# 数理ファイナンスに現れる数値計算の確率解析手法

楠岡成雄

## 1　計算ファイナンス

### 1.1　始めに

数学では、問題の解を何らかの形で特徴づけた時点で、問題が一応解けたことになる。しかし、現実の問題に対して、数理モデルをたてて問題を数学化した場合は、抽象的な解を求めるだけでは、最初の問題が解けたことにはならないので、具体的な数値を計算する必要がある。応用上その数値は、求められる精度を持つならば、近似値でよい。簡単に数値が計算できない場合に近似値を求めること、それが数値計算である。

数値計算の歴史は古く、19 世紀には既に行われていた。当時は、コンピュータがないので、手回し計算機を用いて人海戦術により数値計算が行われていたようである。コストと時間がかかり、近似値の制度もかなり悪かっただろうと思われる。数値計算で解ける問題はかなり制限されていた。今日ではパーソナルコンピュータでもかなり高速に計算ができるようになり、ＩＴ技術の進歩と共に、数値計算が扱える範囲が大きく広がりつつある。数値計算、そしてそれを理論的に研究する数値解析は、長い歴史の下で発展していったが、それが故にますます難しい要求が数値計算に課されている。

数値計算は目的があって行うものである。たとえ、基本となる方程式は同じであっても、求めようとしているものが違えば、計算速度と精度が問題となる数値計算においてはまったく違う方法が用いられても不思議はない。計算ファイナンスは数値解析・数値計算の一分野である。しかし、これまでの数値解析・数値計算とは違った目的意識を持つために計算ファイナンスという一分野が生まれた。

コンピュータは一般の関数を直接扱うことができない。それには無限の記録容量が必要になるからである。従って通常は空間・時間を離散化し、範囲も有界の範囲に留めることで、有限の記憶容量で対応できるようにする。しかし、有限といってもあまりに巨大であれば、コンピュータはやはり対応できない。一方でコンピュータで疑似乱数・あるいは準乱数を発生させることができるので、コンピュータのない時代には不可能であった、モンテカルロ法（あるいは準モンテカルロ法）による計算ができるようになった。ファイナンスの問題では、後に述べるように最終的にはいくつかの数値さえ求められればよく、関数を求める必要がない。そのため、モンテカルロ法でそれぞれの数値を求めることができれば、十分であることが多い。

さて、ファイナンスにおいては、まず、証券価格のモデルとしてどのような確率過程を用いるかを定める必要がある。ファイナンスの一般論では、それはセミマルチンゲールであればよく、連続過程であることやマルコフ性は本質的ではない。しかし、実務においては「計算可能」であることが求められるので、ほとんどの場合に、拡散過程モデルが用いられている。

この講演では話を簡単にするために、$d, N \geqq 1$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間、$B(t) = (B^1(t), \ldots, B^d(t))$, $t \in [0, \infty)$ は (原点から出発する）$d$ 次元ブラウン運動とし、$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqq 0}$ はこ

の $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s); s \in [0,t]\} \vee \mathcal{N}$, $t \in [0,\infty)$, とする。ただし、 $\mathcal{N} = \{B \in \mathcal{F},\ P(B) = 0 \ or\ 1\}$ である。

ファイナンスでは、 $\sigma_k \in C([0,T] \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$, $k = 0,1,2,\ldots,d$, とし確率微分方程式

$$dx(t) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(t, x(t)) + \sigma_0(t, x(t))dt$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^N$$

を考え、解 $x(t)$ により証券価格等が決まると考えて話を始めることが多い。解が存在するか、一意であるかという問題が生じるが、何となく直観に沿ってまずモデルをこのように決めるということが多いのである。

この講演では、数学的な曖昧さをさけるために、以下のように、かなり限定的な条件を与える。すなわち、$V_k \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$, $k = 0,1,\ldots,d$, とする。ただし、 $C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^M)$, は $\mathbf{R}^N$ 上定義された $\mathbf{R}^M$-値の滑らかな関数でそれ自身、及びすべての階数の微分が有界関数となるものの空間である。さらに、$\mathbf{R}^N$ 上の確率微分方程式

$$X(t,x) = x + \sum_{k=0}^{d} \int_0^t V_k(X(s,x)) \circ dB^k(s), \qquad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}^N \tag{1}$$

を考える。ただし、$B^0(t) = t$, $t \geqq 0$, である。

よく知られているように、解の version として $X(t,\cdot): \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ $t \geqq 0$, が微分同相となっているものがとれる。

先に述べたように、実務ではもっと係数に対する制約が緩やかな拡散過程モデルが使われているがこの講演では証券価格等はこの確率微分方程式の解を用いて書けるものとする。

以下では、$C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ を $C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ で表すことにする。また、$V_k$, $k = 0,1,\ldots,d$, を

$$(V_k f)(x) = \sum_{i=1}^{N} V_k^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x), \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N),$$

により 1 階の微分作用素と見なすと伊藤の公式により

$$f(X(t,x)) = f(x) + \sum_{k=0}^{d} \int_0^t (V_k f)(X(s,x)) \circ dB^k(s),$$

$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$, $t \geqq 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, が成り立つ。

数理ファイナンスの問題としては以下のようなものが考えられる。

(1) 期待値計算の問題

これは、可測関数 $f: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ 及び $x_0 \in \mathbf{R}^N$, $T > 0$ が与えられた時に $E[f(X(T, x_0))]$ を数値計算せよという問題である。今、 $C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ 上の (マルコフ) 作用素の半群 $\{P_t\}_{t \geqq 0}$ を

$$(P_t f)(x) = E[f(X(t,x))], \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N) \quad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}^N,$$

で定義する。$u(t,x) = (P_t f)(t,x)$ とおくと $u$ は $[0,\infty) \times \mathbf{R}^N$ 上連続、$(0,\infty) \times \mathbf{R}^N$ 上滑らかであり、さらに

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = (Lu)(t,x), \qquad u(0,x) = f(x)$$

を満たす。ここで $L$ は

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} V_k^2 + V_0$$

で与えられる 2 階の（退化した）楕円型微分作用素である。したがって、この問題は PDE の問題とも考えられる。実際、 $N \leqq 3$ の場合は有限要素法等の手段を用いて数値計算が行われる場合もある。しかし、PDE の数値計算の手法は以下の理由で金融機関ではあまり用いられてはいない。
(i) $\mathbf{R}^N$ 上の関数を精度良く近似することは困難であるので、適当な有界領域をとり、境界条件の付いた偏微分方程式の解で近似することが多い。しかし、その段階で誤差が生じる。
(ii) 方程式の定義されている領域の次元は $N$ となるが、各座標を例えば $10^3$ 個のメッシュに切ると $10^{3N}$ 個の点で定義された関数に対する方程式を解くことになる。しかし計算機の記憶容量には限界があるため、次元 $N$ が大きいものを扱うことは困難となる（一般に $N = 4$ が限界と言われている）。このように次元が大きくなると指数的に記憶容量や計算量の負荷が増えることを「次元の呪い」と呼ぶが、まさにこの問題が生ずる。
(iii) (技術的なことであるが）$L$ が退化した楕円型作用素になることもある。これまでの PDE に対する数値計算の理論ではあまり扱われてこなかったので、近似解の理論的な精度の保証が難しい。

また、実務における $E[f(X(T, x_0)]$ を求めよという問題では、$f$ は滑らかな関数ではなく、リプシッツ連続関数であったり、不連続関数であったりする。後に見るように、このことも数値計算の問題に大きく影響する。

なお、実務では $u(T, x_0)$ だけではなく $(V_k u)(t, x_0)$, $k = 1, \ldots, d$, $\frac{\partial u}{\partial t}(T, x_0)$, 等々の微分を数値計算することもしばしば求められる。これらは Greeks と呼ばれるリスク管理のための指標である。

また、Barrier derivative といったデリバティブの計算には単純な期待値ではなく

$$E[f(X(T, x_0)),\ \min_{t\in[0,T]} X^1(t, x_0) > 0]$$

といった期待値の計算が必要となる。

(2) アメリカンデリバティブ、バミューダンデリバティブの問題

今、 $\mathcal{T}_s^T$, $0 \leqq s < T \leqq T$, を $\mathcal{F}_t$-停止時刻 $\tau$ で $s \leqq \tau \leqq T$ を満たすもの全体の集合とする。また、 $\tilde{T} > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^N$, とし $g : [0, \tilde{T}] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ は可測関数とする。

アメリカンデリバティブの価格付けの問題とは

$$c_A = \sup\{E[g(\tau, x_0)];\ \tau \in \mathcal{T}_0^{\tilde{T}}\ a.s.\}$$

を求めるという問題である。

また、 $K \geqq 2$, $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_K = \tilde{T}$, が与えられた時バミューダンデリバティブの価格付けの問題とは

$$c_B = \sup\{E[g(\tau, x_0)];\ \tau \in \mathcal{T}_0^{\tilde{T}},\ \tau \in \{T_1, \ldots, T_K\}\ a.s.\}$$

を求めるという問題である。

実務で扱われるデリバティブにはアメリカンデリバティブはほとんどなく、バミューダンデリバティブが多いので、$c_B$ を求めることが重要である。また、アメリカンデリバティブの数値計算は、バミューダデリバティブの数値計算法を用いて、$K$ をかなり大きくとり $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_K = T$ を $[0, T]$ を細かく分解するようにとって計算することが多いので、$c_B$ の数値計算について述べていく。

数学的には $c_B$ を求めることは簡単で

$$v_K(x) = g(T_K, x), \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

$$v_{n-1}(x) = g(T_{n-1}, x) \vee (P_{T_n - T_{n-1}} v_n)(x), \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

$n = K, K-1, \ldots, 0$ とおけば $c_B = v_0(x_0)$ となる。

しかし、この計算方法では関数 $v_k : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, $k = K-1, \ldots, 1$, を記憶する必要があり、「次元の呪い」を免れることができない。これがこの問題が容易ではない理由である。

(3) CVA 等 (XVA)

