if and only if

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) : u \in C_0^\infty(D),\ \int_D u^2 d\mu = 1\right\} > 1. \tag{5.2}$$

Proof. The time changed process Y_t of the part process B_t^D by $A^\mu_{\tau_D\wedge t}$ satisfies Assumption I $\sim$ III. Note $A^\mu_{\tau_D}$ is the lifetime of Y_t. Denote by $\check{\mathcal{E}}^D$ the Dirichlet form generated by Y_t. Then, Corollary 2.14 tells us that the equation (5.1) holds if and only if

$$\inf\left\{\check{\mathcal{E}}^D(u,u) : u \in \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}^D),\ \int_F u^2 d\mu = 1\right\} > 1.$$

By Lemma 4.2, the left hand side above is equal to the left hand side of (5.1). □

Example 5.1. Let $\mu \in K_d^\infty$. For any compact set $K \subset D$, define

$$\pi(K,D) = \begin{cases} \frac{\mu(K)}{\mathrm{Cap}(K,D)} & \text{for } \mathrm{Cap}(K,D) > 0, \\ 0 & \text{for } \mathrm{Cap}(K,D) = 0. \end{cases}$$

Here, $\mathrm{Cap}(K,D)=\inf\{\mathbf{D}(u,u); u\geq 1 \text{ on } K,\ u\in C_0^\infty(D)\}$. It is known in Theorem 2.5.2/1 in [43] that

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u): u\in C_0^\infty(D),\ \int_D u^2 d\mu=1\right\}>\begin{cases}0 & \text{if } \sup_{K\subset D}\pi(K,D)<\infty\\ 1 & \text{if } \sup_{K\subset D}\pi(K,D)<\frac{1}{8}.\end{cases}$$

Let $d=3$. Let H be a 2-dimensional hyperplane in $\mathbb{R}^3$ and M a Borel subset of H with regular boundary. Let μ be the positive measure defined by $\mu(B)=m(M\cap B)$, where m is the 2-dimensional Lebesgue measure. Then, it is known in [43, p.139] that

$$\sup_{F\subset\mathbb{R}^3}\pi(F,\mathbb{R}^3)\leq\frac{\pi^{1/2}}{8}m(M)^{1/2}.$$

As a result, if $m(M)<\frac{1}{\pi}$, then $\mathbb{E}_x^W(e^{A_\infty^\mu})<\infty$.

For $d\geq 3$ and a closed set F

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_x^W\left(\exp\left(\int_0^\infty 1_F(B_t)dt\right)\right)<\infty$$

if

$$\sup_{K\subset\mathbb{R}^d}\frac{|F\cap K|}{\mathrm{Cap}(K)}<\frac{1}{8}. \tag{5.3}$$

Here $|\cdot|$ means the Lebesgue measure and $\mathrm{Cap}(K)=\mathrm{Cap}(K,\mathbb{R}^d)$. For a closed set F denote by B_F the ball with the same volume as F:

$$B_F=B(0,r_F),\qquad r_F=\frac{\left(|F|\Gamma(\frac{d}{2}+1)\right)^{1/d}}{\sqrt{\pi}}.$$

Since by [43, 2.2.3, 2.2.4]

$$\begin{aligned}\frac{|F\cap K|}{\mathrm{Cap}(K)}\ &\leq\ \frac{|F\cap K|}{\mathrm{Cap}(F\cap K)}\leq\frac{|F\cap K|}{\mathrm{Cap}(B_{F\cap K})}\\ &=\ \frac{|B_{F\cap K}|}{\mathrm{Cap}(B_{F\cap K})}\leq\frac{|B_F|}{\mathrm{Cap}(B_F)}=\frac{{r_F}^2}{d(d-2)},\end{aligned}$$

the equation (4.3) holds if

$$|F|<\frac{\left(\frac{1}{8}d(d-2)\pi\right)^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}.$$

Example 5.2. Let (M,g) be a spherically symmetric Riemannian manifold with a pole o and consider the Brownian motion $(\mathbb{P}_x,X_t)$ on M. The Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ generated by the Brownian motion is as follows:

$$\begin{cases}\mathcal{E}(u,u)=\frac{1}{2}\int_M(\nabla u,\nabla v)dv_g,\quad u,\ v\in\mathcal{D}(\mathcal{E})\\ \mathcal{D}(\mathcal{E})=\text{the clousre of } C_0^\infty \text{ with respect to } \mathcal{E}+(\ ,\ )_{v_g},\end{cases}$$

where v_g is the Riemannian volume.

Let $B_r=\{x\in M:\rho(o,x)<r\}$ and ∂B_r its boundary. Let σ_r be the surface measure of ∂B_r and $S(r)$ the area of ∂B_r, $S(r)=\sigma_r(\partial B_r)$. The measure σ_r belongs to $\mathcal{K}_\infty(G)$ (We can define $\mathcal{K}_\infty(G)$ by the same way as $\mathcal{K}_d^\infty$. Suppose that M is hyperbolic, i.e.,

$$\int_1^\infty\frac{dr}{S(r)}<\infty.$$

(see [32]). On account of the Dirichlet principle, we see that

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\int_M(\nabla v,\nabla v)dv_g: v\in\mathcal{F},\ \int_{\partial B_R}v^2d\sigma=1\right\}$$

$$= \quad \inf\left\{\frac{1}{2}\int_M (\nabla v, \nabla v) dv_g : v = H_{\partial B_R} f(x), \quad \int_{\partial B_R} f^2 d\sigma = 1\right\}.$$

Here $H_{\partial B_R} f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_{\sigma_{\partial B_R}}); \sigma_{\partial B_R} < \infty)$, $\sigma_{\partial B_R} = \inf\{t > 0 : X_t \in \partial B_R\}$. By the spherical symmetry, the infimum is attained by the function $v(x)$:

$$v(x) = c \cdot \mathbb{P}_x(\sigma_{\partial B_R} < \infty),$$

where $c = 1/\sqrt{S(R)}$. Since the Green function $R(o, x)$ is written as

$$R(o, x) = 2\int_{d(o,x)}^{\infty} \frac{dr}{S(r)}$$

([32, Example 4.1]), we see that

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{S(R)} \int_R^\infty \frac{dr}{S(r)}} \int_{d(o,x)}^\infty \frac{dr}{S(r)} & d(o,x) > R \\ \frac{1}{\sqrt{S(R)}} & d(o,x) \le R, \end{cases} \tag{5.4}$$

and thus

$$\frac{1}{2}\int_M (\nabla v, \nabla v) dv_g = \frac{1}{2S(R)\int_R^\infty \frac{dr}{S(r)}}. \tag{5.5}$$

Therefore, we can conclude that

$$2S(R)\int_R^\infty \frac{1}{S(r)} dr < 1 \Longleftrightarrow \sup_{x \in M} \mathbb{E}_x\left(e^{\ell_R(\infty)}\right) < \infty, \tag{5.6}$$

where $\ell_R(t)$ the PCAF corresponding to σ_R. For $M = \mathbb{R}^d$ ($d \ge 3$), $S(r) = \omega_d r^{d-1}$ (ω_d: the area of the unit sphere in $\mathbb{R}^d$), and we see that the measure σ_R is gaugeable if and only if $\frac{d-2}{2} > R$.

If M is 2-dimensional hyperbolic space H^2, then $S(r) = \omega_2 \sinh r$ and

$$2S(R)\int_R^\infty \frac{1}{S(r)} dr = (e^R - e^{-R}) \log\left(\frac{e^R + 1}{e^R - 1}\right).$$

Put

$$f(r) = (e^r - e^{-r}) \log\left(\frac{e^r + 1}{e^r - 1}\right), \quad r > 0.$$

Then $f(r)$ is strictly increasing, $\lim_{r \to 0} f(r) = 0$, and $\lim_{r \to \infty} f(r) = 2$. Hence the equation $f(r) = 1$ has a unique root $r_0 (\approx 0.22767)$, and if $R < r_0$, then σ_R is gaugeable.

Let us consider 3-dimensional hyperbolic space H^3. Then $S(r) = \omega_3 \sinh^2 r$ and

$$2S(R)\int_R^\infty \frac{1}{S(r)} dr = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R}} < 1. \tag{5.7}$$

Hence, σ_R is gaugeable for all $R > 0$, and from which σ_R is expected to be gaugeable for all $R > 0$ in case $d \ge 4$. In fact,

$$\begin{aligned} 2S(R)\int_R^\infty \frac{1}{S(r)} dr &= 2(e^R - e^{-R})^{d-1} \int_R^\infty \frac{1}{(e^r - e^{-r})^{d-1}} dr \\ &\le 2(e^R - e^{-R})^{d-1} \int_R^\infty \frac{1}{(e^r - e^{-R})^{d-1}} dr \\ &< \frac{2}{d-1} < 1. \end{aligned}$$

The left hand side of (4.5) equals to $\mathrm{Cap}(\partial B_R)/S(R)$. Hence we can also say that the measure σ_R is gaugeable if and only if R satisfies

$$\mathrm{Cap}(\partial B_R) > S(R).$$

ジャンプ型マルコフ過程の典型として対称 α-安定過程 $(0 < \alpha < 2)$, すなわち生成作用素 $(-\Delta)^{\alpha/2}$ を持つ $\mathbb{R}^d$ 上のマルコフ過程 $\mathbf{M}^\alpha = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \theta_t, \mathbb{P}_x, X_t)$ を扱う. 以前のように, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ は最小の (augmented) admissible filtration で, θ_t, $t \geq 0$, は $X_s(\theta_t) = X_{s+t}$, $s, t \geq 0$, を満たすシフト作用素とする.

$p(t,x,y)$ を $\mathbf{M}^\alpha$ の推移密度関数とし, $R_\beta(x,y)$, $\beta \geq 0$ をその β-グリーン関数

$$R_\beta(x,y) = \int_0^\infty e^{-\beta t} p(t,x,y)dt$$

とする. $\mathbf{M}^\alpha$ が過渡的, $0 < \alpha < d$, のとき, 0-グリーン関数 $R_0(x,y)$ は

$$R_0(x,y) = \int_0^\infty p(t,x,y)dt = C(d,\alpha)|x-y|^{\alpha-d} \tag{5.8}$$

と表わされる. ここで, $C(d,\alpha) = 2^{-\alpha}\pi^{-d/2}\Gamma(\frac{d-\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha}{2})^{-1}$ で, Γ はガンマ関数. R_0 は指数 α の *Riesz kernel* である. $R_0(x,y)$ を簡単に $R(x,y)$ と記す. 正のボレル測度 μ に対し, μ の β-ポテンシャルを

$$R_\beta\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} R_\beta(x,y)\mu(dy)$$

で定義し, $R_0\mu$ を $R\mu$ と記す. P_t を $\mathbf{M}^\alpha$ の半群とする:

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y)f(y)dy = \mathbb{E}_x(f(X_t)).$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ を $\mathbf{M}^\alpha(0 < \alpha < 2)$ から生成されるディィリクレ空間とする:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) = \mathcal{A}(d,\alpha) \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\Delta} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\Delta} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy < \infty \right\} \end{cases} \tag{5.9}$$

ここに $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ で

$$\mathcal{A}(d,\alpha) = \frac{\alpha 2^{d-1}\Gamma(\frac{\alpha+d}{2})}{\pi^{d/2}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}$$

([29, Example 1.4.1]).

$\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$ を拡大ディリクレ空間 ([29, Section 1.5]) とする. $\alpha < d$ のとき, $\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ を内積とする Hilbert 空間となる ([29, Theorem 1.5.3]).

Definition 5.2. (i) $\mathbb{R}^d$ 上の正のラドン測度 μ が *Kato class* ($\mu \in K_{d,\alpha}$ in notation) に属するとは,

$$\lim_{\beta\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} R_\beta\mu(x) = 0 \tag{5.10}$$

が成り立つときをいう.

(ii) 正の測度 μ が *β-Green-tight* ($\mu \in K^\infty_{d,\alpha}(\beta)$ in notation) であるとは, μ が $K_{d,\alpha}$ に属し

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{|y|>R} R_\beta(x,y)\mu(dy) = 0 \tag{5.11}$$

を満たすときをいう.

リゾルベント方程式より, 任意の $\beta > 0$ に対して

$$K^\infty_{d,\alpha}(\beta) = K^\infty_{d,\alpha}(1)$$

となる. $d > \alpha$ のときは $K^\infty_{d,\alpha}(0)$ を $K^\infty_{d,\alpha}$ と記す. $\mu \in K_{d,\alpha}$ に対して対称形式 $\mathcal{E}^\mu$ を

$$\mathcal{E}^\mu(u,u) = \mathcal{E}(u,u) - \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}). \tag{5.12}$$

で定義する．$\mu \in K_{d,\alpha}^{\infty}$ は容量零な集合に測度を持たないことが知られており ([1, Theorem 3.3]), $\mathcal{E}^{\mu}$ は well-defined である．さらに [1, Theorem 4.1] より $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は下半有界な閉対称形式になることが分かる．$\mathcal{H}^{\mu}$ で $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ から生成される自己共役作用素を記す: $\mathcal{E}^{\mu}(u,v) = (\mathcal{H}^{\mu}u, v)$. P_t^{μ} を $\mathcal{H}^{\mu}$ が生成する L^2-半群とする: $P_t^{\mu} = \exp(-t\mathcal{H}^{\mu})$. P_t^{μ} は $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上連続な対称積分核 $p^{\mu}(t,x,y)$ を持つ ([1, Theorem 6.3(iv)]). $\mu \in K_{d,\alpha}^{\infty}$ に対して A_t^{μ} を Revuz 対応する PCAF をすると, Feynman–Kac の公式より半群 P_t^{μ} は

$$P_t^{\mu} f(x) = \mathbb{E}_x(\exp(A_t^{\mu}) f(X_t)). \tag{5.13}$$

と表わされる

Theorem 5.3. ([55]) *Let $\mu \in K_{d,\alpha}$. Then*

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu(dx) \le \|R_\beta \mu\|_\infty \mathcal{E}_\beta(u,u), \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \tag{5.14}$$

where $\mathcal{E}_\beta(u,u) = \mathcal{E}(u,u) + \beta\int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx$.

Theorem 5.4. ([72, Theorem 3.4], [64, Theorem 2.7]) *If $\mu \in K_{d,\alpha}^{\infty}(1)$, then the embedding of $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ into $L^2(\mu)$ is compact. If $d > \alpha$ and $\mu \in K_{d,\alpha}^{\infty}$, then the embedding of $\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$ into $L^2(\mu)$ is compact.*

Example 5.3. Let σ_r be the surface measure of ∂B_r, where ∂B_r is the sphere with radius $r > 0$ at 0. Since the symmetric α-stable process hits the sphere ∂B_r if $1 < \alpha \le 2$, the surface measure σ_r is smooth. Denote by $\ell_r(t)$ the additive functional corresponding to σ_r. The surface measure σ_r is then gaugeable if and only if

$$\inf\left\{\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) : \int_{\{|x|=r\}} u^2 d\sigma_r = 1\right\} > 1.$$

Since the measure σ_r is spherically symmetric, the infimum is attained by the function

$$u(x) = c\,\mathbb{P}_x(\sigma_{\partial B_r} < \infty),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

where $c = 1/\sqrt{\sigma(\partial B_r)}$. Let $\mathrm{Cap}^{(\alpha)}(\cdot)$ be the 0-order capacity with respect to the symmetric α-stable process. Then the infimum above becomes

$$\frac{\mathrm{Cap}^{(\alpha)}(\partial B_r)}{\sigma_r(\partial B_r)},$$

because

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}(\mathbb{P}.(\sigma_{\partial B_r} < \infty), \mathbb{P}.(\sigma_{\partial B_r} < \infty)) = \mathrm{Cap}^{(\alpha)}(\partial B_r).$$

It is known that

$$\mathrm{Cap}^{(\alpha)}(\partial B_r) = \frac{2\pi^{(d+1)/2}\Gamma\left(\dfrac{\alpha+d}{2}-1\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{d}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{d-\alpha}{2}\right)} r^{d-\alpha}. \tag{5.15}$$

Therefore, since $\sigma_r(\partial B_r) = 2\pi^{d/2}\Gamma(d/2)^{-1} r^{d-1}$ for $r > 0$, the surface measure σ_r is gaugeable if and only if

$$\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{d+\alpha}{2}-1\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{d-\alpha}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}} > r.$$

Let μ_r be the equilibrium measure of ∂B_r. Since the rotation invariance of the set ∂B_r, we see that, $\mu_r = A\sigma_r$ for some constant $A > 0$. Then by the definition of the equilibrium measure, we have

$$\mu_r(\partial B_r) = \mathrm{Cap}(\partial B_r).$$

So, it follows that $A = \mathrm{Cap}(\partial B_r)/\sigma_r(\partial B_r)$, hence,

$$\mu_r = \frac{\mathrm{Cap}(\partial B_r)}{\sigma_r(\partial B_r)}\sigma_r.$$

Therefore

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x(\ell_r(\infty)) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} R\sigma_r(x) \\
&= \sup_{x\in\partial B_r} R\sigma_r(x) \qquad \text{(by the maximum principle)} \\
&= \frac{\sigma_r(\partial B_r)}{\mathrm{Cap}(\partial B_r)} \sup_{x\in\partial B_r} R\mu_r(x) \\
&= \frac{\sigma_r(\partial B_r)}{\mathrm{Cap}(\partial B_r)}.
\end{aligned}$$

Thus

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x(\ell_r(\infty)) < 1 \iff \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x(\exp(\ell_r(\infty))) < \infty.$$

The implication ($\Longrightarrow$) follows generally from Khas'minskii's lemma.

Example 5.4. Let $\mu = \mu^+ - \mu^- \in K^\infty_{d,\alpha}$ with $\mu^+ \not\equiv 0$ and $\mu^- \not\equiv 0$. Consider the Schrödinger type operator

$$\mathcal{L}^\theta = \frac{1}{2}(-\Delta)^{\alpha/2} + \theta\mu, \qquad \theta \in \mathbb{R}^1.$$

Then it follows from Theorem 3.1 that the operator $\mathcal{L}^\theta$ $(\theta > 0)$ is subcritical if and only if

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta\mu) &= \inf\Big\{\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) + \theta\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu^+(dx) : \ u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\alpha)}), \\
&\qquad \theta\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu^-(dx) = 1\Big\} > 1.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Let $\mathbb{R}^d = F + F^c$ be the Hahn decomposition: $\mu(F) = \mu^+(\mathbb{R}^d)$, $\mu^-(F^c) = -\mu(\mathbb{R}^d)$. Take $R > 0$ so large that $\mu^-(F^c \cap B_R) > 0$. Let $A = F^c \cap B_R$ and take a sequence of non-negative functions f_n in $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1_A(x) - f_n(x))^2|\mu|(dx) \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

It then holds that

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n^2(x)\mu^-(dx) = \mu^-(A) > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n^2(x)\mu^+(dx) = \mu^+(A) = 0,$$

and consequently, there exists a function $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ such that

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2(x)\mu^-(dx) = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x)\mu^+(dx) < 1. \tag{5.17}$$

Put

$$F(\theta) = \inf\left\{\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) + \theta\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu^+(dx) : \ u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\alpha)}), \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)\mu^-(dx) = 1\right\}.$$

Then $F(\theta)$, $\theta \ge 0$, is a concave function with $F(0) > 0$ by the definition. Moreover, $F(\theta)$ is dominated by the function $G(\theta) := \mathcal{E}^{(\alpha)}(f,f) + \theta\int_{\mathbb{R}^d} f^2(x)\mu^+(dx)$, where

f is a function satisfying (5.17). On account of these properties of F, we see that there exists a unique $\theta^+ > 0$ such that $F(\theta^+) = \theta^+$. By the same argument, there exists a unique $\theta^- < 0$ such that $F(\theta^-) = \theta^-$. Noting that the right hand side of (5.16) is equal to $F(\theta)/\theta$, we see that the operator $\mathcal{L}^\theta$ is subcritical for $\theta^- < \theta < \theta^+$. The operators $\mathcal{L}^\theta$ is *critical* for $\theta = \theta^\pm$ and is *supercritical* for $\theta < \theta^-$ or $\theta > \theta^+$ in the sense of [44]: for $\theta = \theta^\pm$, the equation $\mathcal{L}^\theta u = 0$ has a strictly positive continuous solution h which satisfies

$$k^{-1} R(0, x) \le h(x) \le k R(0, x) \quad x \in B_r^c,$$

where $k > 1$.

6. 散乱距離と容量

散乱距離と容量に関する M. Kac の予想が, Y. Takahashi [57], H. Tamura [75] らにより解かれた. この節では時間変更の理論を用いた簡単な証明を与え, 彼らの結果を拡張する.

滑らかな有限測度 μ に対して, $\Gamma(\mu)$ を

$$\Gamma(\mu) = \int_X \mathbb{E}_x\left(e^{-A_\zeta^\mu}\right)\mu(dx). \tag{6.1}$$

で定義する. マルコフ過程 $\mathbf{M}$ が保存的であれば, $\Gamma(\mu)$ は

$$\Gamma(\mu) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_X \left(1 - \mathbb{E}_x\left(e^{-A_t^\mu}\right)\right) m(dx). \tag{6.2}$$

と等しい. 実際, $e^{-A_t^\mu}$ で $\mathbf{M}$ を killing してできるマルコフ過程を $\mathbf{M}^A = (\mathbb{P}_x^A, X_t)$ と記す. [26, Theorem 2.22] によると, $\mathbf{M}^A$ に関する A_t^μ の Revuz measure は μ のままであることが分かり, さらに [52, (62.13)] によると

$$\mathbb{E}_x\left(\int_0^t e^{-A_s^\mu} dA_s^\mu\right) = \mathbb{E}_x^A\left(A_t^\mu\right)$$

が成り立つ. したがって, [29, Theorem 5.1.3 (iii)] から,

$$\begin{aligned}\left\langle m, 1 - \mathbb{E}_x\left(e^{-A_t^\mu}\right)\right\rangle &= \left\langle m, \mathbb{E}_x\left(\int_0^t e^{-A_s^\mu} dA_s^\mu\right)\right\rangle = \langle m, \mathbb{E}_x^A\left(A_t^\mu\right)\rangle \\ &= \int_0^t \langle \mu, p_s^A 1\rangle ds.\end{aligned}$$

となり, $p_t^A 1(x) \to \mathbb{E}_x(e^{-A_\infty^\mu}) (t \to \infty)$ から (6.1) が従う. ブラウン運動の場合には, (6.2) で定義される $\Gamma(\mu)$ は**散乱距離**と呼ばれる量の確率表現を与える ([38]).

Theorem 6.1.

$$\Gamma(\alpha\mu) = \alpha\int_X \mathbb{E}_x\left(e^{-\alpha A_\infty^\mu}\right)\mu(dx) \ \uparrow\ \mathrm{Cap}_{(0)}(\widetilde{Y}), \quad \alpha\uparrow\infty. \tag{6.3}$$

Here Cap$_{(0)}$ is 0-order capacity.

Proof. First note that the lifetime $\check{\zeta}$ of $\check{\mathbf{M}}$ is A_ζ^μ. For $x \in \widetilde{Y}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left(e^{-\alpha A_\zeta^\mu}\right) &= \check{\mathbb{E}}_x\left(e^{-\alpha\check{\zeta}}\right) = 1 - \alpha\,\check{\mathbb{E}}_x\left(\int_0^{\check{\zeta}} e^{-\alpha t} dt\right) \\ &= 1 - \alpha \check{R}_\alpha 1(x),\end{aligned}$$

where 1 is the identity function on $\widetilde{Y}$, $1 = 1_{\widetilde{Y}}(x)$. Hence the left hand side of (6.3) equals $\alpha(1, 1 - \alpha\check{R}_\alpha 1)_\mu$.

Noting that the function $1_{\widetilde{Y}}$ is in $L^2(\widetilde{Y};\mu)$ by the finiteness of μ, we know that if $1_{\widetilde{Y}} \in \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}})$, then $\alpha(1, 1-\alpha\check{R}_\alpha 1)_\mu$ is non-decreasingly convergent to $\check{\mathcal{E}}(1,1)$ as $\alpha\uparrow\infty$. We see from [29] that

$$\check{\mathcal{E}}(1,1)=\mathcal{E}(H_{\widetilde{Y}}1, H_{\widetilde{Y}}1),\quad H_{\widetilde{Y}}1(x)=\mathbb{E}_x(1_{\widetilde{Y}}(X_{\sigma_{\widetilde{Y}}});\sigma_{\widetilde{Y}}<\infty),$$

where $\sigma_{\widetilde{Y}}=\inf\{t>0: X_t\in\widetilde{Y}\}$. We thus have

$$\Gamma(\alpha\mu)=\alpha(1,1-\alpha\check{R}_\alpha 1)_\mu \ \uparrow\ \check{\mathcal{E}}(1,1)=\mathcal{E}(H_{\widetilde{Y}}1, H_{\widetilde{Y}}1) \tag{6.4}$$

as $\alpha\uparrow\infty$. Since $\widetilde{Y}$ is a nearly Borel, finely closed set, $\mathbb{P}_x(X_{\sigma_{\widetilde{Y}}}\in\widetilde{Y})=1$ and thus

$$H_{\widetilde{Y}}1(x)=\mathbb{P}_x(\sigma_{\widetilde{Y}}<\infty).$$

Therefore, the right hand side of (6.4) equals $\mathrm{Cap}_{(0)}(\widetilde{Y})$ by [29, Theorem 4.3.3].

If $1_{\widetilde{Y}}\notin\mathcal{D}(\check{\mathcal{E}})$, then $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha(1,1-\alpha\check{R}_\alpha 1)_\mu\uparrow\infty$ as $\alpha\uparrow\infty$ and $\mathrm{Cap}_{(0}(\widetilde{Y})=\infty$. The proof of the lemma is complete. □

P. He [34] は, 対称性の代わりに共役なマルコフ過程を持つ場合に Theorem 6.3 を拡張した.

7. 対称 α-安定過程における Feynman–Kac 処罰問題

7, 8, 9 節においては, Theorem 5.1 の応用として Feynman–Kac 処罰問題を取り扱う. B. Roynette, P. Vallois, M. Yor [49], [50] は様々のウエイトで正規化したブラウン運動の極限定理を示した. [80] において, K. Yano, Y. Yano, M. Yor は局所時間の非負関数や非正 (killing) Feynman–Kac 汎関数で正規化された一次元対称 α-安定過程の極限定理について調べた. Feynman–Kac 汎関数で正規化されたマルコフ過程の極限定理を, *Feynman–Kac penalizations* と彼らは呼んだ. ここでは, 多次元の対称 α-安定過程における非負 (killing) Feynman–Kac penalizations について考える.

$\mathbf{M}^\alpha=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,\mathbb{P}_x,X_t)(0<\alpha<2)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程とし, $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ を $\mathbf{M}^\alpha$ の生成するディリクレ形式 (5.9) とする. μ を Green-tight な Kato クラス $K^\infty_{d,\alpha}$(Definition 5.2) に属する測度とする. A^μ_t で μ に Revuz 対応する PCAF を記す. $\{\mathbb{Q}^\mu_{x,t}\}$ を

$$\mathbb{Q}^\mu_{x,t}(B)=\frac{1}{Z^\mu_t(x)}\int_B \exp(A^\mu_t(\omega))\mathbb{P}_x(d\omega),\quad B\in\mathcal{F}_t$$

で定義される正規化された確率測度とする. ここで, $Z^\mu_t(x)=\mathbb{E}_x(\exp(A^\mu_t))$. 我々の興味は $\mathbb{Q}^\mu_{x,t}$ の $t\to\infty$ における極限である. [80] では一次元で $\alpha\geq 1$(従って再帰的な) のとき, 非正のポテンシャルを持つ Feynman–Kac 汎関数を取り扱っている. 我々は過渡的で非負のポテンシャルを持つ場合に興味がある.