CVA とは credit value adjustment の略である。リーマンショックでは巨大な金融機関が倒産する、もしくは公的資本を注入し政府が救うということが起こった。いずれにせよ、その金融機関と取引のあった金融機関は巨額の負債を抱えることになった。これが様々な連鎖倒産を引き起こす理由となった。それまでは、メガバンクに代表される巨大な金融機関に対する倒産リスク（正確には default risk 債務不履行リスク) はないものとして銀行間の取引がなされてきた。しかし、近年では（連鎖倒産を食い止めるという金融監督官庁の使命もあり）そのリスクを考慮すべきであるということになり、それに伴い様々な数理的問題が現れつつある。

この問題が何故複雑であるかを説明しよう。いま、A,B という二つの銀行があり、２行間で様々な証券やデリバティブが取引されていたとする。A 銀行から見ると「B 銀行の債務不履行リスク」が問題となるが B 銀行から見れば「B 銀行の債務不履行リスク」が問題となる。このため、巨大銀行間でも担保付き取引が多くなりつつあるが、その取引では毎日、担保額を、市場での証券価格の変動を考慮して変えていく必要がある。例えば、A 銀行が絶対に債務不履行をしないということであれば、A 銀行は B 銀行に担保を差し出す必要はない。このように担保の額は A 銀行、B 銀行の信用度の差に応じて決まっていく。しかし、信用度の差も時間と共に変化するので、事は単純ではない。

この議論をファイナンスの立場から解説するには、それだけで 1 つの講座を必要とするのでここで終わりにするが、現在はこのような差し入れ担保の額は、Backward SDE の解として与えられるということになっている。今、A 銀行、B 銀行間で取引されているデリバティブは何種類もありその満期は $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_K$ であるとする。満期時に B 銀行から A 銀行に $g_k(X(T_k, x_0))$, $k = 1, 2, \ldots, K$ が支払われるとする（ここでは単純なデリバティブのみが取引されているという前提に立っている事を注意しておく）。いくつかの仮定をおくと、以下のような BSDE が問題となる。

ある関数 $\beta : [0,\infty) \times \mathbf{R}^N \to (0,\infty)$, $\gamma : [0,\infty) \times \mathbf{R}^N \to (0,\infty)$, $b : [0,T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ があって、$b(t, x, \cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は 1 次同次であり、

$$Y(t) + \int_0^t b(s, X(s), Y(s))ds + U(t) = M(t), \qquad Y(T_K) = 0,$$

という BSDE の $Y(0)$ を計算せよというのが問題となる。ただし、

$$U(t)$$

$$= \sum_{T_k > t} \gamma(t, X(t))^{-1} \beta(t, X(t)) E[\beta(T_k, X(T_k))^{-1} g_k(X(T_k, x_0)) | \mathcal{F}_t]$$

$$+ \sum_{T_k \leqq t} \gamma(T_k, X(T_k))^{-1} g_k(X(T_k, x_0))$$

である。

BSDE の数値計算についても盛んに研究が行われているが、まだ実用できるものはないようである。上記の BSDE も次元が高いため、実務で使える方法は見つかっておらず、第 1 次近似を計算することがほとんどである。この場合は

$$E[\int_0^T b(s, X(s), U(s))ds]$$

を計算せよといった問題となる。これについても、様々な研究がある（例えば、森本 [29]）。

## 2 常微分方程式の数値計算

確率微分方程式の数値計算を考える上で、まず常微分方程式の数値計算の手法を学ぶことは意味がある。確率微分方程式の数値計算と関係があると思われるルンゲ・クッタ法について述べる。

$V \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ として常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t,x) = V(x(t,x)),$$

$$x(0,x) = x, \qquad t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^N$$

を考える。ここで、$T_0 > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^N$ として $x(T_0, x_0)$ を数値計算で求める事を考える。最も単純な方法は Euler 近似である。今、$h > 0$ として

$$y(0;h) = x_0$$

$$y(n+1;h) = y(n;h) + hV(y(n;h)), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

で帰納的に $y(n;h) \in \mathbf{R}^N$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ を定義する。

$$|x(h,x) - (x + hV(x))| = |\int_0^h V(x(t,x))dt - hV(x)|$$

$$= |\int_0^h (h-t)\frac{d}{dt}V(x(t,x))dt| \leqq \frac{h^2}{2}||\nabla V(\cdot)V(\cdot)||_\infty$$

であることを用いると、$C \in (0, \infty)$ が存在して

$$|y(n; \frac{T_0}{n}) - x(T_0, x_0)| \leqq \frac{C}{n}, \qquad n \geqq 1$$

が成り立つことが容易にわかる。したがって収束のオーダーは $1/n$ であることがわかる。

オイラー法より速い方法としてテイラー展開法がある。$f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ に対して

$$\frac{d}{dt}f(x(t,x)) = (Vf)(x(t,x))$$

であるので、$m \geqq 1$ に対して

$$f(x(t,x)) = f(x) + \int_0^t Vf(x(r,x))dr$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^m \frac{t^k}{k!}(V^k f)(x) + \int_0^t \frac{(t-r)^m}{m!}(V^{m+1}f)(x(r,x))dr$$

となることがわかる。ここで、$V$ はベクトル場、1 階の微分作用素と同一視している。
$H(x)=x$ とおき

$$y_{(m)}(0;h)=x_0$$

$$y_{(m)}(n+1;h)=y_{(m)}(n;h)+\sum_{k=1}^{m}\frac{t^k}{k!}(V^kH)(y_{(m)}(n;h)), \qquad n=0,1,\ldots$$

で $y_{(m)}(n,h)$, $n=0,1,2,\ldots,$ を定義すると

$$|y_{(m)}(n;\frac{T_0}{n})-x(T_0,x_0)|=O(\frac{1}{n^m}), \qquad n\to\infty$$

が簡単に示せる。$y_{(1)}(n;h)$ は Euler 近似であり、$m\geqq 2$ の時は Euler 近似より精度の良い近似となる。

しかし、この計算を計算機で実行しようとすると関数 $V(x)$ だけでなく関数 $(V^kH)(x)$, $k=2,\ldots,m,$ を関数プログラムとして用意する必要がある。今日では数式処理プログラムがあるのでそれほど面倒ではないかも知れないがかつては大変面倒なことであった。

この計算をさける目的のために考えられたのがルンゲ・クッタ法である。

$$(VH)(x)=V(x),$$

$$(V^2H)(x)=\nabla V(x)(V(x))$$

$$(V^3H)(x)=\nabla^2V(x)(V(x),V(x))+\nabla V(x)(\nabla V(x)(V(x)))$$

等々であるので、。$(V^kH)(x)$ はすべて $\nabla^kV(x)$, $k=0,1,2\ldots,$ を結合したものの 1 次結合である。これらをグラフで表示する（図　）。

いま、 $(h,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N)$ の滑らかな関数の空間 $C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$ の部分ベクトル空間 $\mathcal{W}_n$, $n\geqq 0$, を以下のように定義する。

$$\mathcal{W}_0=\{0\},$$

$$\mathcal{W}_{n+1}=\text{linear .hull of}\{hV(x+W(h,x));\ W\in\mathcal{W}_n\}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$m\geqq 1$ に対して $C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$ 上の同値関係 $\sim_m$ を以下のように定める。
$H_1\sim_m H_2$ となるのは

$$\frac{\partial^k(H_1-H_2)}{\partial h^k}(0,x)=0, \qquad x\in\mathbf{R}^N,\ k=0,1,\ldots,m$$

となる時。

この時、$W\in\mathcal{W}_n$ に対して、

$$hV(x+W(h,x))$$

$$\sim_m hV(x)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}h\nabla^kV(x)(\sum_{\ell=0}^{m}\frac{h^\ell}{\ell!}\frac{\partial^\ell W}{\partial h^\ell}(0,x),\ldots,\sum_{\ell=0}^{m}\frac{h^\ell}{\ell!}\frac{\partial^\ell W}{\partial h^\ell}(0,x))$$

となるので帰納的に、$W\in\mathcal{W}_n$ の同値類はグラフの一次結合で表される。

もし、$m\geqq 2$ に対して、$W\in\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{W}_n$ で

$$W(h,x)\sim_m\sum_{k=1}^{m}\frac{h^k}{k!}(V^kH)(x) \tag{2}$$

となるものがあれば

$$y(0;h) = x_0,$$

$$y(n+1;h) = y(n;h) + W(hy(n;h)), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

とおくと

$$|y(n;\frac{T_0}{n}) - x(T_0,x_0)| = O(\frac{1}{n^m}), \qquad n \to \infty$$

となる事が簡単にわかる。関数 $W(h,x)$ は 関数 $V$ への代入及び四則演算を繰り返すことで求まるので、関数プログラムとしては $V$ のみがあればよいので、単純である。このような数値計算法を $m$-次のルンゲ・クッタ法と呼ぶ。

4-次のルンゲ・クッタ法の例を与えておく

$$W_1(h,x) = hV(x), \qquad W_2(h,x) = hV(x + W_1(h,x),$$

$$W_3(h,x) = hV(x + W_2(h,x),$$

とし、

$$W(h,x) = \frac{1}{6}(W_1(h,x) + 2W_2(h,x) + 2W_3(h,x) + hV(x + W_3(h,x))$$

とおくと、$W(h,x)$ が 4-次のルンゲ・クッタ法を与える。

ここでの説明は数学的枠組みを述べただけで、一般に $m$-次のルンゲ・クッタ法を与える $W(h,x)$ で計算手順の少ないものを見つけることは容易ではない。$W$ を与える手順を 1 つ決めて、その手順を与える一時結合の際の係数を未知数とすると、式 (2) から極めて複雑な代数方程式系が導かれる。その方程式の解を計算機で見つけるということが一般的な方法のようである（詳しくは Butcher [8] 参照されたい)。

# 3 Lie 環と Malliavin 解析からの結果

## 3.1 非可環多元環と自由リー環

ファイナンスではアイデアが先行して、実際にどのような条件が必要かということは考慮されないことが多い。これは、うまくいけばよいという工学的考え方がなされるからである。実際、数値計算の世界では、数学的に必ずうまくいくといったことが証明されていなくても、やってみたらうまくいきましたという論文がかなり多いようである。

しかし、本当にその方法が正しいのか、どのような限界があるのかといった数学的議論を積み重ねれば、どう改良すればよいかといったこともわかってくるので、数学的に厳密に数値計算法を解析することは重要である。

そのためには数学的設定をはっきりさせる必要がある。そのために、代数的な道具を与える。この講演の代数的な部分のの参考文献としては Reutenauer [37] または Jacoboson [16] を参照されたい。

$v_0, v_1, \cdots, v_d$ を alphabet とする。$A = A_d = \{v_0, v_1, \cdots, v_d\}$ とおく。$k \geqq 1$ に対して $k$ 個 alphabet を並べたもの $v_{i_1} \cdots, v_{i_k}$ を word と呼ぶ。空語を 1 で表し 1 を含む word 全体を集めた集合を $A^*$ とおく.