$\lambda(\theta)$ を

$$\lambda(\theta)=\inf\left\{\mathcal{E}_\theta(u,u): \int_{\mathbb{R}^d}u^2d\mu=1\right\},\quad 0\leq\theta<\infty \tag{7.1}$$

$(\mathcal{E}_\theta(u,u)=\mathcal{E}(u,u)+\theta\int_{\mathbb{R}^d}u^2dx)$ で定義する. [29, Theorem 6.2.1] と [59, Lemma 3.1] より $\lambda(0)$ は A^μ_t による時間変更過程のスペクトル下限である. $\lambda(0)$ を用いて Green-tight なクラス $K^\infty_{d,\alpha}$ を分類する:

(i) $\lambda(0)<1$

この場合, 正の定数 $\theta_0>0$ と $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ に属する正値連続関数 h が存在して

$$1=\lambda(\theta_0)=\mathcal{E}_{\theta_0}(h,h)$$

を満たす (Lemma 7.2, Theorem 5.4). そこで乗法汎関数 L^h_t を

$$L^h_t=e^{-\theta_0 t}\frac{h(X_t)}{h(X_0)}e^{A^\mu_t}. \tag{7.2}$$

で定義する.

(ii) $\lambda(0) = 1$

この場合は, 拡張ディリクレ空間 $\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$ に属する正値連続関数 h が存在して

$$1 = \lambda(0) = \mathcal{E}(h, h)$$

を満たす ([72, Theorem 3.4]). そのとき乗法汎関数 L_t^h を

$$L_t^h = \frac{h(X_t)}{h(X_0)} e^{A_t^\mu}. \tag{7.3}$$

で定義する

(iii) $\lambda(0) > 1$

この場合には, 測度 μ は *gaugeable*, すなわち,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x \left(e^{A_\infty^\mu} \right) < \infty$$

を満たす (Theorem 7.8 below). そこで $h(x) = \mathbb{E}_x(e^{A_\infty^\mu})$ とおき, 乗法汎関数 L_t^h を

$$L_t^h = \frac{h(X_t)}{h(X_0)} e^{A_t^\mu}. \tag{7.4}$$

で定義する.

(i), **(ii)**, **(iii)** はそれぞれ作用素 $-(-\Delta)^{\alpha/2} + \mu$ が *supercriticality*, *criticality*, *subcriticality* である場合に対応している (Theorem 7.8). それぞれの場合で L_t^h はマルチンゲール MF, すなわち $\mathbb{E}_x(L_t^h) = 1$ を満たす. L_t^h によって $\mathbf{M}^\alpha$ を変換してできるマルコフ過程を $\mathbf{M}^h = (\Omega, \mathbb{P}_x^h, X_t)$ と記す:

$$\mathbb{P}_x^h(B) = \int_B L_t^h(\omega) \mathbb{P}_x(d\omega), \quad B \in \mathcal{F}_t.$$

[14, Theorem 2.6] と下の Proposition 7.4 から, もし $\lambda(0) \leq 1$ ならば, $\mathbf{M}^h$ は h^2dx-対称な Harris 再帰的となることが分かる.

この節の主定理を述べるためには $K_{d,\alpha}^\infty$ のサブクラス K_S^∞ を導入する必要がある; 測度 $\mu \in K_{d,\alpha}^\infty$ が K_S^∞ に属すとは

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(|x|^{d-\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} \right) < \infty \tag{7.5}$$

を満たすことする. このクラスは J. Neveu ([45]) によって導入された *special* PCAF's のクラスに対応している (Lemma 7.9); 測度 μ が K_S^∞ に属するならば, $\int_0^t (1/h(X_s)) dA_s^\mu$ は $\mathbf{M}^h$ の *special* PCAF のクラスに属する. この事実は, Harris 再帰的なマルコフ過程の special PCAF に対する Chacon-Ornstein 型エルゴード定理を応用するために必要になる ([9, Theorem 3.18]).

Theorem 7.1. ([66]) (i) *If* $\lambda(0) \neq 1$, *then*

$$\mathbb{Q}_{x,t}^\mu \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}_x^h \quad \text{along } (\mathcal{F}_t), \tag{7.6}$$

that is, for any $s \geq 0$ *and any bounded* $\mathcal{F}_s$*-measurable function* Z,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mathbb{E}_x \left(Z \exp(A_t^\mu) \right)}{\mathbb{E}_x \left(\exp(A_t^\mu) \right)} = \mathbb{E}_x^h(Z).$$

(ii) *If* $\lambda(0) = 1$ *and* $\mu \in K_S^\infty$, *then (7.6) holds.*

7.1. Ground State h の構成. $d \le \alpha$ (resp. $d > \alpha$) に対して, μ を $K^{\infty}_{d,\alpha}(1)$ (resp. $K^{\infty}_{d,\alpha}$) に属する測度とする. 関数 $\lambda(\theta)$ を

$$\lambda(\theta) = \inf\left\{\mathcal{E}_\theta(u,u) : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\right\}, \quad \theta \ge 0. \tag{7.7}$$

で定義する.

Lemma 7.2. *The function $\lambda(\theta)$ is increasing and concave. Moreover, it satisfies $\lim_{\theta\to\infty} \lambda(\theta) = \infty$.*

Proof. It follows from the definition of $\lambda(\theta)$ that it is increasing. For $\theta_1, \theta_2 \ge 0$, $0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned}\lambda(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) &= \inf\left\{\mathcal{E}_{t\theta_1+(1-t)\theta_2}(u,u) : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\right\} \\ &\ge t\inf\left\{\mathcal{E}_{\theta_1}(u,u) : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\right\} + (1-t)\inf\left\{\mathcal{E}_{\theta_2}(u,u) : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\right\} \\ &= t\lambda(\theta_1) + (1-t)\lambda(\theta_2).\end{aligned}$$

We see from Theorem 5.3 that for $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ with $\int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1$, $\mathcal{E}_\theta(u,u) \ge 1/\|R_\theta\mu\|_\infty$. Hence we have

$$\lambda(\theta) \ge \frac{1}{\|R_\theta\mu\|_\infty}. \tag{7.8}$$

By the definition of the Kato class, the right hand side of (7.8) tends to infinity as $\theta \to \infty$. □

Lemma 7.3. *If $d \le \alpha$, then $\lambda(0) = 0$.*

Proof. Note that for $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

$$\lambda(0)\int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu \le \mathcal{E}(u,u).$$

Since $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ is recurrent, there exists a sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$ such that $u_n \uparrow 1$ q.e. and $\mathcal{E}(u_n, u_n) \to 0$ ([29, Theorem 1.6.3]). Hence if $\lambda(0) > 0$, then $\mu = 0$, which is contradictory. □

Theorem 5.4 と Lemma 7.3 より $d \le \alpha$ ならば, $\theta_0 > 0$ と $h \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ が存在して

$$\lambda(\theta_0) = \inf\left\{\mathcal{E}_{\theta_0}(h,h) : \int_{\mathbb{R}^d} h^2 d\mu = 1\right\} = 1.$$

を満たす. 関数 h は正値連続関数にとれる (e.g. Section 4 in [72]).

$M_t^{[h]}$ を福島分解におけるマルチンゲール部分とする ([29, Theorem 5.2.2]):

$$h(X_t) - h(X_0) = M_t^{[h]} + N_t^{[h]}. \tag{7.9}$$

新たなマルチンゲール M_t を

$$M_t = \int_0^t \frac{1}{h(X_{s-})} dM_s^h$$

で定義し, L_t^h を Doléans-Dade 方程式:

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dM_s. \tag{7.10}$$

の一意解とする. そのとき, Doléans-Dade の公式によると L_t^h は

$$L_t^h = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t\right) \prod_{0<s\le t} (1 + \Delta M_s)\exp(-\Delta M_s)$$

$$= \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t\right)\prod_{0<s\le t}\frac{h(X_s)}{h(X_{s-})}\exp\left(1-\frac{h(X_s)}{h(X_{s-})}\right).$$

なる表現を持つ. ここに M_t^c は M_t の連続部分とし, $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$ とする. 伊藤の公式をセミマルチンゲール $h(X_t)$ と関数 $\log x$ に応用すると, L_t^h は

$$L_t^h = e^{-\theta_0 t}\frac{h(X_t)}{h(X_0)}\exp(A_t^\mu). \tag{7.11}$$

なる簡明な表現を持つ.

$\theta_0 = 0$, すなわち,

$$\lambda(0) = \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\right\} = 1$$

を仮定する. そのとき, 関数 $h \in \mathcal{D}_e(\mathcal{E})$ で $\mathcal{E}(h,h) = 1$ となるものが存在することが [72, Theorem 3.4] より分かる. また, h は正値連続関数で

$$\frac{c}{|x|^{d-\alpha}} \le h(x) \le \frac{C}{|x|^{d-\alpha}}, \quad |x| > 1 \tag{7.12}$$

((4.19) in [72]) を満たすことも示せる. そこで乗法汎関数 L_t^h を

$$L_t^h = \frac{h(X_t)}{h(X_0)}\exp(A_t^\mu). \tag{7.13}$$

で定義し, L_t^h で $\mathbf{M}^\alpha$ を変換してできるマルコフ過程を $\mathbf{M}^h = (\Omega, \mathbb{P}_x^h, X_t)$ と記す:

$$\mathbb{P}_x^h(d\omega) = L_t^h(\omega)\cdot\mathbb{P}_x(d\omega).$$

Proposition 7.4. The transformed process $\mathbf{M}^h = (\mathbb{P}_x^h, X_t)$ is Harris recurrent, that is, for a non-negative function f with $m(\{x : f(x) > 0\}) > 0$,

$$\int_0^\infty f(X_t)dt = \infty \quad \mathbb{P}_x^h\text{-a.s.}, \tag{7.14}$$

where m is the Lebesgue measure.

Proof. Set $A = \{x : f(x) > 0\}$. Since $\mathbf{M}^h$ is an h^2dx-symmetric recurrent Markov process,

$$\mathbb{P}_x(\sigma_A\circ\theta_n < \infty,\ \forall n \ge 0) = 1 \quad \text{for q.e. } x \in \mathbb{R}^d \tag{7.15}$$

by [29, Theorem 4..f.1] (iii). Moreover, since the Markov process $\mathbf{M}^h$ has the transition density function

$$e^{-\theta_0 t}\cdot\frac{p^\mu(t,x,y)}{h(x)h(y)}$$

with respect to h^2dx, (7.15) holds for all $x \in \mathbb{R}^d$ by [29, Exercise 4.7.1]. Using the strong Feller property and the proof of [47, Chapter X, Proposition (3.11)], we see from (7.15) that $\mathbf{M}^h$ is Harris recurrent. □

もし $\theta_0 > 0$ ならば, $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ で $\mathbf{M}^h$ は正再帰的である. もし $\theta_0 = 0$ で $\alpha < d \le 2\alpha$ ならば, $h \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ で $\mathbf{M}^h$ は零再帰的となる. もし $\theta_0 = 0$ で $d > 2\alpha$ ならば, $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ で $\mathbf{M}^h$ は正再帰的である ([72, Theorem 4.15]).

7.2. **Proof of Theorem 7.1.** (1°) **Recurrent case** ($d \le \alpha$)

Theorem 7.5. ([66]) *Assume that $d \le \alpha$. Then there exist $\theta_0 > 0$ and $h \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ such that $\lambda(\theta_0) = 1$ and $\mathcal{E}_{\theta_0}(h, h) = 1$. Moreover, for each $x \in \mathbb{R}^d$*

$$e^{-\theta_0 t}\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right) \longrightarrow h(x)\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx \quad as \quad t \longrightarrow \infty.. \tag{7.16}$$

Proof. The first assertion follows from Theorem 5.4 and Lemma 7.3. Note that

$$e^{-\theta_0 t}\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right) = h(x)\mathbb{E}_x^h\left(\frac{1}{h(X_t)}\right)$$

Then by [64, Corollary 4.7] the right hand side converges to $h(x)\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx$. □

Here we would like to make a remark that [64, Corollary 4.7] is proved by Corollary 9.6 in Section 11.

Theorem 7.5 implies (7.6). Indeed,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}_x\left(\exp(A_t^\mu)|\mathcal{F}_s\right)}{\mathbb{E}_x\left(\exp(A_t^\mu)\right)} &= \frac{e^{-\theta_0 t}\mathbb{E}_x\left(\exp(A_t^\mu)|\mathcal{F}_s\right)}{e^{-\theta_0 t}\mathbb{E}_x\left(\exp(A_t^\mu)\right)}\\ &= \frac{e^{-\theta_0 s}\exp(A_s^\mu)e^{-\theta_0(t-s)}\mathbb{E}_{X_s}\left(\exp(A_{t-s}^\mu)\right)}{e^{-\theta_0 t}\mathbb{E}_x\left(\exp(A_t^\mu)\right)}\\ &\longrightarrow \frac{e^{-\theta_0 s}\exp(A_s^\mu)h(X_s)\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx}{h(x)\int_{\mathbb{R}^d} h(x)dx} = L_s^h \quad as \quad t \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

We showed in [14, Theorem 2.6 (b)] that the transformed process $\mathbf{M}^h$ is recurrent. We see from this fact that L_t^h is martingale, $\mathbb{E}(L_t^h) = 1$. Therefore Scheff's lemma leads us to Theorem 7.1 (i) (e.g. [49]).

(2°) **Transient case** ($d > \alpha$)

If $\lambda(0) < 1$, there exist $\theta_0 > 0$ and $h \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ such that $\lambda(\theta_0) = 1$ and $\mathcal{E}_{\theta_0}(h, h) = 1$. Then we can show the equation (7.16) in the same way as above. If $\lambda(0) > 1$, then A_t^μ is gaugeable (see Theorem 7.8 below), that is,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_x\left(e^{A_\infty^\mu}\right) < \infty,$$

and thus

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right) = \mathbb{E}_x\left(e^{A_\infty^\mu}\right).$$

Hence for any $s \ge 0$ and any $\mathcal{F}_s$-measurable bounded function Z

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}_x\left(Ze^{A_t^\mu}\right)}{\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right)} &= \frac{\mathbb{E}_x\left(Ze^{A_s^\mu}\mathbb{E}_{X_s}\left(e^{A_{t-s}^\mu}\right)\right)}{\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right)}\\ &\longrightarrow \frac{\mathbb{E}_x\left(Ze^{A_s^\mu}\mathbb{E}_{X_s}\left(e^{A_\infty^\mu}\right)\right)}{\mathbb{E}_x\left(e^{A_\infty^\mu}\right)} = \frac{1}{h(x)}\mathbb{E}_x\left(Ze^{A_s^\mu}h(X_s)\right) = \mathbb{E}_x^h(Z)\end{aligned}$$

as $t \to \infty$.