$u, w \in A^*$ に対して $uw$ は $v$ と $w$ の alphabet をこの順に並べた word とする。特に $1v = v = v1$ となる。

word $w$ に対して、$|w|$ を word の長さとする。$|1| = 0$, $|v_{i_1} \cdots v_{i_k}| = k$ となる。

$w \in A^*$ に対して

$$||w|| = |w| + (w \text{ の含む } v_0 \text{ の個数})$$

とおく。例えば、$||1|| = 0$, $||v_1|| = 1$, $||v_0|| = 2$ となる。また、$||uw|| = ||u|| + ||w||$ が成り立つ。

$\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ を

$$\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle = \{\sum_{w\in A^*} a_w w; a_w \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^{A^*}$$

で定める。

$\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ は自然に $\mathbf{R}$ を基礎体とする単位元を持つ非可換多元環となる。

実際、演算 $\xi = \sum_{w\in A^*} a_w w$, $\eta = \sum_{w\in A^*} b_w w \in \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ とすると、$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して

$$\alpha\xi + \beta\eta := \sum_{w\in A^*} (\alpha a_w + \beta b_w) w$$

$$\xi\eta = \sum_{w\in A^*} (\sum_{u,\tilde{u}\in A^*; u\tilde{u}=w} a_u b_{\tilde{u}}) w$$

(内側の和は有限和なので well defined である) で演算が定義される。

また、1 と $\sum a_w w$ (ただし、$a_1 = 1$, その他の w に対し $a_w = 0$ である) とを同一視することで $1 \in \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ となり、単位元となる。同様に $A^* \subset \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ と見なせる。また、$\xi = \sum_{w\in A^*} a_w w$ および $u \in A^*$ に対して $\langle\xi, u\rangle = a_u$ と定義する。

$\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ は $\mathbf{R}^{A^*}$ と同一視できるので $\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ の位相として直積位相を考える。すなわち，$\xi_n \to \xi$ とは、すべての $w \in A^*$ に対して $\langle\xi_n, w\rangle \to \langle\xi, w\rangle$ となることである。この位相は通常、代数学で与えられる位相とは異なることに注意しておく。

$m \geq 0$ に対して

$$A^*_m = \{u \in A^*;\ \| u \| = m\},$$

$$A^*_{\leqq m} = \{u \in A^*;\ ||u|| \leqq m\},$$

とおき、

$$\mathbf{R}\langle A\rangle_{\leqq m} = \sum_{u\in A^*_{\leqq m}} \mathbf{R}u,$$

$$\{\sum_{w\in A^*} a_w w \in \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle;\ \ ||w|| \geqq m+1 \text{ の時 } a_w = 0\}$$

とおく。また、$j_m : \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle \to \mathbf{R}\langle A\rangle_m$ $j_{\leqq m} : \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle \to \mathbf{R}\langle A\rangle_{\leqq m}$ を

$$j_m(\xi) = \sum_{w\in A^*_m} \langle\xi, w\rangle w,$$

$$j_{\leqq m} = \sum_{k=0}^{m} j_k$$

により定義する。

また、$\mathbf{R}\langle A\rangle$ を

$$\mathbf{R}\langle A\rangle = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbf{R}\langle A\rangle_{\leqq m},$$

と定義すると、$\mathbf{R}\langle A\rangle$ も多元環となる。

$\xi, \eta \in \mathbf{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ に対して $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$ とおく。$r:\ A^* \to \mathbf{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ を帰納的に

$$r(1) = 0, \qquad r(v_i) = v_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, d,$$

および

$$r(v_i u) = [v_i, r(u)], \qquad i = 0, 1, \ldots, d,\ u \in A^*$$

で定義する。$m \geq 0$ に対して $\mathcal{L}(A)_m$ を $\{r(u);\ u \in A^*_m\}$ の張る部分ベクトル空間とする。$\mathcal{L}(A)_{\leqq m}$ を $\{r(u);\ u \in A^*_{\leqq m}\}$ の張る部分ベクトル空間とする。また、$\mathcal{L}((A))$ を

$$\mathcal{L}((A)) = \{w \in \mathbf{R}\langle\langle A \rangle\rangle;\ j_m(w) \in \mathcal{L}(A)_m,\ m \geq 0\}$$

と定義する。

### 3.2 拡散半群の諸性質

さて、 $V_0, V_1, \ldots, V_d \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ とし、この講演では以下の確率微分方程式

$$X(t, x) = x + \sum_{k=0}^d \int_0^d V_k(X(s, x)) \circ dB^k(s), \qquad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}^N$$

を考えるわけであるが、このために以下のようなものを用意する。

$\mathcal{DO}(\mathbf{R}^N)$ は $\mathbf{R}^N$ 上のなめらかな係数を持つ微分作用その全体とする。$\mathcal{DO}(\mathbf{R}^N)$ は $\mathbf{R}$ を基礎体とする非可換多元環となる。$V_0, V_1, \ldots, V_d$ は $\mathcal{DO}(\mathbf{R}^N)$ の元である。

準同型写像 $\Phi : \mathbf{R}\langle A \rangle \to \mathcal{DO}(\mathbf{R}^N)$ を

$$\Phi(1) = Identity, \qquad \Phi(v_{k_1} \cdots v_{k_n}) = V_{k_1} \cdots V_{k_n}, \qquad n \geq 1,\ k_1, \ldots, k_n = 0, 1, \ldots, d.$$

で定義する。この時、

$$\Phi(r(v_k u)) = [V_k, \Phi(r(u))], \qquad i = 0, 1, \ldots, d,\ u \in A^* \setminus \{1\}.$$

となる。よって $\Phi(r(u)),\, u \in A^*\}$, はベクトル場となるので、$\Phi(\xi),\, \xi \in \mathcal{L}(A)_{\leqq m},\, m \geqq 1$, もベクトル場となる。

$A^{**} = A^* \setminus \{1, v_0\}$ とおき、さらに $A^{**}_{\leqq m} = \{u \in A^{**};\ \| u \| \leqq m\},\, m \geq 1$ とおく。

Malliavin 解析を用いることで様々なことが証明できる。

以下では、この講演に関係した結果を述べておく。

**定理 3.1** (K.-Stroock [25]) $x_0 \in \mathbf{R}^N$ とする。$\ell_0 \geqq 1$, 及び $c > 0$ が存在し、

$$\sum_{u \in A^{**}_{\leqq \ell_0}} (\Phi(r(u))(x_0), \xi)^2_{\mathbf{R}^N} \geqq c|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbf{R}^N$$

が成り立つならば、$X(t, x_0),\, t > 0$, の分布は絶対連続であり、滑らかな密度関数を持つ。

ベクトル場の族 $\{V_0, V_1, \ldots, V_d\}$ に対する次のような条件 (UFG) を考える。
(UFG) $\ell_0 \geq 1$ および $\varphi_{u,u'} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N),\, u \in A^{**}_{\leqq \ell_0+2},\, u' \in A^{**}_{\leqq \ell_0}$, が存在して以下が成立する。

$$\Phi(r(u)) = \sum_{u' \in A^{**}_{\leqq \ell_0}} \varphi_{u,u'} \Phi(r(u')), \qquad u \in A^{**}_{\leqq \ell_0+2}.$$

**命題 3.2** $\{V_i; i=0,1,\ldots,d\}$ が一様 *Hörmander* 条件を満たすとする。すなわち、 $\ell_0 \geqq 1$, 及び $c>0$ が存在し、

$$\sum_{u \in A^{**}_{\leqq \ell_0}} (\Phi(r(u))(x), \xi)^2_{\mathbf{R}^N} \geqq c|\xi|^2, \qquad x, \xi \in \mathbf{R}^N$$

が成り立つとする。この時、(UFG) が満たされる。

**定理 3.3** ([20]) （UFG) 条件が成立すると仮定する。この時、$u_1, \ldots, u_{n+m} \in A^{**}$, $n, m \geq 1$, に対して、定数 $C>$ が存在して

$$||\Phi(r(u_1))\cdots\Phi(r(u_n)))P_t\Phi(r(u_{n+1}))\cdots\Phi(r(u_{n+m})))f||_\infty$$

$$\leqq \frac{C}{t^{(||u_1||+\cdots+||u_n+m||)/2}} \parallel f \parallel_\infty \qquad t \in (0,1],\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$$

が成立する。

今、$A = (A^{ij})_{i,j=1,\ldots,N} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N \otimes \mathbf{R}^N)$ を

$$A^{ij}(x) = \sum_{u \in A^{**}_{\leqq \ell_0}} \Phi(r(u))^i(x)\Phi(r(u))^j(x) \qquad i, j = 1, \ldots, N.$$

で定め、$h(x) = \det A(x)$, $x \in \mathbf{R}^N$, $E = \{x \in \mathbf{R}^N;\ h(x) > 0\}$ と定めると以下のことが成立する。

**命題 3.4** ([23]) （UFG) 条件が成立すると仮定する。この時、以下が成立する。
(1) $x \in E$ であれば $P(X(t,x) \in E) = 1$, $t>0$, であり、$X(t,x)$ の分布は絶対連続で滑らかな密度関数 $p(t,x,y)$ を持つ。
(2) 任意の $T>0$ に対して $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$p(t,x,y) \leqq Ct^{-(N+1)\ell_0/2}h(x)^{-2(N+1)\ell_0}\exp(-\frac{2\delta_0}{t}|y-x|^2), \qquad t \in (0,T],\ x, y \in E,$$

$$p(t,x,y) \leqq Ct^{-(N+1)\ell_0/2}h(y)^{-2(N+1)\ell_0}\exp(-\frac{2\delta_0}{t}|y-x|^2), \qquad t \in (0,T],\ x, y \in E,$$