In the remainder of this section, we consider the case when $\lambda(0) = 1$. It is known that a measure $\mu \in K_{d,\alpha}^\infty$ is Green-bounded,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} < \infty. \tag{7.17}$$

To consider the penalization problem for μ with $\lambda(0) = 1$, we need to impose a condition on μ.

Definition 7.6. (I) A measure $\mu \in K_{d,\alpha}$ is said to be *special* if

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(|x|^{d-\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}\right)<\infty. \tag{7.18}$$

We denote by K_S^∞ the set of special measures.
(II) A PCAF A_t is said to be *special* with respect to $\mathbf{M}^h$, if for any positive Borel function g with $\int_{\mathbb{R}^d} g dx > 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_x^h\left(\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t g(X_s)ds\right)dA_t\right)<\infty.$$

コンパクトな台を持つ加藤クラスの測度は K_S^∞ に属する．クラス K_S^∞ は $K_{d,\alpha}^\infty(\beta)$ に含まれる,

$$K_S^\infty \subset K_{d,\alpha}^\infty. \tag{7.19}$$

実際, 任意の $R>0$ に対して

$$M(\mu):=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(|x|^{d-\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}\right)\geq R^{d-\alpha}\sup_{x\in B(R)^c}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}$$

なので,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{B(R)^c}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} &= \sup_{x\in B(R)^c}\int_{B(R)^c}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}}\\ &\leq \frac{M(\mu)}{R^{d-\alpha}}\longrightarrow 0,\quad R\to\infty.\end{aligned}$$

Lemma 7.7. *Let B_t be a PCAF. Then*

$$\mathbb{E}_x\left(\int_0^\infty e^{(A_t^\mu-B_t)}dA_t^\mu\right)=h(x)\mathbb{E}_x^h\left(\int_0^\infty e^{-B_t}\frac{dA_t^\mu}{h(X_t)}\right).$$

Proof. We have

$$\begin{aligned}h(x)\mathbb{E}_x^h\left(\int_0^s e^{-B_t}\frac{dA_t^\mu}{h(X_t)}\right) &= \mathbb{E}_x\left(e^{A_s^\mu}h(X_s)\int_0^s e^{-B_t}\frac{dA_t^\mu}{h(X_t)}\right)\\ &= \mathbb{E}_x\left(\int_0^s e^{A_s^\mu}h(X_s)e^{-B_t}\frac{dA_t^\mu}{h(X_t)}\right).\end{aligned}$$

Put $Y_t = e^{A_s^\mu}h(X_s)e^{-B_t}/h(X_t)$. Then since Y_t is a right continuous process, its optional projection is equal to $\mathbb{E}_x(Y_t|\mathcal{F}_t)$ (e.g. [48, Theorem 7.10]). Hence the right hand side equals

$$\mathbb{E}_x\left(\int_0^s \mathbb{E}_x\left(Y_t|\mathcal{F}_t\right)dA_t^\mu\right)=\mathbb{E}_x\left(\int_0^s e^{A_t^\mu}e^{-B_t}\frac{1}{h(X_t)}\mathbb{E}_{X_t}\left(e^{A_{s-t}^\mu}h(X_{s-t})\right)dA_t^\mu\right).$$

Since $\mathbb{E}_{X_t}\left(e^{A_{s-t}^\mu}h(X_{s-t})\right)=h(X_t)$, the right hand side equals

$$\mathbb{E}_x\left(\int_0^s e^{A_t^\mu-B_t}dA_t^\mu\right).$$

Hence the proof is completed by letting $s\to\infty$. □

次の定理は対称 α-安定過程の場合に Theorem 5.1 を拡張したものである．さらに一般のマルコフ過程に対しては, [13], [61] を参照せよ．

Theorem 7.8. ([74]) *Suppose* $d > \alpha$. *For* $\mu = \mu^+ - \mu^- \in K^\infty_{d,\alpha} - K^\infty_{d,\alpha}$, *let* $A^\mu_t = A^{\mu^+}_t - A^{\mu^+}_t$. *Then the following conditions are equivalent:*
(i) $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x(e^{A^\mu_\infty}) < \infty$.
(ii) *There exists the Green function* $R^\mu(x,y) < \infty$ $(x \neq y)$ *of the operator* $-\frac{1}{2}(-\Delta)^{\alpha/2} + \mu$ *such that*

$$\mathbb{E}_x\left(\int_0^\infty e^{A^\mu_t} f(X_t)dt\right) = \int_{\mathbb{R}^d} R^\mu(x,y)f(y)dy.$$

(iii) $\inf\left\{\mathcal{E}(u,u) + \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu^- : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu^+ = 1\right\} > 1.$

Theorem 7.8 のどれかの主張が成り立つならば, $R^\mu(x,y)$ は

$$R(x,y) \le R^\mu(x,y) \le CR(x,y). \tag{7.20}$$

を満たす ((4.19) in [72]).

Lemma 7.9. *If* $\mu \in K^\infty_S$, *then* $\displaystyle\int_0^t \frac{dA^\mu_s}{h(X_s)}$ *is special with respect to* $\mathbf{M}^h$.

Proof. We may assume that g is a bounded positive Borel function with compact support. Note that by Lemma 7.7

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^h_x\left(\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^t g(X_s)ds\right)\frac{dA^\mu_t}{h(X_t)}\right) \\ =\ &\frac{1}{h(x)}\mathbb{E}_x\left(\int_0^\infty \exp\left(A^\mu_t - \int_0^t g(X_s)ds\right)dA^\mu_t\right) \\ =\ &\frac{1}{h(x)}R^{\mu - g\cdot dx}\mu(x). \end{aligned}$$

If the measure μ satisfies $\lambda(0) = 1$, then $\mu - g\cdot dx \in K^\infty_{d,\alpha} - K^\infty_{d,\alpha}$ satisfies Theorem 7.8 (iii), and $R^{\mu-g\cdot dx}(x,y)$ is equivalent with $R(x,y)$ by (7.20). Therefore the equation (7.12) implies that (7.18) is equivalent to that $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left\{(1/h(x))R^{\mu-g\cdot dx}\mu(x)\right\} < \infty$. □

Lemma 7.7 から

$$\mathbb{E}_x\left(e^{A^\mu_t}\right) = 1 + \mathbb{E}_x\left(\int_0^t e^{A^\mu_s}dA^\mu_s\right) = 1 + h(x)\mathbb{E}^h_x\left(\int_0^t \frac{dA^\mu_s}{h(X_s)}\right).$$

となることに注意すると, 正の有限測度 ν に対し,

$$\mathbb{E}_\nu\left(e^{A^\mu_t}\right) = \nu(\mathbb{R}^d) + \langle\nu,h\rangle\mathbb{E}^h_{\nu^h}\left(\int_0^t \frac{dA^\mu_s}{h(X_s)}\right) \tag{7.21}$$

が成り立つ. ここで, $\nu^h = h\cdot\nu/\langle\nu,h\rangle$. コンパクトな台を持つ正の滑らかな関数 k に対し,

$$\psi(t) = \mathbb{E}^h_x\left(\int_0^t k(X_s)ds\right)$$

と置く. そのとき, $\lim_{t\to\infty}\psi(t) = \infty$ が $\mathbf{M}^h$ の Harris 再帰性より従う. 加えて,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t+s)}{\psi(t)} = 1 \tag{7.22}$$

が成り立つ. 実際,

$$\psi(t+s) = \mathbb{E}^h_x\left(\int_0^t k(X_u)du\right) + \mathbb{E}^h_x\left(\mathbb{E}^h_{X_t}\left(\int_0^s k(X_u)du\right)\right)$$

$$\leq \quad \psi(t) + \|k\|_\infty s$$

かつ

$$1 \leq \frac{\psi(t+s)}{\psi(t)} \leq 1 + \frac{\|k\|_\infty s}{\psi(t)}$$

より分かる.

A_t^μ を $\mathbf{M}^h$ の PCAF とみなしたときの Revuz 測度は $h^2\mu$ である ([25, Lemma 4.4]). (7.21) から

$$\frac{1}{\psi(t)}\mathbb{E}_\nu\left(e^{A_t^\mu}\right) = \frac{\nu(\mathbb{R}^d)}{\psi(t)} + \langle\nu, h\rangle \frac{\mathbb{E}_{\nu^h}^h\left(\int_0^t (1/h(X_s))dA_s^\mu\right)}{\mathbb{E}_x^h\left(\int_0^t k(X_s)ds\right)}$$

となり $\int_0^t (1/h(X_s))dA_s^\mu$ と $\int_0^t k(X_s)ds$ は $\mathbb{M}^h$ の special PCAF であるから, Chacon-Ornstein 型エルゴード定理 ([9, Theorem 3.18]) から

$$\frac{1}{\psi(t)}\mathbb{E}_\nu\left(e^{A_t^\mu}\right) \longrightarrow \langle\nu, h\rangle \cdot \frac{\langle\mu, h\rangle}{\int_{\mathbb{R}^d} kh^2 dx}, \quad t \to \infty \tag{7.23}$$

が従う. (7.12) と (7.17) より, $\langle\mu, h\rangle < \infty$ であることに注意せよ.

有界 $\mathcal{F}_s$-可測関数 Z に対して, 正の有界測度 ν を

$$\nu(B) = \mathbb{E}_x\left(Ze^{A_s^\mu}; X_s \in B\right), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

で定義する. そのとき, マルコフ性より

$$\mathbb{E}_x\left(Ze^{A_t^\mu}\right) = \mathbb{E}_\nu\left(e^{A_{t-s}^\mu}\right)$$

となる. ゆえに

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x\left(Ze^{A_t^\mu}\right)}{\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x\left(Ze^{A_t^\mu}\right)/\psi(t)}{\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right)/\psi(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{(\psi(t-s)/\psi(t))\mathbb{E}_\nu\left(e^{A_{t-s}^\mu}\right)/\psi(t-s)}{\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right)/\psi(t)}.
\end{aligned}$$

(7.22) と (7.23) から, 右辺は

$$\frac{(\langle\nu, h\rangle\langle\mu, h\rangle)/\int_{\mathbb{R}^d} kh^2 dx}{(h(x)\langle\mu, h\rangle)/\int_{\mathbb{R}^d} kh^2 dx} = \frac{\langle\nu, h\rangle}{h(x)} = \frac{1}{h(x)}\mathbb{E}_x\left(Ze^{A_s^\mu}h(X_s)\right) = \mathbb{E}_x^h(Z) \tag{7.24}$$

に等しい.

Remark 7.1. We suppose that $d > \alpha$ and $\lambda(0) = 1$. If $d > 2\alpha$, then $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on account of (7.12). Hence $\mathbf{M}^h$ is an ergodic process with the invariant probability measure $h^2 dx$, and thus for a smooth function k with compact support,

$$\frac{\psi(t)}{t} = \frac{1}{t}\mathbb{E}_x^h\left(\int_0^t k(X_s)ds\right) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} kh^2 dx.$$

Hence we see that for $\mu \in K_S^\infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}\right) = h(x)\langle\mu, h\rangle. \tag{7.25}$$

8. 熱核の安定性

$\mathbf{M}^\alpha = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_x, X_t)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程とし, 過渡的 $(\alpha < d)$ であるとする．この節では, シュレディンガー作用素の熱核の安定性について議論する．正測度 μ のポテンシャルを

$$R\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} R(x,y)d\mu(y)$$

で定義する．ここで R は, (5.8) で定義される Riesz kernel である．次の lemma は ([29, Example 2.2.1]) で示されている; ここでは, 不等式 (2.3) の 0-order version を用いて新たな証明を与える．

Lemma 8.1. ([29, Example 2.2.1]) *If $\mu \in K_{d,\alpha}^\infty$ satisfies $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} R(x,y)d\mu(x)d\mu(y) < \infty$, then $R\mu$ belongs to $\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$.*

Proof. First note that for $\mu \in K_{d,\alpha}^\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu \le \|R\mu\|_\infty \mathcal{E}(u,u), \quad u \in \mathcal{D}_e(\mathcal{E}) \tag{8.1}$$

(cf. [55]). Let K be a compact set of $\mathbb{R}^d$. Then by applying (8.1) to $\mu_K(\cdot) = \mu(K\cap\cdot)$, we have

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_K &\le (\mu(K))^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^2 d\mu_K\right)^{1/2} \\ &\le (\mu(K))^{1/2}\|R\mu_K\|_\infty^{1/2}\mathcal{E}(\varphi,\varphi)^{1/2}.\end{aligned}$$

Hence the measure μ_K is of finite energy integral, and thus

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_K &\le \mathcal{E}(R\mu_K, R\mu_K)^{1/2}\mathcal{E}(\varphi,\varphi)^{1/2} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} R(x,y)d\mu_K(x)d\mu_K(y)\right)^{1/2}\mathcal{E}(\varphi,\varphi)^{1/2}.\end{aligned}$$

By letting K increase to $\mathbb{R}^d$, we find that μ is of finite energy integral, and thus $R\mu$ is in $\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$. □

いま

$$h(x) = \mathbb{E}_x(e^{A_\infty^\mu}) \tag{8.2}$$

とすると,

$$\lambda(\mu) := \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) : \int_{\mathbb{R}^d} u^2 d\mu = 1\right\} > 1 \tag{8.3}$$

のとき, $1 \le h(x) \le M(= \sup_x \mathbb{E}_x(e^{A_\infty^\mu})) < \infty$ が成り立つ (Theorem 7.8).