(2) 任意の $T>0$, $p \in (1,\infty)$ に対して $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$\int_E p(t,x,y)h(y)^{-p}dy \leqq Ch(x)^{-p}, \qquad x \in E,\ t \in (0,T].$$

# 4 オイラー・丸山近似

オイラー・丸山近似では伊藤型の確率微分方程式を考える。$b \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ を

$$b^i(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^N V_k^j(x)\frac{\partial V_k^i}{\partial x^j}(x), \qquad i = 1, \ldots, N,\ x \in \mathbf{R}^N$$

で定義すると確率微分方程式 1 の解 $X(t,x)$ は

$$X(t,x) = x + \sum_{k=1}^d \int_0^t V_k(X(s,x))dB^k(s) + \int_0^t b(X(s,x))ds$$

を満たす。
$h>0$ に対して $X_h:[0,\infty)\times\mathbf{R}^N\times\Omega\to\mathbf{R}^N$ を以下で帰納的に定義する。

$$X_h(0,x)=x, \qquad x\in\mathbf{R}^N,$$

$$\begin{aligned}&X_h(t,x)\\ &=X_h((n-1)h,x)+\sum_{k=1}^d V_k(X_h((n-1)h,x)(B^k(t)-B^k((n-1)h))\\ &\quad+b(X_h((n-1)h,x)(t-(n-1)h),\end{aligned}\tag{3}$$

$t\in((n-1)h,nh],\ n=1,2,\ldots,\ x\in\mathbf{R}^N.$
$X_h$ はオイラー・丸山近似と呼ばれる。丸山は以下のことを示した。

**定理 4.1** 任意の $p\in[2,\infty)$ 及び $T>0$ に対してある $C>0$ が存在して

$$E[\sup_{t\in[0,T]}|X(t,x)-X_h(t,x)|^p]^{1/p}\leqq Ch^{1/2}, \qquad h\in(0,1],\ x\in\mathbf{R}^N$$

が成立する。

丸山はこの結果を用いて、今日では Cameron-Martin-Maruyama-Girsanov の公式という呼ばれる式を拡散過程の場合に証明した。
上記の定理より以下の結果が導かれる。

**系 4.2** $f:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$ はリプシッツ連続な関数とする。この時、任意の $T>0$ に対して $C\in(0,\infty)$ が存在して

$$|E[f(X(T,x))]-E[f(X_{T/n}(T,x))]|\leqq C(\frac{1}{n})^{1/2} \qquad t\in[0,T],\ x\in\mathbf{R}^N$$

が成立する。

さて、$T>0,\,x_0\in\mathbf{R}^N$ を固定した時、

$$\begin{aligned}&X_{T/n}(mT/n,x)\\ &=X_{T/n}((m-1)T/n,x)+\sum_{k=1}^d V_k(X_{T/n}((m-1)T/n,x)(B^k(mT/nt)-B^k((m-1)T/n))\\ &\quad+b(X_{T/n}((k-1)T/n,x)T/n,\end{aligned}$$

$m=1,2,\ldots,n$ であるので $XT/n(T,x)$ は $Z_m^k=B^k(mT/nt)-B^k((m-1)T/n)$, $k=1,\ldots,d$, $m=1,\ldots,d$ の関数である。$Z_m^k$, $k=1,\ldots,d$, $m=1,\ldots,n$ は独立な $nd$ 個の確率変数でその分布は平均ゼロ分散 $T/n$ の正規分布であるので $E[f(X_{T/n}(T,x))]$ は $nd$ 次元のガウス積分として表現される。この関数は $Z_m^k$ の極めて複雑な形をした関数であるので、積分を解析的に計算することは困難であるが、次節で述べるように（準）モンテカルロ法により $E[f(X_{T/n}(T,x))]$ が近似的に求めることができる。
その場合、積分の次元 $nd$ の大きさが問題となる。これが小さい方が望ましいのであるが、$n$ は元々の近似の精度と関連するので、近似の精度がどのくらいであるかが問題となる。これについて以下のようなことが知られている。

**命題 4.3** $T > 0$ とする。この時、 $C \in (0, \infty)$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |E[f(X(T,x))] - E[X_{T/n}(T,x))]| \leqq \frac{C}{n} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}, 1 \leqq |\alpha| \leqq 4} || \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} ||_\infty \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

が成立する。

この命題から $f$ が $C^4$-級であれば近似の精度が上がることがわかるが、ファイナンスで現れる $f$ はリプシッツ連続もしくは不連続関数であることが多いのでこの結果はあまりうれしい結果ではない。実は次のようなことが示されている。

**定理 4.4** ベクトル場 $\{V_0, V_1, \ldots, V_N\}$ が (UH) を満たすならば、任意の $T > 0$ に対して $C \in (0, \infty)$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |E[f(X(T,x))] - E[X_{T/n}(T,x))]| \leqq \frac{C}{n} ||f||_\infty \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

が成立する。

この結果により、(UH) が満たされる場合は $f$ が有界可測関数である時、近似誤差は $O(1/n)$ であることがわかる。時間があれば公演中に、この定理の証明の概略を述べる予定である。

(UH) 条件がない場合に、精度が何故落ちるのか、次の例でわかる。

**(例)** 今、$N = 2,\ d = 1,$ とし $V_0 = 0,\ V_1$ は

$$V_1(x) = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} = (-x^2, x^1)$$

で与える。$V_1$ は $C_b^\infty(\mathbf{R}^2)$ には属さないが、計算が簡単になるので、この例で考えていく。この時、

$$b(x) = -\frac{1}{2}(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}x$$

となる。$x \cdot V_1(x) = 0$ であるので、伊藤の公式より

$$|X(t,x)|^2 = |x|^2, \qquad t > 0,\ x \in \mathbf{R}^2$$

となることがわかる。一方、

$$|X_h(h,x)|^2 = |(1 - \frac{h}{2})x + V_1(x)B(h)|^2 = |x|^2(1 + (B(h)^2 - h) + \frac{h^2}{4})$$

となることがわかる。よって、

$$|X_{1/n}(1,x)|^2 = |x|^2 \prod_{k=1}^n (1 + ((B(kh) - B((k-1)h))^2 - h) + \frac{h^2}{4})$$

$$\sim |x|^2 \exp(\sum_{k=1}^n (((B(kh) - B((k-1)h))^2 - h) - \frac{1}{2}((B(kh) - B((k-1)h))^2 - h)^2 + \frac{h^2}{4})$$

$(B(kh) - B((k-1)h))^2 - h,\ k = 1, \ldots, n,$ は独立同分布で分散が $2h^2$ であるので、$Z$ は標準正規分布を持つ確率変数とすると中心極限定理により $|X_h(h,x)|^2$ の分布は

$$|x|^2 \exp(\sqrt{\frac{2}{n}} Z + O(\frac{1}{n})) \sim |x|^2(1 + \sqrt{\frac{2}{n}} Z + O(\frac{1}{n}))$$

となる。今、$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ とし、 $f(x)=g(|x|^2)$, $x\in\mathbf{R}^2$, ととると $E[f(1,x))]=g(|x|^2)$ であり、

$$E[f(X_{1/n}(1,x)]\sim E[g(|x|^2(1+\sqrt{\frac{2}{n}}Z+O(\frac{1}{n})]$$

である。$g\in C_b^2$ であれば、

$$E[g(|x|^2(1+\sqrt{\frac{2}{n}}Z+O(\frac{1}{n})]=g(|x|^2)+E[g'(|x|^2)(\sqrt{\frac{2}{n}}Z+O(\frac{1}{n})]+||g'||O(\frac{1}{n})$$

となり、精度が $O(1/n)$ となる。しかし、$g(r)=(r-1)\vee 0$ であれば、$|x|=1$ の時には

$$E[(\sqrt{\frac{2}{n}}Z+O(\frac{1}{n})\vee 0]$$

は $(1/n)^{1/2}$ のオーダーが残る。

$|X(t,x)|=|x|$ であるので、上の例を少し修正すれば、$V_1\in C_b^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ で同様な例が作れる。

このように、$f$ の滑らかさは近似の精度に影響を与えるのである。

最後に Gauss 積分は容易に $[0,1]^n$ 上の積分の問題に変換できることを注意しておく。実際、$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を有界可測関数とすると

$$\int_{\mathbf{R}^2}f(x)\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{|x|^2}{2})dx=\int_0^1 d\theta\int_0^\infty rdrf(r(\cos(2\pi\theta),\sin(2\pi\theta))\exp(-\frac{r^2}{2})$$

$$=\int_0^1 d\theta\int_0^1 dzf(\log((2\log(1/z))^{1/2}(\cos(2\pi\theta),\sin(2\pi\theta)))$$

( $r=(2\log(1/z))^{1/2}$, $z=\exp(-\frac{r^2}{2})$ とおいた) であるので、$(z,\theta)\in(0,1)^2\to\log((2\log(1/z))^{1/2}(\cos(2\pi\theta),\sin(2\pi\theta))\in\mathbf{R}^2$ により、2 次元の一様分布が 2 次元の標準正規分布に移る。この変換は Box-Muller 法と呼ばれ、返還式が初等関数で書かれているので、高速に計算できる（数学的に変換できるというだけでは数値計算においては意味がないことに注意してほしい)。

# 5 積分の数値計算

既に述べたように、確率解析的な数値計算手法はモンテカルロ法を用いることが一般である。これは独立同分布な一様乱数を発生させて何度もシミュレーションを行い大数の法則に基づき数値計算を行うという手法である。真の乱数を発生させることは時間がかかるのでコンピュータで疑似乱数を発生させ、それを乱数と見なしてシミュレーションすることが多い。しかし、積分を数値計算することが目的である場合は乱数ではないものを発生させて計算する方法も考案されている。これについて少し説明する。

いま、 $N\geqq 1$, $f:[0,1]^N\to\mathbf{R}$ は（連続）関数であるとし、

$$I(f)=\int_{[0,1]^N}f(x)dx$$

を計算することを考える。$N\geqq 10$ である時、この値を解析的に近似して求めることは一般に困難であることが多い。実際、求積法のように

$$\sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^n\frac{1}{n^N}f(\frac{i_1}{n},\cdots,\frac{i_N}{n})$$

で近似するには $n^N$ 回の計算回数が必要で、$N$ が大きくなれば、大変な時間がかかることになる。実際、 $n=2$, $N=1000$, の場合でも $10^{100}$ 以上となり、1 秒に $10^{50}$ 回計算できても、$10^{50}$ 秒 $> 10^{40}$ 年以上かかることになる。このため、計算にはモンテカルロ法が用いられることが多い。これは、$X_n$, $n=1,2,\ldots,$ が $[0,1]$ 上の独立確率変数列でその分布が一様分である場合、

$$J_{1,M} = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} f(X_{mN+1}, X_{mN+2}, \ldots, X_{mN+N}) \to I(f),\ M\to\infty\ a.s.$$

であることを用いて　$J_{1,M}$ を $(f)$ の近似値とする方法である。この場合、近似誤差 $J_{1,M}-I(f)$ は中心極限定理により、$M^{-1/2}$ 程度はある。このため、誤差をたとえば $10^{-5}$ までおさえたいならば、$M$ は $10^{10}$ にする必要があり、発生すべき乱数の個数 $NM$ はかなり大きくなる。ここからはコンピュータの性能の問題となってくるのだが、もし、これが大きすぎ、時間がかかりすぎるとなれば、別の手法が必要となる。

次元 $N$ の準乱数列というのは単に $[0,1]^N$ に値をとる数列 $\{y_n\}_{n\geqq 1}$ にすぎない。この数列 $\{y_n\}_{n\geqq 1}$ を用いて積分 $I(f)$ を

$$J_M(f) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f(y_m)$$

で近似するというのがアイデアである。この時、誤差 $|I(f)-J_{2,M}|$ が $M\to\infty$ の時、どのような速度で減少するかが問題となる。

今、$E$ は $[0,1]^N$ 上の有界可測関数全体の集合の部分集合で、$E$ はバナッハ空間の構造を持つとする。$\gamma>0$ とし、もし任意の $f\in E$ に対して、$C_f\in(0,\infty)$ が存在して

$$|I(f)-J_M(f)| \leqq C_f M^{-\gamma}, \qquad M=1,2,\ldots,$$

が成り立つならば $\sup_M |M^{\gamma}(I(f)-J_M(f))|<\infty$, $f\in E$, となるので共鳴定理より

$$\sup\{M^{\gamma}|I(f)-J_M(f)|;\ f\in E, ||f||_E\leqq 1,\ M\geqq 1\}<\infty \tag{4}$$

となることがわかる。このことから、バナッハ空間 $E$ に応じて、式 (4) を満たす $\gamma>0$ の上限が決まる。

簡単に証明できることであるが、例えば、$E$ として $[0,1]^N$ 上リプシッツ連続な関数全体をとると、どのような数列 $\{y_n\}_{n\geqq 1}$ をとっても $\gamma\leqq 1/N$ となることがわかる。これは次元 $N$ に依存し「次元の呪い」から脱することができない（モンテカルロ法は確率の小さいものを無視し、その例外集合は被積分関数 $f$ に依存するので、誤差 $M^{-1/2}$ というのは上の意味の厳密さは持っていない事に注意してほしい)。

一方、例えば、$C^N([0,1]^N)$ 上のノルムとして

$$||f|| = \sum_{n=0}^{N}\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_n\leqq N}\int_{[0,1]^N} |\frac{\partial^n f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_n}}(x)|dx$$

を取り、$E$ をその完備化の空間とすると、

$$\sup\{M(\log(M+1))^{-N}|I(f)-J_M(f)|;\ f\in E, ||f||_E\leqq 1,\ M\geqq 1\}<\infty$$

となるものが存在する。（例えば $a_1,\ldots,a_N\in(0,1)$ に対して $[0,a_1)\times\cdots\times[0,a_N)$ の定義関数は $E$ に属するので、$E$ は不連続な関数も含んでいる。）このとき $\gamma$ の上限は 1 となる。そのような

列を low-discrepancy 列と呼ぶ。low-discrepancy 列で最もわかりやすいものは Halton 列である。これについて述べておく。

素数 $p \geqq 2$ を定める。$n \geqq 1$ に対して、$a_m = 0, 1, \dots, p-1$, $n = 1, 2, \dots,$ で

$$n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m p^{m-1}$$

となるものが唯一つ存在する。このとき、

$$\varphi_p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m p^{-m}$$

とおくことにより $\varphi_p : \mathbf{Z}_{\geqq 1} \to (0,1)$ が定義される。

$N \geqq 1$ に対して $p_1, \dots, p_N$ は異なる素数とすると

$$y_n = (\varphi_{p_1}(n), \dots, \varphi_{p_N}(n)), \qquad n = 1, 2, \dots$$

は low-discrepancy 列となる。

Halton 列は実用上あまり役には立たない。しかし、現在使われている low-discrepancy 列は Sobol 列などほとんどが代数的手法で構成されるものである。([18] 参照)

$E$ として解析的な関数よりなる空間をとると、$\gamma$ はいくらでも大きくなる、あるいは誤差を $e^{-M}$ で押さえられるものが存在することが知られている([31],[32])。

# 6 バミューダデリバティブの価格の数値計算

$\tilde{T} > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^N$ とする。$K \geqq 2$, $0 < T_1 < \cdots < T_K = \tilde{T}$ が与えられているものとする。また、可測関数 $g : [0,T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ が与えられているとする。ここで、バミューダデリバティブの価格

$$c_B = \sup\{E[g(\tau, X(\tau, x_0))];\ \tau \in \mathcal{T}_0^{\tilde{T}},\ \tau \in \{T_1, \dots, T_K\} a.s.\}$$

を求める問題を考える。

$$\bar{v}_k(x) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau, x))];\ \tau \text{ は停止時刻で } \tau \in \{T_{k+1}-T_k, \dots, T_K-T_k\} a.s.\} \qquad k = 1, 2, \dots, K$$

とおくと

$$\bar{v}_K = g(T_K, \cdot)$$

$$\bar{v}_{k-1} = P_{T_k - T_{k-1}}(g(T_k, \cdot) \vee \bar{v}_k), \qquad k = K, K-1, \dots, 1$$

が成り立ち、 $c_B = \bar{v}_0(x_0)$ となる。

数学的条件を簡単にするため、ここでは、出発点 $x_0 \in \mathbf{R}$ に対して以下の条件を仮定する。

(条件 H) $\ell_0 \geqq 1$, 及び $c > 0$ が存在し、

$$\sum_{u \in A^{**}_{\leq \ell_0}} (\Phi(r(u))(x_0), \xi)^2_{\mathbf{R}^N} \geqq c|\xi|^2, \qquad x, \xi \in \mathbf{R}^N$$

が成り立つ。

この仮定の下では、任意の $t > 0$ に対して $\nu_t$ を $x(t, x_0)$ の分布とすると、$\nu_t$ は滑らかな密度関数を持つことが Malliavin 解析によりわかる。

### 6.1 LS 法

以下では、$c_B$ を求める数値解析手法で今日 LS 法 ( Longstaff-Schwarz による近似法) と呼ばれるものをまず紹介する。ステップをいくつかに分けて説明する。
(Step 1) $k = 1, 2, \ldots, K-1$, に対して $L^2(d\nu_{T_k})$ の有限次元部分ベクトル空間 $\mathcal{V}_k$ をまず決める。
(Step 2) さらに $M \geqq 1$ を定め、疑似乱数によるシミュレーションにより、独立な $M$ 個の $\mathbf{R}^{NK}$-値確率変数 $\{X_m(T_k)\}_{k=1,\ldots,K}$, $m = 1, 2, \ldots, M$, の標本で、その分布が $\{x(T_k, x_0)\}_{k=1,\ldots,K}$ と一致するようなものを発生させる。
(Step 3) $b_{k,m} \in \mathbf{R}$, $m = 1, \ldots, M$, $k = K, K-1, \ldots, 1$, 及び $\mathbf{R}^N$ 上の関数 $v_k \in \mathcal{V}_k$, $k = K-1, \ldots, 1$, を以下のように帰納的に定めていく。

$b_{K,m} = g(T_K, X_m(T_K))$, $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$v_{k-1} = \text{arg.min}_{v \in \mathcal{V}_{k-1}} \{ \sum_{m=1}^{M} |v(X_m(T_{k-1})) - b_{k,m}|^2 \}$$

$$b_{k-1,m} = 1_{[0,\infty)}(g(T_{k-1}, X_m(T_{k-1}) - v_{k-1}(X_m(T_{k-1})))(g(T_{k-1}, X_m(T_{k-1}) - b_{k,m}) + b_{k,m},$$

$m = 1, \ldots, M$, $k = K, K-1, \ldots, 2$.

最後に

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} b_{1,m}$$

を $c_B$ の近似値とする。これが LS 法（Longstaff-Schwarz による近似法）である。

何をやっているかわかりにくいかも知れないが、$v_k$ は $\bar{v}_k$ の近似関数と考えられる。そして、$b_{k,m}$ は $g(T_\ell, , x) \geqq v_\ell(x)$ の領域に $X(T_\ell, x_0)$, $\ell = k+1, \ldots, K$, に入ったら止めるという戦略の見本路が $X_m$ の時の実現値である。

### 6.2 従来型の最小二乗回帰法

LS 法も最小二乗回帰法の範疇にはいるが、そのアイデアが現れる前の方法として以下の方法がある。

(Step 1),(Step 2) までは同じ。
(iii) $v_K = g(T_K, \cdot)$, $V_0 = \mathbf{R}$ とし、$v_k \in \mathcal{V}_k$, $k = K-1, \ldots, 1, 0$, を以下のように帰納的に定めていく。

$$v_{k-1} = \text{arg.min}_{v \in \mathcal{V}_{k-1}} \{ \sum_{m=1}^{M} |v(X_m(T_{k-1})) - (g(T_k, X_m(T_k)) \vee v_k(X_m(T_k))|^2 \}$$

$k = K, K-1, \ldots, 1$.