Lemma 8.2. *Assume that $\lambda(\mu) > 1$. Then it holds that*

$$h(x) = R(h\mu)(x) + 1.$$

Proof. Define $M_t := \mathbb{E}_x(\exp(A_\infty^\mu)|\mathcal{F}_t)$. Then by the Markov property

$$\begin{aligned}h(X_t) &= \mathbb{E}_{X_t}(\exp(A_\infty^\mu)) = \mathbb{E}_x(\exp(A_\infty^\mu(\theta_t))|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}_x(\exp(A_\infty^\mu - A_t^\mu)|\mathcal{F}_t) = \exp(-A_t^\mu)M_t,\end{aligned}$$

and thus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left(\int_0^t h(X_s)dA_s^\mu\right) &= \mathbb{E}_x\left(\int_0^t \exp(-A_s^\mu)M_s dA_s^\mu\right) \\ &= \mathbb{E}_x(M_0) - \mathbb{E}_x(\exp(-A_t^\mu)M_t) + \mathbb{E}_x\left(\int_0^t \exp(-A_s^\mu)dM_s\right) \qquad (8.4)\end{aligned}$$

$$= h(x) - \mathbb{E}_x(h(X_t)).$$

Noting that

$$\lim_{t\to\infty} h(X_t) = \lim_{t\to\infty} \exp(-A_t^\mu)M_t = \exp(-A_\infty^\mu)\exp(A_\infty^\mu) = 1,$$

we have the lemma by letting t to ∞ in (8.4). □

測度 $\mu \in K_{d,\alpha}^\infty$ が $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} R(x,y)d\mu(x)d\mu(y) < \infty$ を満たすとする. そのとき Lemma 8.1 より $R(h\mu)$ は $\mathcal{D}_e(\mathcal{E})$ に属し, 福島分解

$$R(h\mu)(X_t) - R(h\mu)(X_0) = M_t^{[R(h\mu)]} + N_t^{[R(h\mu)]}.$$

を得る. 式 (7.10) において $M_t^{[h]} = M_t^{[R(h\mu)]}$ としてえられる方程式の一意解を, L_t^h と記す. そのとき, L_t^h より変換してできる対称マルコフ過程 $\mathbf{M}^h$ の生成するディリクレ形式は次で与えられる ([17]):

Theorem 8.3. ([17]) *The transformed process* $\mathbf{M}^h$ *is an* h^2dx*-symmetric and its Dirichlet form* $(\mathcal{E}^h, \mathcal{D}(\mathcal{E}^h)$ *on* $L^2(\mathbb{R}^d, h^2dx)$ *is*

$$\begin{cases} \mathcal{E}^h(u,v) = K\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus d} \frac{(u(x)-u(y))^2h(x)h(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy, \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}^h) = \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\alpha)}). \end{cases}$$

上の定理を得るために [17, Section 3] で扱われた関数のクラスに (8.2) で定義された h が属することを確認することで, Theorem 8.3 が応用できる. . エネルギー有限という μ に対する仮定は, このために必要になる.

$p_t^\mu(x,y)$ で $(-\Delta)^{\alpha/2} - \mu$ の熱核を記す:

$$\mathbb{E}_x\left(e^{A_t^\mu}f(X_t)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t^\mu(x,y)f(y)dy.$$

ここで, $p_t^\mu(x,y) \simeq \dfrac{1}{t^{d/\alpha}} \wedge \dfrac{t}{|x-y|}$ は, 正の定数 c, C が存在して

$$c\left(\frac{1}{t^{d/\alpha}} \wedge \frac{t}{|x-y|}\right) \le p_t^\mu(x,y) \le C\left(\frac{1}{t^{d/\alpha}} \wedge \frac{t}{|x-y|}\right).$$

を満たすことを表わす.

Theorem 8.4. *Let* $\mu \in K_\infty^{d,\alpha}$ *with* $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{\alpha-d}d\mu(x)d\mu(y) < \infty$*. Then*

$$\lambda(\mu) > 1 \iff p_t^\mu(x,y) \simeq \frac{1}{t^{d/\alpha}} \wedge \frac{t}{|x-y|}. \tag{8.5}$$

Proof. **(⟸)** By the assumption, $p^\mu(t,x,y) \le \frac{c}{t^{d/\alpha}}$, and thus

$$R^\mu(x,y) \le \int_0^1 p^\mu(t,x,y)dt + c\int_1^\infty \frac{1}{t^{d/\alpha}}dt < \infty.$$

Hence Theorem 7.8 says that $\lambda(\mu) > 1$.

(⟹) Denote $m(dx) = h^2(x)dx$. Then the Dirichlet form $\mathcal{E}^h$ is written as

$$\mathcal{E}^h(u,v) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus d} \frac{(u(x)-u(y))^2c(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}}m(dx)m(dy).$$

Here $0 < c \le c(x,y) = 1/(h(x)h(y)) \le C < \infty$. Let $p_t^h(x,y)$ be the heat kernel of $\mathbf{M}^h$, $\mathbb{E}_x^h(f(X_t)) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t^h(x,y)f(y)h^2(y)dy$. We then see from [16] that the heat kernel $p_t^h(x,y)$ satisfies

$$p_t^h(x,y) \simeq \frac{1}{t^{d/\alpha}} \wedge \frac{t}{|x-y|}.$$

Since $p_t^\mu(x,y)=h(x)p_t^h(x,y)h(y)$ by the definition of $\mathbf{M}^h$, the proof is completed. □

$\mathbf{M}^\alpha$ の熱核は (8.5) の右辺を満たす. Theorem 8.4 は, 測度 μ が Theorem 8.4 の条件を満たすほどに小さければ, Schrödinger 作用素の熱核は本質的な変化を示さないことを主張している. 同様の問題を拡散過程で考えてみよう.

M を完備なリーマン多様体とし, $d(x,y)$ をリーマン距離、m をリーマン体積とする. $p(t,x,y)$ をブラウン運動, すなわち, Laplace-Beltrami 作用素 Δ から生成される拡散過程の熱核とする. いま $p(t,x,y)$ がガウス型評価を持つと仮定する: 任意の $x,y\in M$ と $t>0$ に対し,

$$\frac{C_1\exp\left(-c_1\frac{d^2(x,y)}{t}\right)}{m(B(x,\sqrt{t}))}\le p(t,x,y)\le\frac{C_2\exp\left(-c_2\frac{d^2(x,y)}{t}\right)}{m(B(x,\sqrt{t}))}. \tag{8.6}$$

ここに C_1,c_1,C_2,c_2 は正の定数で, $B(x,r)$ は中心 $x\in M$ 半径 r の球とする. このとき [33] に従って, $p(t,x,y)$ は *Li-Yau estimate* を持つという. 測度 μ に対して Schrödinger 作用素 $\Delta+\mu$ の熱核を $p^\mu(t,x,y)$ と記すとき, $p^\mu(t,x,y)$ が Li-Yau estimate を持つための必要十分条件をあるクラスの測度に対して与えることができる ([62]): 正のラドン測度 μ がクラス $\mathcal{S}_\infty$ に属するとは, 任意の $\epsilon>0$ に対して, コンパクト集合 $K\subset M$ と正数 $\delta>0$ が存在して,

$$\sup_{(x,z)\in M\times M\setminus\Delta}\int_{K^c}\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\mu(dy)\le\epsilon$$

が成り立ち, かつ $\mu(B)<\delta$ を満たす可測集合 $B\subset K$ に対して,

$$\sup_{(x,z)\in M\times M\setminus\Delta}\int_{B}\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\mu(dy)\le\epsilon.$$

が成り立つときをいう. μ が m に絶対連続のときクラス $\mathcal{S}_\infty$ は, P. Pinchover や M. Murata が *G-small at infinity* と呼んでいるものと同じである. 上の定義は Z.-Q. Chen [13] に依る. コンパクトな台を持つ加藤測度は $\mathcal{S}_\infty$ に属する.

Theorem 8.5. ([62]) *Suppose $\mu\in\mathcal{S}_\infty$. Then $p^\mu(t,x,y)$ satisfies the Li–Yau estimate if and only if $\lambda(\mu)>1$.*

9. ディリクレ形式におけるエルゴート性

正則なディリクレ形式から生成される対称マルコフ過程は, ある優マルチンゲール乗法汎関数によりエルゴディックな対称マルコフ過程に変換される. この事実は大偏差原理における下からの評価を証明するうえで, 決定的な役割を果たす (Theorem 2.3 (i)). 加えて, 作用素論的なエルゴード定理 (Theorem 7.5) は, Feynman–Kac 処罰問題において重要な役割を果たす. この節では対称マルコフ過程のエルゴード理論に関する要約を与える.

以後 $\phi=R_\alpha g$ を 2 節で定義した関数空間 $\mathcal{D}^+$ の元とする. (2.4) で定義された乗法汎関数 L_t^ϕ で $\mathbf{M}$ を変換してできるマルコフ過程を $\mathbf{M}^\phi=(\Omega,X_t,\mathbb{P}_x^\phi,\zeta)$ と記す. [29, Lemma 6.3.2] と [52, Theorem 62.5] により $\mathbf{M}^\phi$ は ϕ^2m-対称となる. $\mathbf{M}^\phi$ から生成される $L^2(X;\phi^2m)$ 上のディリクレ形式を $(\mathcal{E}^\phi,\mathcal{D}(\mathcal{E}^\phi))$ と記す. ディリクレ形式 $\mathcal{E}$ は次の様に分解される (Beurling-Deny formula): $u\in\mathcal{D}(\mathcal{E})$ に対し

$$\mathcal{E}(u,u)=\frac{1}{2}\int_X d\mu^c_{\langle u\rangle}+\iint_{X\times X\setminus d}(u(x)-u(y))^2J(dx,dy)+\int_X u^2dk.$$

Theorem 9.1. ([14]) *The Dirichlet space $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ is included in $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\phi)$ and for $u\in\mathcal{D}(\mathcal{E})$*

$$\mathcal{E}^\phi(u,u)=\frac{1}{2}\int_X\phi^2d\mu^c_{\langle u\rangle}+\iint_{X\times X\setminus d}(u(x)-u(y))^2\phi(x)\phi(y)J(dx,dy). \tag{9.1}$$

Moreover, the identity function 1 *belongs to* $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\phi)$ *and* $\mathcal{E}^\phi(1,1)=0$.

Theorem 9.2. *The transformed process* $\mathbf{M}^\phi$ *is conservative,* $p_t^\phi 1 = 1$ *for any* $t>0$*, where* p_t^ϕ *is the semigroup of* $\mathbf{M}^\phi$*. Moreover,* $\mathbf{M}^\phi$ *is ergodic in the sense that if* $\Lambda \in \mathcal{F}$ *is* θ_t*-invariant,* $(\theta_t)^{-1}(\Lambda)=\Lambda$*, then* $\mathbb{P}^\phi_{\phi^2 m}(\Lambda)=0$ *or* $\mathbb{P}^\phi_{\phi^2 m}(\Omega\setminus\Lambda)=0$.

Theorem 9.2 の証明には, [31] で示された次の定理が必要になる. 以後, m は有限測度, $m(X)<\infty$, を仮定する.

Theorem 9.3. ([31]) *Suppose* $m(X)<\infty$*. Let* $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ *be the Dirichlet form associated with an* m*-symmetric right process* $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\mathbb{P}_x,\theta_t)$ *on* X *and suppose that*

$$1\in\mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad \textit{and} \quad \mathcal{E}(1,1)=0.$$

Then, the following statements are equivalent each other.
(i) $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ *is irreducible.*
(ii) *If a function* $u\in\mathcal{D}(\mathcal{E})$ *satisfies* $\mathcal{E}(u,u)=0$*, then* u *is constant* m*-a.e.*
(iii) *If a function* $u\in L^2(X;m)$ *satisfies* $p_t u = u$ m*-a.e. for any* $t>0$*, then* u *is constant* m*-a.e.*
(iv) $(\Omega,\mathbb{P}_m,\mathcal{F},\theta_t)$ *is ergodic, i.e., if* $\Lambda\in\mathcal{F}$ *is* θ_t*-invariant, then* $\mathbb{P}_m(\Lambda)=0$ *or* $\mathbb{P}_m(\Omega\setminus\Lambda)=0$.

Proof. **((i)$\Longrightarrow$ (ii))** Let u be a function in $\mathcal{F}$ with $\mathcal{E}(u,u)=0$. For $\lambda\in\mathbb{R}$, let $u_\lambda=(u-\lambda)_+$. Since $\mathcal{E}(u_\lambda,u_\lambda)\le\mathcal{E}(u-\lambda,u-\lambda)=0$,

$$\mathcal{E}(u_\lambda,v)=0 \qquad \text{for } \forall v\in\mathcal{F},$$

and so $Au_\lambda=0$ ($p_t u_\lambda=u_\lambda$). Set $B_\lambda=\{x\in X : u_\lambda(x)=0\}$. Noting that

$$p_t(1_{B_\lambda^c}u_\lambda)=p_t(u_\lambda)=u_\lambda=0, m\text{-a.e. on } B_\lambda,$$

we have for any n

$$p_t(1_{B_\lambda^c}1_{\{u_\lambda\ge\frac{1}{n}\}})=0 \quad \text{on } B_\lambda.$$

Thus, $p_t(1_{B_\lambda^c})=0$ m-a.e. on B_λ ($1_{B_\lambda}p_t(1_{B_\lambda^c})=0$). By the symmetry, $1_{B_\lambda^c}p_t(1_{B_\lambda})=0$. Therefore, for $f\in L^2(X;m)$

$$\begin{aligned} p_t(1_{B_\lambda}f) &= 1_{B_\lambda}p_t(1_{B_\lambda}f)+1_{B_\lambda^c}p_t(1_{B_\lambda}f)\\ &= 1_{B_\lambda}p_t(1_{B_\lambda}f)\\ &= 1_{B_\lambda}p_t(1_{B_\lambda}f)+1_{B_\lambda}p_t(1_{B_\lambda^c}f)\\ &= 1_{B_\lambda}p_t(f), \end{aligned}$$

and $m(B_\lambda)=0$ or $m(B_\lambda^c)=0$ by the assumption. Let $\lambda_0=\sup\{\lambda : m(B_\lambda)=0\}$. Then, for any $\lambda>\lambda_0$, $m(B_\lambda)\ne 0$, which implies $m(B_\lambda^c)=0$. Hence $m(\{u>\lambda_0\})=0$. On the other hand, for any $\lambda<\lambda_0$, $m(B_\lambda)=0$ and so $m(\{u<\lambda_0\})=0$. Therefore, we can conclude that $u=\lambda_0$ m-a.e.

((ii)$\Longrightarrow$ (iii)) and ((iii)$\Longrightarrow$ (i)) are trivial.

((iii)$\Longrightarrow$ (iv)) Let $F\in L^2(\mathbb{P}_m)$ with $F=F\circ\theta_t$ $\mathbb{P}_m$-a.e. for $\forall t>0$. Put $f(x)=\mathbb{E}_x(F)$. Note that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_m(F\circ\theta_t)&=\mathbb{E}_m(\mathbb{E}_{X_t}(F))=\mathbb{E}_m(f(X_t))\\ &=\mathbb{E}_m(p_t f(X_0)).\end{aligned}$$

Hence for any bounded Borel function g on X,

$$\begin{aligned}0&=\mathbb{E}_m((F\circ\theta_t-F)g(X_0))=\mathbb{E}_m((p_t f(X_0)-f(X_0))g(X_0))\\ &=(p_t f-f,g)_m,\end{aligned}$$

and thus $p_t f=f$ m-a.e. and $f=k$ (constant) m-a.e. by assumption. Therefore

$$k=f(X_n)=\mathbb{E}_{X_n}(F)=\mathbb{E}_m(F\circ\theta_t|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}_m(F|\mathcal{F}_n)\longrightarrow F,\ \mathbb{P}_m\text{-a.e. } n\longrightarrow\infty.$$

((iv)$\Longrightarrow$(iii)) Let f be an L^2-function such that $f = p_t f$. We set

$$\Omega_f = \left\{ \omega \in \Omega : \int_0^T |f(X_t)|dt < \infty \quad \text{for } \forall T \in (0,\infty) \right\}$$

and define

$$F_T(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^T f(X_t(\omega))dt & \text{if } \omega \in \Omega_f \\ 0 & \text{if } \omega \notin \Omega_f. \end{cases}$$

Then, Ω_f^c is θ_t-invariant and thus $\mathbb{P}_m(\Omega_f^c) = 0$. Since for any $\varphi \in L^2(X;m)$

$$\begin{aligned} (f,\varphi)_m &= \left(\frac{1}{T}\int_0^T p_t f dt, \varphi \right)_m = (\mathbb{E}_x(F_T), \varphi)_m \\ &= \mathbb{E}_m(F_T \varphi(X_0)). \end{aligned}$$

Since

$$F_T = \frac{1}{T}\int_0^T f(X_0 \circ \theta_t)dt \to \frac{\mathbb{E}_m(f(X_0))}{m(X)} = \frac{\int_X f dm}{m(X)}$$

by the ergodic Theorem,

$$\begin{aligned} (f,\varphi)_m &= \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_m(F_T\varphi(X_0)) \\ &= \mathbb{E}_m\left(\frac{\int_X f dm}{m(X)} \varphi(X_0) \right) = \frac{\int_X f dm}{m(X)} \int_X \varphi dm, \end{aligned}$$

and thus $f = \int_X f dm / m(X)$, m-a.e. □

Theorem 9.3 は $m(X) = \infty$ の場合に拡張されている ([15], [40]).

Lemma 9.4. *A $\mathbb{P}_m$-integrable bounded random variable Z is θ_t-invariant ($Z = Z \circ \theta_t$, $\mathbb{P}_m$-a.e., $t > 0$) if and only if $Z = g(X_0)$ $\mathbb{P}_m$-a.e. for some m-integrable bounded function g on X which is p_t-invariant, $p_t g = g$ m-a.e., $t > 0$.*

Proof. Since $\mathbb{E}_m(Z|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_m(Z\circ\theta_t|\mathcal{F}_t) = g(X_t)$ P_m-a.e. with $g(x) = \mathbb{E}_x(Z)$ by the Markov property,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_m(|Z - g(X_0)| > \epsilon) &= \mathbb{P}_m(|Z\circ\theta_t - g(X_0\circ\theta_t)| > \epsilon) = \mathbb{P}_m(|Z - g(X_t)| > \epsilon) \\ &= \mathbb{P}_m(|Z - \mathbb{E}_m(Z|\mathcal{F}_t)| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Hence $Z = g(X_0)$ $\mathbb{P}_m$-a.e. and so $g(X_t) = \mathbb{E}_m(g(X_0)|\mathcal{F}_t) = g(X_0)$ $\mathbb{P}_m$-a.e., and thus for any bounded function h on X

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_m((g(X_t) - g(X_0))h(X_0)) &= \mathbb{E}_m((p_t g(X_0) - g(X_0))h(X_0)) \\ &= \int_X (p_t g(x) - g(x))h(x)dm = 0, \end{aligned}$$

which implies $p_t g = g$ m-a.e.

Conversely, for a p_t-invariant function g, $g(X_0)$ is θ_t-invariant because

$$\mathbb{E}_m((g(X_t) - g(X_0))^2) = \mathbb{E}_m((p_t g(X_0) - g(X_0))^2) = 0.$$

□

対称性を考慮してえられる次のエルゴード定理が成立する (Fukushima [28]).

Theorem 9.5. *Assume $m(X) < \infty$. For any $f \in L^p(X;m)$, $p \geq 1$, there exists a $L^p(X;m)$-function g such that*

$$\lim_{t\to\infty} p_t f = g, \quad m\text{-a.e. and in } L^p(X;m).$$

Moreover, g is p_t-invariant.

Proof. Let $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s : s \geq t\}$. By the symmetry, $Y_t := \mathbb{E}_m(f(X_0)|\mathcal{G}_t) = p_t f(X_t)$ $\mathbb{P}_m$-a.e. and thus $p_{2t}f(X_0) = \mathbb{E}_m(Y_t|\mathcal{F}_0)$. Since Y_t is an inverse martingale, the limit $\lim_{t\to\infty} Y_t = Z$ exists $\mathbb{P}_m$-a.e. and in $L^p(\mathbb{P}_m)$. Hence $\lim_{t\to\infty} p_{2t}f(X_0) = \mathbb{E}_m(Z|\mathcal{F}_0)$ $\mathbb{P}_m$-a.e. and in $L^p(\mathbb{P}_m)$. The theorem follows with $g(x) = \mathbb{E}_x(Z)$. □

Corollary 9.6. *Assume $m(X) < \infty$. If the Markov process $\mathbf{M}$ is irreducible, then for $f \in L^p(X;m)$, $p \geq 1$*

$$\lim_{t\to\infty} p_t f(x) = \frac{1}{m(X)}\int_X f dm, \quad m\text{-a.e. and in } L^p(X;m).$$

Moreover, if for the conjugate number of $q(:= p/(p-1))$ the transition probability density satisfies $p_t(x,\cdot) \in L^q(X;m)$ for any x, then the limit holds for any $x \in X$.

Proof. For $g \in L^p(X;m)$, put $c_g = \frac{1}{m(X)}\int_X g dm$. Let $f^n = (-n \vee f) \wedge n$, $n = 1, 2, \cdots$. Then by combing Lemma 9.4 with Theorem 9.5,

$$\lim_{t\to\infty} p_t f^n(x) = c_{f^n}, \quad m\text{-a.e. and in } L^p(X;m).$$

Since

$$\begin{aligned}\|p_t f - c_f\|_p &\leq \|p_t f - p_t f^n\|_p + \|p_t f^n - c_{f^n}\|_p + \|c_{f^n} - c_f\|_p \\ &\leq 2\|f - f^n\|_p + \|p_t f^n - c_{f^n}\|_p,\end{aligned}$$

the first part of corollary follows.

The second part follows because by Hölder's inequality

$$\begin{aligned}&|p_t f(x) - c_f| = \left|\int_X p_1(x,y)\left(\int_X p_{t-1}(y,z)f(z)dm(z) - c_f\right)dm(y)\right| \\ &\leq \left(\int_X p_1^q(x,y)dm(y)\right)^{1/q}\left(\int_X\left|\int_X p_{t-1}(y,z)f(z)dm(z) - c_f\right|^p dm(y)\right)^{1/p} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{as } t\to\infty.\end{aligned}$$

□

10. Proof of Theorem 2.2

Theorem 10.1. (i) *For each open set G of $\mathcal{P}$*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_\nu(L_t \in G, t < \zeta) \geq -\inf_{\mu\in G} I_{\mathcal{E}}(\mu), \quad \nu \in \mathcal{P}.$$

(ii) *For each closed set K of $\mathcal{P}$*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x\in X}\mathbb{P}_x(L_t \in K, t < \zeta) \leq -\inf_{\mu\in K} I_{\mathcal{E}}(\mu).$$

Proof. (i) Let $\phi = R_\alpha f \in \mathcal{D}^+(A)$ and $\phi^2 m \in G$. Let $\mathbf{M}^\phi = (\Omega, X_t, \mathbb{P}_x^\phi)$ be the transformed process of $\mathbf{M}$ by the functional L^ϕ defined by (2.4). Put

$$S(t,\epsilon) = \left\{\omega \in \Omega : \left|\int_X \frac{A\phi}{\phi}(x)L_t(\omega,dx) - \int_X \phi A\phi dm\right| < \epsilon\right\}$$

$$S'(t,\epsilon) = S(t,\epsilon) \cap \{\omega \in \Omega : L_t(\omega) \in G\}, \quad \epsilon > 0,$$

and

$$\Theta_1 = \left\{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \frac{A\phi}{\phi}(X_s(\omega))ds = \int_X \phi A\phi dm\right\}$$

$$\Theta_2 = \{\omega \in \Omega : L_t(\omega) \text{ converges to } \phi^2 m\}.$$

Observe that $\int_X \left|\frac{A\phi}{\phi}\right| \phi^2 dm = \int_X |A\phi|\phi dm < \infty$, $\frac{A\phi}{\phi}$ is bounded on each compact subset of X and $C_b(X) \subset L^1(X;\phi^2 dm)$. Therefore we can conclude by the ergodic theorem that for $i = 1,\ 2$, $\mathbb{P}^\phi_x(\Theta_i) = 1$ for any $x \in X$ by taking the absolute continuity of the transition function of $\mathbf{M}$ into account.

Hence, for any $x \in X$ and $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}^\phi_x(S'(t,\epsilon)) \longrightarrow 1 \quad \text{as } t \to \infty.$$

Since

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\nu(L_t \in G, t < \zeta) &= \mathbb{E}^\phi_\nu \left(\frac{\phi(X_0)}{\phi(X_t)} \exp\left(\int_0^t \frac{A\phi}{\phi}(X_s)ds \right); L_t \in G \right) \\ &\geq \exp\left(t \left(\int_X \phi A\phi dm - \epsilon \right) \right) \mathbb{E}^\phi_\nu \left(\frac{\phi(X_0)}{\phi(X_t)}; S'(t,\epsilon) \right) \\ &\geq \exp\left(t \left(\int_X \phi A\phi dm - \epsilon \right) \right) \frac{\mathbb{P}^\phi_{\phi\nu}(S'(t,\epsilon))}{\|\phi\|_\infty}\end{aligned}$$

and $\mathbb{P}^\phi_{\phi\nu}(S'(t,\epsilon)) \to \int_X \phi d\nu$ as $t \to \infty$, we obtain

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\nu(L_t \in G, t < \zeta) \geq \int_X \phi A\phi dm - \epsilon,$$

and thus

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_\nu(L_t \in G, t < \zeta) \geq - \inf_{\substack{\phi \in \mathcal{D}^+(A) \\ \phi^2 m \in G}} \mathcal{E}(\phi,\phi).$$

The right hand side is equal to

$$- \inf_{\substack{\phi \in \mathcal{F}^+ \\ \phi^2 m \in G}} \mathcal{E}(\phi,\phi) = - \inf_{\substack{\phi \in \mathcal{F}^+ \\ \phi^2 m \in G}} I_{\mathcal{E}}(\phi^2 m) \ \left(\geq - \inf_{\mu \in G} I_{\mathcal{E}}(\mu) \right),$$

where $\mathcal{F}^+$ is the space of non-negative functions in $\mathcal{F}$. Indeed, for $f \in \mathcal{F}^+$, $\alpha R_\alpha f$ is $\mathcal{E}_1$-convergent to f as $\alpha \to \infty$, and for a sequence $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^2(X;m) \cap C_b^+(X)$ which is L^2-convergent to f as $n \to \infty$, $R_\alpha f_n \longrightarrow R_\alpha f$ in $\mathcal{E}_1$. Thus $\mathcal{D}^+(A)$ is $\mathcal{E}_1$-dense in $\mathcal{F}^+$.

(ii) Define $\mathbb{Q}_{x,t}(C) = \mathbb{P}_x(L_t \in C; t < \zeta)$ for any set $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$. For $u \in \mathcal{D}^+(A)$ and $\epsilon > 0$, we get from the fact that $\mathbb{E}_x(L_t) \leq 1$

$$\mathbb{E}_x \left(\exp\left(- \int_0^t \frac{Au}{u+\epsilon}(X_s)ds \right); t < \zeta \right) \leq \frac{u(x)+\epsilon}{\epsilon},$$

and the left hand side dominates $\exp(-t \sup_{\mu \in C} \int_X \frac{Au}{u+\epsilon}(z)\mu(dz))\mathbb{Q}_{x,t}(C)$. Hence

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in X} \mathbb{Q}_{x,t}(C) \leq \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^+(A) \\ \epsilon > 0}} \sup_{\mu \in C} \int_X \frac{Au}{u+\epsilon} d\mu. \tag{10.1}$$

Let K be a compact set of $\mathcal{P}$ and set

$$\ell = \sup_{\mu \in K} \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}^+(A) \\ \epsilon > 0}} \int_X \frac{Au}{u+\epsilon} d\mu.$$

Then, for any $\delta > 0$ and $\mu \in K$, there exist $u_\mu \in \mathcal{D}^+(A)$ and $\epsilon_\mu > 0$ such that $\int_X \frac{Au_\mu}{u_\mu+\epsilon_\mu} d\mu \leq \ell + \delta$. Since the function $\frac{Au_\mu}{u_\mu + \epsilon_\mu}$ belongs to $C_b(X)$, there exists a neighborhood $N(\mu)$ of μ such that $\int_X \frac{Au_\mu}{u_\mu+\epsilon_\mu} d\nu \leq \ell + 2\delta$ for any $\nu \in N(\mu)$.