そして、$v_0$ を $c_B$ の近似解とする方法である。これが一般に最小二乗回帰法と呼ばれる近似法である。

実務では LS 法がよく用いられている。

何故このような方法がうまくいくかを説明する。

**LS 法の場合**

$M \to \infty$ とすると大数の法則により $v_{K-1}$ は

$$E[|v(X(T_{K-1}, x_0)) - g(T_K X(T_K, x_0))|^2]、\qquad \text{v} \in \mathcal{V}_{K-1}$$

を最小にするものとなる。

$$E[|v(X(T_{K-1},x_0)) - g(T_K, X(T_K,x_0))|^2]、$$

$$= E[|v(X(T_{K-1},x_0) - E[g(T_K X(T_K,x_0))|X(T_{K-1},x_0]|^2] + E[|E[g(T_K X(T_K,x_0))|X(T_{K-1,x_0}]|^2]$$
$$= \int_{\mathbf{R}^N} |v(x) - (P_{T_K - T_{K-1}} g(T_K,\cdot))(x)|^2 \nu_{T_{K-1}}(dx) + \int_{\mathbf{R}^N} |(P_{T_K - T_{K-1}} g(T_K,\cdot))(x)|^2 \nu_{T_{K-1}}(dx)$$

であるので、$P_{\mathcal{V}_k}$, $k = 1,2,\ldots,K$ を $L^2(d\nu_{T_K})$ の中の $\mathcal{V}_k$ への直交射影とすると、

$$v_{K-1} = P_{\mathcal{V}_{K-1}} P_{T_K - T_{K-1}} g(T_K,\cdot))$$

となる。同様な議論により $v_k \in \mathcal{V}_k$, $k = K-1, K-2, \ldots, 1,$ は $M \to \infty$ の時、非ランダムな関数となる。さらに $v_K = g(T_K,\cdot)$ とおき

$$\tau_k = \min\{T_\ell;\ \ell \geqq k,\ g(X(T_\ell, X(T_\ell,x_0) \geqq v_\ell(X(T_\ell,x_0)\}$$

とおくと、$v_{k-1} \in \mathcal{V}_{K-1}$ は

$$E[|v(X(T_{k-1},x_0) - g(\tau_k, X(\tau_k,x_0))|^2]、\qquad \mathrm{v} \in \mathcal{V}_{K-1}$$

を最小にするものとなる。これは

$$h_k(x) = E[g(\tau_k, X(\tau_k,x_0))|X(T_k,x_0) = x]$$

とおけば、

$$v_{k-1} = P_{\mathcal{V}_{k-1}} P_{T_k - T_{k-1}} h_k$$

となることがわかる。よって $M \to \infty$ の時、$c_B$ の近似値が $E[g(\tau_1, X(\tau_1,x_0))]$ に収束することになる。（正確な証明は Douglas-Ma-Protter [13] を参照)

従来型の最小二乗回帰法の場合

この場合も

$$\hat{v}_K = g(T_K,\cdot)$$

$$\hat{v}_{k-1} = P_{V_{k-1}} P_{T_k - T_{k-1}} (g(T_k,\cdot) \vee v_k(\cdot), \qquad k = K,\ldots,1$$

とおくと $v_k$ は $M \to \infty$ の時、 $\hat{v}_k$ に収束することが示される。

いずれの場合も、 $M \to \infty$ としただけでは真の値 $c_B$ には収束しない。$\mathcal{V}_k \subset L^2(d\nu_{T_k})$ を固定する限り、それは不可能である。このため、 $\mathcal{V}_k$ も $M$ に依存させて $V_k^{(M)}$ として考える必要がある。$\mathcal{V}_k^{(M)}$ としてどのようなものを取れば、真の値にどの程度のスピードで収束するかという研究が必要となるが、LS 法の場合は簡単ではなく、結果がないようである。従来型の最小二乗回帰法の場合は [24] で論じられている。

なお、バミューダデリバティブの数値計算法で実際の金融機関で用いられている方法はLS 法である。この場合、$\mathcal{V}_k$ をどのように取るかという問題があるが、実際にどう取っているかは企業秘密のようである。

# 7　バミューダデリバティブの価格の数値計算

## 7.1　stochastic mesh 法

stochastic mesh 法は Broadie-Glasserman [7] により考案された方法で、この方法では遷移確率密度関数 $p(t,x,y)$, $t>0$, $x,y\in E$, が計算可能であることを仮定して話が進められる。そのバミューダデリバティブの価格 $c_B$ の計算法を説明する。

まず、$m(E)$ は $E$ 上のボレル可測な関数の作る空間とする。

(Step 1) $M \geqq 1$ を定め、疑似乱数によるシミュレーションにより、独立な $M$ 個の $\mathbf{R}^{NK}$-値確率変数 $\{X_m(T_k)\}_{k=1,\dots,K}$, $m=1,2,\dots,M$, の標本で、その分布が $\{x(T_k,x_0)\}_{k=1,\dots,K}$ と一致するようなものを発生させる。

(Step 2) $m(E)$ 上の線形作用素 $Q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}$, $k=1,\dots,K$, を

$$(Q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}f)(x)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{p(T_k-T_{k-1},x,X_m(T_k))f(X_m(T_k))}{q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}(X_m(T_k))},\qquad x\in E,\ f\in m(E)$$

で定める。ただし、

$$q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}(y)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}p(T_k-T_{k-1},X_m(T_{k-1}),y),\qquad y\in E$$

である。

$\tilde{c}^{(M)}_{T_k,T_{k+1},\dots,T_K}$, $k=K,K-1,\dots,0$, を帰納的に以下で定義する。

$\tilde{c}^{(M)}_{T_K}(x)=g(T_K,x)$, $x\in E$,

$$\tilde{c}^{(L)}_{T_k,T_{k+1},\dots,T_K}(x)$$
$$=Q^{(M)}_{T_k,T_{k+1}}(g(T_{k+1},\cdot)\vee\tilde{c}^{(L)}_{T_{k+1},\dots,T_K}(\cdot))(x)\qquad x\in E,\ k=K-1,\dots,0$$

$\tilde{c}^{(M)}_{T_0,\dots,T_K}$ を $c_B$ の近似値とするのが、Stochastic Mesh 法の考え方である。

ここで、$\tilde{c}^{(M)}_{T_0,\dots,T_K}$ の計算には $p(T_k-T_{k-1},X_r(T_{k-1}),X_m(T_k))$, $g(X_m(T_k))$, $k=0,1,\dots,K$, $r,m=1,\dots,M$, の値のみが用いられていることに注意して頂きたい。

線形作用素 $Q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}$ は非負値関数を非負値関数に移すが、マルコフ作用素ではない。大雑把に言って、 $M\to\infty$ の時、大数の法則により、

$$q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}(y)\to\int_E p(T_k-T_{k-1},x,y)\nu_{T_{k-1}}(dx)$$

$$=p(T_k,x_0,y)=\frac{\nu_{T_k}(dy)}{dy}\qquad \mathrm{y}\in E$$

$$(Q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}f)(x)\to\int_E(\frac{p(T_k-T_{k-1},x,y)f(y)}{)}d\nu_{T_k}(dy)/dy\nu_{T_k}(dy)$$

$$=\int_E p(T_k-T_{k-1},x,y)f(y)dy=(P_{T_k-T_{k-1}}f)(x)$$

となるので $\tilde{c}^{(M)}_{T_0,\dots,T_K}\to c_B$ となることが期待される。

上記の説明は $p(t,x,y)$ に対する評価があれば数学的に正当化でき、また、LS 法とは違い、近似する関数空間をどう取るかという問題がないという利点がある。しかし、一般には推移確率密

度 $p(t,x,y)$ の形がわかっていないと使えないので適用できるモデルの範囲がかなり小さいという難点がある。

Stochastic Mesh 法をアメリカンデリバティブに適用する場合、例えば $K_M \geqq 1$ を大きく取り、$T_k^{(M)} = k\tilde{T}/K_M$, $k = 0,1,2,\ldots,K_M$, として、$\tilde{c}^{(M)}_{T_0^{(M)},\ldots,T_{K_M}^{(M)}}$ を近似値とすることが考えられるが、$K_M$ と $M$ がどのような関係を満たせばよいかが問題となる。すなわち、どのような条件の下で

$$\tilde{c}^{(M)}_{T_0^{(M)},\ldots,T_{K_M}^{(M)}} \to c_A,\ M \to \infty,\ a.s.$$

が成立するかである。実はこれは $p(t,x,y)$ の $t$ が小さい時の評価に依存し、ある意味で「次元の呪い」が現れる。([23] 参照)

Stochasting Meshing 法は特殊な状況では使える場合があるように思うが金融機関では使われていないようである。

### 7.2 Rogers の方法

最後に C.Rogers によるアイデアを説明する。$U : [0,\tilde{T}] \times \Omega \to \mathbf{R}$ を

$$U(t) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau x_0))|\mathcal{F}_t];\ \tau \in \mathcal{T}_t^{\tilde{T}},\ \tau \in \{T_1,\ldots,T_K\}\ a.s.\}$$

とおくと、 $U(t)$ は優マルチンゲールとなるので、マルチンゲール $M$ 及び 非減少過程 $A$ が存在して $A(0) = 0$,

$$U(t) = M(t) - A(t), \qquad t \in [0,\tilde{T}]$$

が成立する。定義より

$$g(T_k, X(T_k,x_0)) \leqq U(T_k) \leqq M(T_k), \qquad k = 1,2,\ldots,K$$

が成立する。よって、

$$c_B = U(0) = M(0) = M(0) + E[\max_{k=1,\ldots,K}\{g(T_k, X(T_k,x_0)) - M(T_k)\}]$$

が成立する。今、$N$ を任意のマルチンゲールとし、

$$\tilde{N}(t) = N(t) + E[\max_{k=1,\ldots,K}\{g(T_k, X(T_k,x_0)) - N(T_k)\}|\mathcal{F}_t] \qquad t \in [0,\infty)$$