Since $\cup_{\mu\in K}N(\mu)$ is an open covering of K, there exist $\mu_1,\dots,\mu_k$ in K such that $K\subset\cup_{j=1}^k N(\mu_j)$. Put $N_j=N(\mu_j)$. We then have for $1\le j\le k$

$$\sup_{\mu\in N_j}\int_X\frac{Au_{\mu_j}}{u_{\mu_j}+\epsilon_{\mu_j}}d\mu\le\ell+2\delta,\ \text{and so}\ \max_{1\le j\le k}\inf_{\substack{u\in\mathcal{D}^+(A)\\ \epsilon>0}}\sup_{\mu\in N_j}\int_X\frac{Au}{u+\epsilon}d\mu\le\ell+2\delta.$$

Therefore, by (10.1)

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x\in X}\mathbb{Q}_{x,t}(K)\le\max_{1\le j\le k}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x\in X}\mathbb{Q}_{x,t}(N_j)\\ &\le\max_{1\le j\le k}\inf_{\substack{u\in\mathcal{D}^+(A)\\ \epsilon>0}}\sup_{\mu\in N_j}\int_X\frac{Au}{u+\epsilon}d\mu\le\ell+2\delta.\end{aligned}\tag{10.2}$$

Since

$$-\inf_{\substack{u\in\mathcal{D}^+(A)\\ \epsilon>0}}\int_X\frac{Au}{u+\epsilon}d\mu=I_{\mathcal{E}}(\mu)\tag{10.3}$$

by Theorem 10.2 below, the proof is completed for any compact set K.

For $0<\epsilon<1/3$, let K_ϵ be a compact set such that $\sup_{x\in X}R_1 1_{K_\epsilon^c}(x)\le\epsilon$. Let

$$V_\epsilon(x)=-\frac{AR_1 1_{K_\epsilon^c}(x)}{R_1 1_{K_\epsilon^c}(x)+\epsilon}=\frac{1_{K_\epsilon^c}(x)-R_1 1_{K_\epsilon^c}(x)}{R_1 1_{K_\epsilon^c}(x)+\epsilon}.$$

We then have

$$\int_{\mathcal{P}}\exp\left(t\int_X V_\epsilon(x)\mu(dx)\right)d\mathbb{Q}_{x,t}\le\frac{R_1 1_{K_\epsilon^c}+\epsilon}{\epsilon}\le 2.\tag{10.4}$$

In addition, noting that

$$V_\epsilon(x)\begin{cases}\ge\frac{1-\epsilon}{2\epsilon}>\frac{1}{3\epsilon}, & x\in K_\epsilon^c,\\ \le 0, & x\in K_\epsilon,\end{cases}$$

and $V_\epsilon(x)>-1$, we have

$$\int_X V_\epsilon(x)\mu(dx)=\int_{K_\epsilon^c}V_\epsilon(x)\mu(dx)+\int_{K_\epsilon}V_\epsilon(x)\mu(dx)\ge\frac{1}{3\epsilon}\mu(K_\epsilon^c)-1,$$

and thus

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}}\exp\left(t\int_X V_\epsilon(x)\mu(dx)\right)d\mathbb{Q}_{x,t}&\ge\int_{\mathcal{P}}\exp\left(t\int_{K_\epsilon^c}V_\epsilon(x)\mu(dx)-t\right)d\mathbb{Q}_{x,t}\\ &\ge e^{-t}\int_{\mathcal{P}}\exp\left(\frac{t}{3\epsilon}\mu(K_\epsilon^c)\right)d\mathbb{Q}_{x,t}.\end{aligned}$$

Let $\mathcal{P}_\epsilon^\delta=\{\mu\in\mathcal{P}:\mu(K_\epsilon^c)>\delta\}$. We then see from (10.4) that

$$\mathbb{Q}_{x,t}(\mathcal{P}_\epsilon^\delta)\le 2\exp\left(t-\frac{t\delta}{3\epsilon}\right).$$

For any $\lambda>3$ let

$$J_\lambda=\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{P}_{\frac{1}{\lambda n^2}}^{\frac{3}{n}}.\tag{10.5}$$

Then

$$\mathbb{Q}_{x,t}(J_\lambda)\le 2e^t\cdot\frac{e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}\ \text{and so}\ \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x\in X}\mathbb{Q}_{x,t}(J_\lambda)\le 1-\lambda.$$

Since J_λ^c is compact by Lemma 10.1 below, we have for any closed subset K of $\mathcal{P}$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x\in X}\mathbb{Q}_{x,t}(K)$$

$$= \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in X} \mathbb{Q}_{x,t}(K \cap J_\lambda^c)\right) \vee \left(\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in X} \mathbb{Q}_{x,t}(K \cap J_\lambda)\right)$$
$$\le \left(-\inf_{\mu\in K\cap J_\lambda^c} I_{\mathcal{E}}(\mu)\right) \vee (1-\lambda) \le \left(-\inf_{\mu\in K} I_{\mathcal{E}}(\mu)\right) \vee (1-\lambda).$$

By letting λ to ∞, the proof is completed. □

Lemma 10.1. The complement J_λ^c of the set J_λ defined by (10.5) is compact in $\mathcal{P}$.

Proof. First note that the set $(\mathcal{P}_\epsilon^\delta)^c$ is closed. Indeed, if $\mu_n \in (\mathcal{P}_\epsilon^\delta)^c$ weakly converges to μ,

$$\mu(K_\epsilon^c) \le \liminf_{n\to\infty} \mu_n(K_\epsilon^c) \le \delta$$

because the set K_ϵ^c is closed. Since

$$J_\lambda^c = \bigcap_{n=1}^\infty \left(\mathcal{P}_{\frac{1}{\lambda n^2}}^{\frac{3}{n}}\right)^c = \bigcap_{n=1}^\infty \left\{\mu \in \mathcal{P} : \mu(K^c_{\frac{1}{\lambda n^2}}) \le \frac{3}{n}\right\},$$

the set J_λ^c is closed.

For any $\epsilon > 0$, we take n_0 so large that $3/n_0 < \epsilon$. Then

$$\sup_{\mu\in J_\lambda^c} \mu(K^c) \le \frac{3}{n_0} < \epsilon, \quad K = K_{\frac{1}{\lambda n_0^2}},$$

which implies that the set J_λ^c is tight. □

Denote by $\mathcal{B}_b^+(X)$ the set of non-negative bounded Borel functions on X. Let us define a function on $\mathcal{P}$ by

$$I_\alpha(\mu) = -\inf_{\substack{u\in\mathcal{B}_b^+(X)\\ \epsilon>0}} \int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha u + \epsilon}{u+\epsilon}\right) d\mu. \tag{10.6}$$

Lemma 10.2.

$$I_\alpha(\mu) \le \frac{I(\mu)}{\alpha}, \qquad \mu \in \mathcal{P}.$$

Proof. For $u = R_\alpha f \in \mathcal{D}^+(A)$ and $\epsilon > 0$, set

$$\phi(\alpha) = -\int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha u + \epsilon}{u+\epsilon}\right) d\mu.$$

Then,

$$\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = -\int_X \frac{R_\alpha u - \alpha R_\alpha^2 u}{\alpha R_\alpha u + \epsilon} d\mu = \int_X \frac{AR_\alpha^2 u}{\alpha R_\alpha u + \epsilon} d\mu.$$

Since

$$\frac{\alpha R_\alpha^2 u - R_\alpha u}{\alpha R_\alpha u + \epsilon} \ge \frac{\alpha R_\alpha^2 u - R_\alpha u}{\alpha^2 R_\alpha^2 u + \epsilon},$$

$$\int_X \frac{AR_\alpha^2 u}{\alpha R_\alpha u + \epsilon} d\mu \ge \int_X \frac{AR_\alpha^2 u}{\alpha^2 R_\alpha^2 u + \epsilon} d\mu = -\frac{1}{\alpha^2}\left(-\int_X \frac{AR_\alpha^2 u}{R_\alpha^2 u + \frac{\epsilon}{\alpha^2}} d\mu\right)$$
$$\ge -\frac{1}{\alpha^2} I(\mu).$$

Hence,

$$\phi(\infty) - \phi(\alpha) = \int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha u + \epsilon}{u+\epsilon}\right) d\mu \ge -\frac{I(\mu)}{\alpha},$$

and thus

$$-\inf_{\substack{u\in\mathcal{D}^+(A)\\ \epsilon>0}} \int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha u + \epsilon}{u+\epsilon}\right) d\mu \le \frac{I(\mu)}{\alpha}.$$

Since for any $f \in C_b^+(X)$, $\|\beta R_\beta f\|_\infty \le \|f\|_\infty$ and $0 \le \beta R_\beta f(x) \to f(x)$ as $\beta \to \infty$,

$$\int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha(\beta R_\beta f) + \epsilon}{\beta R_\beta f + \epsilon}\right) d\mu \overset{\beta\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha f + \epsilon}{f+\epsilon}\right) d\mu. \tag{10.7}$$

Define the measure μ_α by

$$\mu_\alpha(A) = \int_X \alpha R_\alpha(x, A) d\mu(x) \quad A \in \mathcal{B}(X). \tag{10.8}$$

Given $v \in \mathcal{B}_b^+(X)$, take a sequence $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset C_b^+(X) \cap L^2(X;m)$ such that

$$\int_X |v - g_n| d(\mu_\alpha + \mu) \longrightarrow 0 \text{ as } n \to \infty.$$

We then have

$$\int_X |\alpha R_\alpha v - \alpha R_\alpha g_n| d\mu \le \int_X \alpha R_\alpha(|v - g_n|) d\mu = \int_X |v - g_n| d\mu_\alpha \longrightarrow 0$$

as $n \to \infty$, and thus

$$\int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha g_n + \epsilon}{g_n + \epsilon}\right) d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha v + \epsilon}{v+\epsilon}\right) d\mu. \tag{10.9}$$

Hence, combining (10.7) and (10.9)

$$\inf_{u \in \mathcal{D}^+(A)} \int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha u + \epsilon}{u + \epsilon}\right) d\mu = \inf_{u \in \mathcal{B}_b^+} \int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha u + \epsilon}{u+\epsilon}\right) d\mu,$$

which implies the lemma. □

Lemma 10.3. If $I(\mu) < \infty$, then μ is absolutely continuous with respect to m.

Proof. For $a > 0$ and $A \in \mathcal{B}(X)$, set $u(x) = a1_A(x) + 1 \in \mathcal{B}_b^+(X)$, where 1_A is the indicator function of the set A. Then for $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha u + \epsilon}{u + \epsilon}\right) d\mu &= \int_X \log\left(\frac{a\alpha R_\alpha(x, A) + \alpha R_\alpha(x, X) + \epsilon}{a1_A(x) + 1 + \epsilon}\right) d\mu \\ &\ge -I_\alpha(\mu).\end{aligned}$$

Let μ_α be the measure in (10.8) and $c_\alpha = \mu_\alpha(X)$. By Lemma 10.2 and Jensen's inequality

$$\log\left(a\mu_\alpha(A) + c_\alpha + \epsilon\right) \ge \mu(A)\log(a + 1 + \epsilon) + \mu(A^c)\log(1+\epsilon) - I(\mu)/\alpha,$$

and by letting $\epsilon \to 0$, $\log\left(a\mu_\alpha(A) + c_\alpha\right) \ge \mu(A)\log(a+1) - I(\mu)/\alpha$. Since $\log x \le x - 1$ for $x > 0$, $a\mu_\alpha(A) + c_\alpha - 1 \ge \mu(A)\log(a+1) - I(\mu)/\alpha$, and thus

$$\mu_\alpha(A) - \mu(A) \ge \frac{-I(\mu)/\alpha + \mu(A)(\log(a+1) - a) + 1 - c_\alpha}{a}.$$

Noting that $\log(a+1) - a < 0$, we have for any $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu_\alpha(A) - \mu(A) \ge \frac{-I(\mu)/\alpha + (\log(a+1) - a) + 1 - c_\alpha}{a},$$

and

$$\begin{aligned}\mu(A) - \mu_\alpha(A) &= 1 - c_\alpha + (\mu_\alpha(A^c) - \mu(A^c)) \\ &\ge \frac{-I(\mu)/\alpha + (\log(a+1) - a) + (1 - c_\alpha)(a+1)}{a}.\end{aligned}$$

Thus we see that

$$\sup_{A \in \mathcal{B}(X)} |\mu(A) - \mu_\alpha(A)| \le \frac{a - \log(a+1) + I(\mu)/\alpha + (1 - c_\alpha)(a+1)}{a}.$$

Noting that $c_\alpha \to 1$ as $\alpha \to \infty$, we have

$$\limsup_{\alpha\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{B}(X)} |\mu(A) - \mu_\alpha(A)| \le \frac{a - \log(a+1)}{a}.$$

Since the right hand side converges to 0 as $a \to 0$ and μ_α is absolutely continuous with respect to m, we get the lemma. □

Theorem 10.2.

$$I(\mu) = I_{\mathcal{E}}(\mu), \qquad \mu \in \mathcal{P}.$$

Proof. $(I(\mu) \ge I_{\mathcal{E}}(\mu))$: Suppose that $I(\mu) = \ell < \infty$. Lemma 10.2 implies that μ is absolutely continuous with respect to m. Let us denote by f its density and put $f^n = \sqrt{f} \wedge n$. From $\log(1-x) \le -x$ for $-\infty < x < 1$, we have

$$\begin{aligned}\int_X \log\left(\frac{\alpha R_\alpha f^n + \epsilon}{f^n + \epsilon}\right) f dm &= \int_X \log\left(1 - \frac{f^n - \alpha R_\alpha f^n}{f^n + \epsilon}\right) f dm \\ &\le -\int_X \frac{f^n - \alpha R_\alpha f^n}{f^n + \epsilon} f dm,\end{aligned}$$

so that

$$\int_X \frac{f^n - \alpha R_\alpha f^n}{f^n + \epsilon} f dm \le I_\alpha(f \cdot m).$$

Note that

$$\frac{f^n - \alpha R_\alpha f^n}{f^n + \epsilon} f = \frac{\sqrt{f} - \alpha R_\alpha f^n}{\sqrt{f} + \epsilon} f 1_{\{\sqrt{f} \le n\}} + \frac{n - \alpha R_\alpha f^n}{n + \epsilon} f 1_{\{\sqrt{f} > n\}}.$$

Since the absolute value of the first (resp. second) term of the right hand side is dominated by $(\sqrt{f} + \alpha R_\alpha \sqrt{f})\sqrt{f} \in L^1(X;m)$ (resp. $f \in L^1(X;m)$), we have

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f^n - \alpha R_\alpha f^n}{f^n + \epsilon} f dm = \int_X \frac{\sqrt{f} - \alpha R_\alpha \sqrt{f}}{\sqrt{f} + \epsilon} f dm.$$

Moreover, by letting $\epsilon \to 0$,

$$\int_X \sqrt{f}(\sqrt{f} - \alpha R_\alpha \sqrt{f}) dm \le I_\alpha(f \cdot m) \le \frac{I(f \cdot m)}{\alpha},$$

which implies that $\sqrt{f} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ and $\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}) \le I(f \cdot m)$.
$(I(\mu) \le I_{\mathcal{E}}(\mu))$: For $\phi \in \mathcal{D}^+(A)$ define the semigroup p_t^ϕ by

$$p_t^\phi f(x) = \mathbb{E}_x\left(\left(\frac{\phi(X_t) + \epsilon}{\phi(X_0) + \epsilon}\right) \exp\left(-\int_0^t \frac{A\phi}{\phi + \epsilon}(X_s) ds\right) f(X_t)\right).$$

Then p_t^ϕ is $(\phi + \epsilon)^2 m$-symmetric and satisfies $p_t^\phi 1 \le 1$ in view of Lemma 6.3.1 and the proof of Lemma 6.3.2. Given $\mu = fm \in \mathcal{P}$ with $\sqrt{f} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, let

$$S_t^\phi \sqrt{f}(x) = \mathbb{E}_x\left(\exp\left(-\int_0^t \frac{A\phi}{\phi + \epsilon}(X_s) ds\right) \sqrt{f}(X_t)\right).$$

Then we see by the same argument as in Theorem 6.1.1 that

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\sqrt{f} - S_t^\phi \sqrt{f}, \sqrt{f})_m = \mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}) + \int_X \frac{A\phi}{\phi + \epsilon} f dm. \tag{10.10}$$

Since

$$\begin{aligned}&\int_X (S_t^\phi \sqrt{f})^2 dm = \int_X (\phi + \epsilon)^2 \left(p_t^\phi\left(\frac{\sqrt{f}}{\phi + \epsilon}\right)\right)^2 dm \\ &\le \int_X (\phi + \epsilon)^2 p_t^\phi\left(\left(\frac{\sqrt{f}}{\phi + \epsilon}\right)^2\right) dm \le \int_X (\phi + \epsilon)^2 \left(\frac{\sqrt{f}}{\phi + \epsilon}\right)^2 dm = \int_X f dm,\end{aligned}$$

the right hand side of (10.10) is non-negative, and thus $\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}) \geq I(f \cdot m)$. $\square$

対称マルコフ過程 $\mathbf{M}$ は, 爆発・killing を許しているので, 下からの評価 Theorem 10.1 (i) が難しくなる. しかし対称なマルコフ過程に限れば 爆発・killing があってもエルゴディックなマルコフ過程に変換可能であるという事実から Theorem 10.1 (i) が導かれる. この方法は, 1 次元ブラウン運動を扱った Donsker–Varadhan[22] によるもので, そこでは吸収壁ブラウン運動がドリフトの変換によりエルゴディックな拡散過程に変換されることを Feller テストを用いて確認している.

References

1. Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.M.: Feynman–Kac semigroups in terms of signed smooth measures, in "Random Partial Differential Equations" ed. U. Hornung et al., Birkhäuser, (1991).
2. Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., Holden, H.: Solvable Models in Quantum Mechanics, Springer (1988).
3. Albeverio, S., Ma, Z.M.: Perturbation of Dirichlet forms - Lower boundedness, closability, and form cores, J. Funct. Anal. **99**, 332-356 (1991).
4. Beurling, A., Deny, J.: Espaces de Dirichlet I, Le cas elementaire, Acta Math. **99**, 203–224 (1958).
5. Beurling, A., Deny, J.: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **45**, 208–215 (1959).
6. Blanchard, P., Ma, Z.M.: Semigroup of Schrödinger operators with potentials given by Radon measures, in "Stochastic Processes - Physics and Geometry", ed. S. Albeverio et al., World Scient., Singapore (1990).
7. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov Processes and Potential Theory, Academic Press (1968).
8. Bouleau N., Hirsch, F.: Dirichlet forms and analysis on Wiener space, de Gruyter Studies in Mathematics **14**, Walter de Gruyter, Berlin (1991).
9. Brancovan, M.: Fonctionnelles additives speciales des processus recurrents au sens de Harris, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. **47**, 163-194 (1979).
10. Brasche, J., Exner, P., Kuperin, Yu., Seba, P.: Schrödinger operators with singular interactions, J. Math. Anal. Appl. **184**, 112-139 (1994).
11. Cattiaux, P., Collet, P., Lamberrt, A., Martinez, S., Meleard, S. San Martin, J.: Quasi-stationary distributions and diffusion models in population dynamics. Ann. Probab. **37**, 1926-1969 (2009).
12. Chen, M.-F.: Speed of stability for birth-death processes. Front. Math. China **5**, 379-515 (2010).
13. Chen, Z.-Q. : Gaugeability and Conditional Gaugeability, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, 4639-4679 (2002).
14. Chen, Z.-Q., Fitzsimmons, P. J., Takeda, M., Ying, J., Zhang, T.-S: Absolute continuity of symmetric Markov processes, Ann. Probab. **32**, 2067-2098 (2004).
15. Chen Z.-Q. , Fukushima, M.: Symmetric Markov Processes, Time Change and Boundary Theory, Book manuscript (2010).
16. Chen, Z.-Q., Kumagai, T.: Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces, Probab. Theory Related Fields **140**, 277-317 (2008).
17. Chen, Z.-Q., Zhang, T.-S.: Girsanov and Feynman–Kac type transformations for symmetric Markov processes, Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. **38**, 475-505 (2002).
18. Chung, K.L.: Doubly-Feller process with multiplicative functional. Seminar on stochastic processes, Progr. Probab. Statist. **12**, 63-78, Birkhäuser (1986).
19. Davies, E.B.: L^1 properties of second order elliptic operators, Bull. London Math. Soc. 17, 417-436 (1985).
20. Davies, E.B.: Heat Kernels and Spectral Theory, Cambridge (1989).
21. De Leva, G., Kim, D., Kuwae, K.: L^p-independence of spectral bounds Feynman-Kac semigroups by continuous additive functionals, J. Funct. Anal. **259**, 690–730 (2010).
22. Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S.: Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time, Proceedings of International Conference on Function Space, ed. A.M.Arthure, Oxford (1974).
23. Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S.: Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I, Comm. Pure Appl. Math. **28**, 1-47 (1975).
24. Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S.: Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, III, Comm. Pure Appl. Math. **29**, 389-461 (1976).

25. Fitzsimmons, P.J., Absolute continuity of symmetric diffusions, Ann. Probab. **25**, 230-258 (1997).
26. Fitzsimmons, P.J., Getoor, R.K. :Revuz measures and time changes, Math. Zeit. **199**, 233-256 (1988).
27. Fukushima, M.: Dirichlet spaces and strong Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc. **162**, 185-224 (1971).
28. Fukushima, M.: A note on irreducibility and ergodicity of symmetric Markov processes, Springer Lecture Notes in Physics **173**, 200–207 (1982).
29. Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda, M.: Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, de Gruyter, 2nd rev. and ext. ed. (2010).
30. Fukushima, M., Takeda, M.: A transformation of a symmetric Markov processes and the Donsker–Varadhan theory, Osaka J. Math. **21**, 311-326 (1984).
31. Fukushima, M., Takeda, M.: Markov Processes (in Japanese), Baifukan, Tokyo (2008) ; (Chinese translation by P. He, ed. by J. Ying, Science Press, Beijing, to be published 2011.)
32. Grigor'yan, A.: Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **36**, 135-249 (1999).
33. Grigor'yan, A.: Heat kernels on weighted manifolds and applications, Contemp. Math. **338**, 93-191 (2006).
34. He, P.: A formula on scattering length of dual Markov processes, Proc. Amer. Math. Soc. **139**, 1871-1877 (2011).
35. Itô, K.: Essentials of stochastic processes, American Mathematical Society, Providence (2006).
36. Jain, N., Krylov, N.: Large deviations for occupation times of Markov processes with L_2 semigroups, Ann. Probab. **36**, 1611-1641 (2008).
37. Kac, M.: On some connections between probability theory and differential equations, Proc. 2nd Berk. Symp. Math. Statist. Probability, 189-215 (1950).
38. Kac, M.:Probabilistic methods in some problems of scattering theory, Rocky Mountain J. Math. **4** , 511-537 (1974). Scattering length for stable processes.
39. Kac, M., Luttinger, J.-M. :Scattering length and capacity, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25**, 317-321 (1975).
40. Kajino, N.: Equivalence of recurrence and Liouville property for symmetric Dirichlet forms, preprint (2010).
41. Lieb, E.H., Loss, M.: Analysis, Graduate Studies in Mathematics **14**, American Mathematical Society (2001).
42. Ma, Z.M., Röckner, M.: Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1992).
43. Maz'ja, V.G.: Sobolev Spaces, Springer (1985).
44. Murata, M.: Structure of positive solutions of $(-\Delta + V)u = 0$ in $\mathbb{R}^d$, Duke Math. J. 53, 869-943 (1986).
45. Neveu, J.: Potentiel Markovien recurrent des chaines de Harris. Ann. Inst. Fourier **22**, 85-130 (1972).
46. Rogers, L., Williams, D.: Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol. 2, John Wiley (1987).
47. Revuz, D., Yor, M.: Continuous Martingales and Brownian Motion, Third edition, Springer-Verlag, Berlin (1999).
48. Rogers, L. C. G., Williams, D.: Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1. Foundations. Reprint of the second (1994) edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
49. Roynette, B., Vallois, P., Yor, M.: Some penalizations of the Wiener measure. Jpn. J. Math. **1**, 263-290 (2006).
50. Roynette, B., Vallois, P., Yor, M.: Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights. I. Studia Sci. Math. Hungar. **43**, 171-246 (2006).
51. Sato, S.: An inequality for the spectral radius of Markov processes, Kodai Math. J. **8**, 5-13 (1985).
52. Sharpe, M: General theory of Markov processes, Pure and Applied Mathematics, 133. Academic Press, (1988).
53. Shiozawa, Y., Takeda, M.: Variational formula for Dirichlet forms and estimates of principal eigenvalues for symmetric α-stable processes. Potential Anal. **23**, 135-151 (2005).
54. Silverstein, M.: Symmetric Markov Processes, Lect. Notes in Math. 426, Springer, (1974).
55. Stollmann, P., Voigt, V.: Perturbation of Dirichlet forms by measures, Potential Anaysis **5**, 109-138 (1995).
56. Stroock, D.W. :The Kac approach to potential theory. I, J. Math. Mech. **16**, 829-852 (1967).
57. Takahashi, Y.:An integral representation on the path space for scattering length, Osaka J. Math. **7**, 373-379 (1990).

58. Takeda, M: A Large deviation for symmetric Markov processes with finite lifetime, Stochastics and Stochastic Reports **59**,143-167 (1996).
59. Takeda, M.: Exponential decay of lifetimes and a theorem of Kac on total occupation times, Potential Analysis **11**, 235-247, (1999).
60. Takeda, M.: L^p-independence of the spectral radius of symmetric Markov semigroups, Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio, Edited by Fritz Gesztesy, et.al (2000).
61. Takeda, M.: Conditional gaugeability and subcriticality of generalized Schrödinger operators, J. Funct. Anal. **191**, 343-376 (2002).
62. Takeda, M.: Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, Bull. Lond. Math. Soc. **39**, 85-94 (2007).
63. Takeda, M.: L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type semigroups, J. Funct. Anal. **252**, 550-565 (2007).
64. Takeda, M.: Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes. J. Theoret. Probab. **21**, 336-355 (2008).
65. Takeda, M.: A formula on scattering length of positive smooth measures, Proc. Amer. Math. Soc. **138**, 1491-1494 (2010).
66. Takeda, M.: Feynman–Kac penalizations of symmetric stable processes, Electron. Comm. Probab. **15**, 32-43 (2010).
67. Takeda, M.: A large deviation principle for symmetric Markov processes with Feynman-Kac functional, to appear in J. Theoret. Probab.
68. Takeda, M.: L^p-independence of growth bounds of Feynman–Kac semigroups, Surveys in Stochastic Processes, to appear in Proceedings of the 33rd SPA, European Mathematical Society.
69. Takeda, M.:Tightness Property of Symmetric Markov Processes, preprint.
70. Takeda, M., Tawara, Y.: L^p-independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups, Forum Math. **21**, 1067-1080 (2009).
71. Takeda, M., Tawara, Y.: A Large deviation principle for symmetric Markov processes normalized by Feynman−Kac Functionals, preprint.
72. Takeda, M., Tsuchida, K.: Differentiability of spectral functions for symmetric α-stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. **359**, 4031-4054 (2007).
73. Takeda, M., Tsuchida, K.: Large deviations for discontinuous additive functionals of symmetric stable processes, to appear in Math. Nachr.
74. Takeda, M., Uemura, T.: Subcriticality and gaugeability for symmetric α-stable processes, Forum Math. **16**, 505-517 (2004).
75. Tamura, H.: Semi-classical limit of scattering length, Lett. Math. Phys. **24**, 205-209 (1992).
76. Taylor, M. E.: Scattering length and perturbations of $-\Delta$ by positive potentials, J. Math. Anal. Appl. **53**, 291-312 (1976).
77. Tawara, Y.: L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger operators with non-local potentials, J. Math. Soc. Japan **62**, 767-788 (2010).
78. Varadhan, S. R. S.: Asymptotic probabilities and differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **19**, 261-286 (1966).
79. Wu, L.: Some notes on large deviations of Markov processes, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **16**, 369-394 (2000).
80. Yano, K., Yano, Y., Yor, M.: Penalising symmetric stable Lévy paths, J. Math. Soc. Japan. **61**, 757-798 (2009).
81. Zhao, Z.: Subcriticality and gaugeability of the Schrödinger operator, Trans.. Math. Soc. **334**, 75-96 (1992).

数学専攻, 東北大学, 青葉, 仙台, 980-8578
E-mail address, Masayoshi Takeda: `takeda@math.tohoku.ac.jp`