とおくと

$$g(T_k, X(T_k,x_0)) \leqq \tilde{N}(T_k), \qquad k = 1,2,\ldots,K$$

であるので、$\tau \in \mathcal{T}_0^{\tilde{T}}$ が $\tau \in \{T_1,\ldots,T_K\}\ a.s.$ を満たせば

$$\tilde{N}(0) = E[\tilde{N}(\tau)] \geqq E[g(\tau, X(\tau,x_0))]$$

より $c_B \leqq \tilde{N}(0)$ であることがわかる。よって、以下の結果を得る。

**定理 7.1 (Rogers)**

$$c_B = \inf\{E[N(0) + \max_{k=1,\ldots,K}\{g(T_k, X(T_k,x_0)) - N(T_k)\}];\ \ N\ \text{はマルチンゲール}\ \}$$

$$c_A = \inf\{E[N(0) + \sup_{t\in[0,\tilde{T}]}\{g(t, X(t,x_0)) - N(t)\}];\ \ N\ \text{はマルチンゲール}\ \}$$

Rogers の数値計算のアイデアは以下のようなものである。
(i) inf に近いうまいマルチンゲール $N$ を見つけて
(ii) さらに $M \geqq 1$ を定め、疑似乱数によるシミュレーションにより、独立な $M$ 個の $\mathbf{R}^{2NK}$-値確率変数 $\{(X_m(T_k), N_m(T_k))\}_{k=1,\ldots,K}, m = 1, 2, \ldots, M,$ の標本で、その分布が $\{(x(T_k, x_0), N(T_k))\}_{k=1,\ldots,K}$ と一致するようなものを発生させる。

そして

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(N_m(0) + \max_{k=1,\ldots,K}\{g(T_k, X_m(T_k)) - N_m(T_k)\}]$$

を $c_B$ の近似値とするもである。

Rogers のアイデアは一見つまらないように見えるかも知れないが、LS 法や最小二乗法は大雑把に言って $c_B$ の下限を与えるものであるが、Rogers の方法は上限を与えるので、両方をうまく使えば、近似値の誤差を評価できるという利点がある。

また、Rogers は例としてブラックショールズモデルのアメリカンコールオプションの場合（ $g(t,x) = \max\{e^{-rt}x, K\}$ ）の場合に

$$N(t) = E[g(\tilde{T}, X(\tilde{T}, x_0))|\mathcal{F}_t], \qquad t \in [0, \infty)$$

と取るとうまくいったということを論文で数値と共に述べている。

Rogers の方法はマルチンゲール $N$ をどのように取るのが良いのかがわからないため、あまり研究もされていない。実務で用いられるのは LS 法であるが、その時の関数系の中に $(P_{T_K - T_k}g(T_K, \cdot))(x)$ (ヨーロピアンデリバティブの価格）を忍び込ませていることが多いと聞いており、この場合も個別の工夫が必要のようで Rogers の方法も使い方次第だと思っている。

モンテカルロ法によるバミューダデリバティブの価格決定の問題について述べてきたが、いずれの場合もまず確率過程のシミュレーションが正確に行えることが前提となる。しかし、それは特別な場合を除き簡単ではない。多くの場合、Euler-丸山近似によるシミュレーションが行われているが、今まで見た手法で確率過程のシミュレーションの精度が近似の誤差にどのような影響を与えるかという研究もあまりないようである。

## 8　期待値の数値計算法

$\mathbf{R}^N$ 上の滑らかな関数 $g$ に対して伊藤の公式により

$$g(X(t,x)) = g(X(0,x)) + \sum_{i=0}^{d}\int_0^t (V_i g)(X(s,x)) \circ dB^i(s)$$

が成り立つ。これを繰り返せば、確率的テイラー展開

$$g(X(t,x))$$

$$= g(x) + \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{i_1,\ldots,i_\ell=0}^{d}(V_{i_1}\cdots V_{i_\ell})g(x)$$

$$\times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{\ell-1}} \circ dB_{i_1}(s_1) \cdots \circ dB_{i_\ell}(s_\ell)) + R_m(t,x)$$

が得られる。この事を用いて、オイラーー丸山近似をつぎのようなテイラー展開法に拡張することが可能である。

$$
\begin{aligned}
&X_n^{(m)}(k/n,x)\\
&= X_n^{(m)}(k-1/n,x) + \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_\ell=0}^{d} (V_{i_1}\cdots V_{i_\ell})(X_n^{(m)}(k-1/n,x))\\
&\qquad \times \int_{k-1/n}^{k/n}\int_{k-1/n}^{s_1}\cdots\int_{k-1/n}^{s_{\ell-1}} \circ dB_{i_1}(s_1)\cdots\circ dB_{i_\ell}(s_\ell))
\end{aligned}
$$

しかし、テイラー展開法には次のような問題点がある。
(1) ブラウン運動の逐次積分が確率変数として現れるが, その結合分布は一般には分かっていない。
(2) $f$ が滑らかでない場合はあまりテーラー展開による近似は有効ではない。

テイラー展開法が実際には有用ではない理由は、上に述べたとおりであるが、次のような疑問がわく。(1) 逐次積分の結合分布が情報として真に必要なのか。
(2) $f$ が滑らかでなければ本当にテイラー展開が有効にならないのか。
滑らかさに関しては１９８０年代より発達したマリアバンカリキュラスがかなりの情報を与えてくれる。また、方程式 (1) はある意味で常微分方程式体系なので、ベクトル場の作るリー環が重要な情報を握っている。この２つを考慮した新しい方法が KLNV 法（楠岡-Lyons-二宮-Victoir ）と呼ばれる方法であり、これには cubature 法と呼ばれる方法と Gaussian K-scheme と呼ばれる方法の２種類がある ([19], [21], [28],[35])。Gaussian K-scheme については 2006 年にある程度述べたので以下では cubature 法について述べていく。

まず $T>0$ を与えられたものとする。$n \geqq 1$ に対して $s_i^{(n)} \in (0,T]$, $i=1,\ldots,n$, は $\sum_{k=1}^{n} s_i^{(n)} = T$ を満たすものとする。最も単純な例は $s_i^{(n)} = T/n, i=1,\ldots,n,$ である。さて、$t_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{j} s_i^{(n)}$, $j=0,1,\ldots,n,$ とおく。今、$Q_{(s)}$, $s>0$, は $\mathbf{R}^N$ 上のマルコフ作用素であり、$C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ 上の作用素でもあるとする。この時、$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&P_T f(x) - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})}\cdots Q_{(s_1^{(n)})} f)(x)\\
&= \sum_{\ell=0}^{n} (Q_{(s_n^{(n)})}\cdots Q_{(s_{\ell+1}^{(n)})}(P_{s_\ell^{(n)}} - Q_{(s_\ell^{(n)})})P_{t_{\ell-1}^{(n)}} f)(x)
\end{aligned}
$$

$x \in \mathbf{R}^N$ であり、$Q_{(s)}$ はマルコフ作用素なので

$$
\begin{aligned}
&||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})}\cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty\\
&\leqq \sum_{\ell=0}^{n} ||(P_{s_\ell^{(n)}} - Q_{(s_\ell^{(n)})})P_{t_{\ell-1}^{(n)}} f)||_\infty
\end{aligned}
$$

となることがわかる。この $||(P_{s_\ell^{(n)}} - Q_{(s_\ell^{(n)})})P_{t_{\ell-1}^{(n)}} f)||_\infty$ がどのような評価を受けるかを考えるのが問題となる。

$m \geqq 2$ とする。もし $r \geqq 2m$, 及び $C_0 \in (0,\infty)$ が存在して、すべての $s \in (0,1]$, $f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&||(P_s - Q_{(s)})f||_\infty\\
&\leqq C_0 \sum_{i=1}^{r} \sum_{u_1,\ldots,u_i \in A^{**}, m+1 \leqq ||u_1||+\cdots+||u_i|| \leqq r} s^{(||u_1||+\cdots+||u_i||)/2} ||\Phi(r(u_1)\cdots\Phi(u_i)f||_\infty \qquad (5)
\end{aligned}
$$

が成立するならば、(UFG) 条件の下で $C_1 \in (0,\infty)$ が存在して

$$||(P_s - Q_{(s)})P_t f||_\infty$$

$$\leqq C_1 \sum_{i=1}^{r} \sum_{u_1,\ldots,u_i \in A^{**}, m+1 \leqq ||u_1||+\cdots+||u_i|| \leqq r} s^{(||u_1||+\cdots+||u_i||)/2} t^{(||u_1||+\cdots+||u_{i-1}||)/2} ||\nabla f||_\infty$$

$s,t \in (0,1]$, $f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$, が成立する。

今、$\gamma \geqq 1$ に対して

$$t_i^{(n)} = (\frac{i}{n})^\gamma T, \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

とおき

$$s_i^{(n)} = t_i^{(n)} - t_{i-1}^n, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

とおけば、

$$\frac{s_i^{(n)}}{t_{i-1}^{(n)}} \leqq 2^\gamma \qquad i = 1,\ldots,n,$$

であるので、$C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty$$

$$\leqq C((\frac{1}{n^\gamma})^{1/2} ||\nabla f||_\infty + \sum_{\ell=1}^{n} (\frac{\ell^{\gamma-1}}{n^\gamma})^{(m+1)/2} ||\nabla f||_\infty) \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

となる。よって、次の結果を得る。

(1) $\gamma < (m-1)/2$ ならば $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty \leqq C(\frac{1}{n})^{\gamma/2} ||\nabla f||_\infty \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

(2) $\gamma = m-1$ ならば $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty \leqq C(\frac{1}{n})^{(m-1)/2} (\log n) ||\nabla f||_\infty \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

(3) $\gamma > m-1$ ならば $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty \leqq C(\frac{1}{n})^{(m-1)/2} ||\nabla f||_\infty \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

上記の性質 (5) を持つ $Q_{(s)}$ をどのようにして見つけるかが問題となる。以下その方法を述べる。

$\mathbf{R}^N$ 上のベクトル場 $W \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$ に対して常微分方程式

$$\frac{d}{dt} y(t,x) = W(y(t,x)),$$

$$y(0,x) = x$$

を考え、$y(1,x)$ を $\exp(W)(x)$ と表すことにする。また、 $C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ 上の線形作用素 $\mathrm{Exp}(W)$ を

$$(\mathrm{Exp}(W)f)(x) = f(\exp(W)(x)) \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

により定義する。

容易にわかることであるが、

$$\frac{d^n}{dt^n}\mathrm{Exp}(tW) = W^n\mathrm{Exp}(tW) = \mathrm{Exp}(tW)W^n, \qquad n \geqq 1$$

である。とって、形式的にはテーラー展開により

$$\mathrm{Exp}(tW) = Identity + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} W^n = \exp(tW)$$

となることに注意されたい。

Lie 代数の話に戻る。$\xi \in \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ が $j_0(\xi) = 0$ を満たすならば

$$\exp(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}$$

は定義可能である。$\xi \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}(A)_{\leqq m}$ に対して $\Psi(\xi)$ はベクトル場となる。形式的には、テーラー展開の収束のことを無視すれば

$$\mathrm{Exp}(t\Phi(\xi)) = \Psi(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Phi(\xi^n) = \text{"}\Phi(\exp(t\xi))\text{"}$$

となる。拡散作用素 $P_t$ についても

$$\frac{d^n}{dt^n}P_t = P_t L^n = P_t((\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} V_k^2 + V_0)^2)$$

であるので、形式的には、

$$P_t = \Phi(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Phi((\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} v_k^2 + v_0)^n) = \text{"}\Phi(\exp(t(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} v_k^2 + v_0))\text{"}$$

となることがわかる。これらは $t \downarrow 0$ の時の漸近展開に関する情報を与える。

今、$\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ 上の線形作用素 $\Psi_s$, $s > 0$, を

$$\Psi_s(\sum_{u\in A^*} a_u u) = \sum_{u\in A^*} s^{||u||/2} a_u$$

により定義する。また、$\mathbf{R}\langle A\rangle$ 上のノルム $||\cdot||$ を

$$||\xi|| = (\sum_{u\in A^*} \langle \xi, u\rangle^2)^{1/2}$$

で定める。

この時次の事実が成立する。

**定理 8.1** $m \geqq 2$ とする。$Z_1, Z_2, \cdots, Z_M$ は $\mathcal{L}(A)_{\leqq m}$-値確率変数で以下の条件を満たすとする。
(i) 任意の $p \in (1, \infty)$ に対して

$$E[||Z_k||^p] < \infty, \qquad k = 1, \ldots, M.$$

(ii) $\sum_{k=1}^{M} \langle Z_k, v_0 \rangle = 1.$

(iii) $E[j_{\leqq m}(\exp(Z_1)\exp(Z_2)\cdots\exp(Z_M))] = j_{\leqq m}(\exp(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} v_k^2 + v_0))$

この時、$Q_{(s)}$, $s > 0$, を

$$(Q_{(s)}f)(x) = E[(\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_1))\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_2))\cdots\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_M))f)(x)], \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

で定義すれば、$Q_{(s)}$ に対して 式 (5) の評価式が成立する。

$m = 5$ の場合の例

$m = 5$ の例はいくつも与えられている。Lyons らは $Z_k$ として有限値の確率変数を選び、期待値を有限和で計算することを考えている。しかし、和の数が多いためそのままでは実用化できず、そこから出発して和の数を減らすことを考えているがまだうまくいっていない。

ここで二宮-二宮の例を与えておく（詳しくは [34] 参照)。

$W_{i,j}$ $i = 1, \ldots, d$, $j = 1, 2$, ガウス型確率変数で

$$E[W_{i,j}] = 0, \quad E[W_{i,j}Z_{i',j'}] = \delta_{ii'}R_{j,j'} \qquad i, i' = 1, \ldots, d, \ j, j' = 1, 2$$

を満たすものとする。ただし、

$$R_{1,1} = \frac{1}{2}, \qquad R_{2,2} = \frac{3}{2}, \qquad R_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

である。この時、

$$Z_1 = v_0 + \sum_{i=1}^{d} Z_{i,2}v_i, \qquad Z_2 = \sum_{i=1}^{d} Z_{i,1}v_i$$

とおくと、定理の条件を満たす（ただし、$M = 2$)。

この場合、$Z_1, Z_2$ 共に $v_1, i = 0, 1, \ldots, d$, の一次結合であるので、$\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_i)))$ は計算がしやすい。また、期待値はガウス積分なので、準乱数計算等が可能となる。ガウス積分に基づく KLNV 法については計算のしやすい方法という観点から多くの研究がある（例えば [30])。

なお、$m = 7, 9$ となる具体的な例も最近、篠崎裕司氏により発見された ([38])。この例では、$M = 1$ であるが、$Z_1$ はかなり複雑なリー環を含んでおり、$\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_1)))$ の計算には $\Phi(\Psi_s(Z_1)))$ の部分を手作業で求める必要がある。これをさけるためには、ルンゲ・クッタ法のアイデアが手がかりとなるが、次のような問題がある。

今、$\xi \in \mathcal{L}(A)_{\leqq m}$ に対して $(\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(\xi)))f)(x)$ を $s$ についてテーラー展開を行うと $s^{n/2}$ の項は $(V_{i_1}\cdots V_{i_r}f)(x)$, $i_1, \ldots, i_r = 0, 1, \ldots, d$, $||v_{i_1}\cdots v_{i_r}|| = n$, の線形和となる。$(V_{i_1}\cdots V_{i_r}H)(x)$ はグラフ（ただし点に番号がつく）で表せることに注意しよう（$H(x) = x$)。

いま、常微分方程式の時と同様に、$(h, x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N)$ の滑らかな関数の空間 $C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ の部分ベクトル空間 $\mathcal{W}_n$, $n \geqq 0$, を以下のように定義する。

$$\mathcal{W}_0 = \{0\},$$

$\mathcal{W}_{n+1} = \text{linear .hull of}\{hV_i(x+W(h,x));\ W \in \mathcal{W}_n, i = 1, \ldots, d\} \cup \{h^2V_0(x+W(h,x));\ W \in \mathcal{W}_n,$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

前と同様に、$W \in \mathcal{W}_n$ の同値類はグラフの一次結合で表されることがわかる。$r \geqq 1$ に対して $C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ 上の同値関係 $\sim_r$ は前に述べたものとする。

$W \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$ で $(\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_{h^2}(\xi)))H)(x) \sim_{2m} x + W(h, x)$ となるものが見つかれば、篠崎氏の方法を実装化することが可能となる。

# 9　拡散過程の期待値　II

最初に述べたようにファイナンスにおいては吸収壁付きの拡散過程についての期待値計算も重要になる。しかし、現在のところ境界条件の付かない場合ほど精度の良い計算法は見つかっていない。これについて解説する。

話を見やすくするために、

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

$$V_k = \sum_{i=2}^{d} V_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad k = 2, \ldots, d$$

という特別な場合を考える。そして、

$$(P_t^0 f)(x) = E[f(X(t,x)),\ \min_{s \in (0,t]} X^1(s,x) > 0], \qquad t \in [0,\infty), x \in \mathbf{R}^N\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

で線形作用素 $P_t^0$ を定める。

$$u(t,x) = (P_t^0 f)(x), \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \{x \in \mathbf{R}^N;\ x^1 \geqq 0\}$$

とおくと、$u$ は連続で

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = Lu(t,x), \quad (\text{弱い意味で}) \qquad t > 0,\ x \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^{N-1}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t,x) = f(x), \qquad x \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^{N-1}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \{0\} \times \mathbf{R}^{N-1}$$

を満たすことがわかり、$u$ は $x^1 > 0$ の領域でのディリクレ境界条件付き PDE の解となる。

実は次のような定理が証明できる。

**定理 9.1** *(UFG)* を仮定する。この時、すべての $k, k' \geqq 0$ $u_1, \ldots, u_{k+k'} \in A^{**}$ に対して $C \in (0,\infty)$ が存在し

$$\sup_{x \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^{N-1}} |(\Phi(r(u_1) \cdots r(u_k)) P_t^0 \Phi(r_{k+1}] \cdots r(u_{k+k'}))f)(x)|$$

$$\leqq C t^{-(||u_1|| + \cdots ||u_{k+k'}||)/2} \sup_{x \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^{N-1}} |f(x)| \qquad t \in (0,1],\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

が成立する。

この結果の評価は境界条件のないものとほぼ同じである。したがって、前節と同様なことができるように見える。しかし重要な違いがある。

$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ に対して、

$$\sup_{x \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^{N-1}} |(V_1 f)(x) - (V_1 P_t f)(x)| \to 0, \qquad t \downarrow 0$$

であるが、$P_t$ を $P_t^0$ で置き換えると一般に成立しない。また、$C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ は $P_t^0$ の生成作用素の定義域に含まれない。これらのことからテーラー展開に関する単なる代数的考察だけでは、良い近似法を見つけることはできないのである。

なお、Greeks と呼ばれるリスク指標を計算することもファイナンスでは求められている。これは、$(V_k P_T f)(x_0)$, $(V_k V_\ell P_T f)(x_0)$, $(V_k P_T^0 f)(x_0)$ といった値を数値計算せよという問題である（この問題はバミューダデリバティブなどでも発生する）。今のところ、これらの数値計算をする有力な方法は見つかっておらず（Malliavin 解析を応用する等の試みはあるが）初期値 $x_0$ を摂動して差分を取るという危なっかしい方法が実務では用いられているようである。

## 10　拡散過程の期待値 III

境界条件のない場合に話を戻す。実は二宮・二宮の例で作った $Q_{(s)}$ については以下の評価が成り立つ（[21]）。

**定理 10.1**　(UFG) 条件が成立すると仮定する。この時、$T > 0$ に対して $C \in (0, \infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q^n_{(T/n)} f)||_\infty \leqq \frac{C}{n^2} ||f||_\infty \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

が成立する。

これについては 2006 年の summer school で述べた。

Euler-丸山近似に関する定理 4.4 も 2006 年の summer school で述べた議論と同様な議論で示せる。これを最後に述べておく。

$X_h(t,x)$, $h > 0$, $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbf{R}^N$, をオイラー丸山近似とする。また、線形作用素 $Q^{(h)}_{(t)}$, $h > 0$, $t \geqq 0$, を

$$(Q^{(h)}_{(t)} f)(x) = E[f(X_h(t,x)], \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

で定める。

(UH) 条件が成立すると仮定しよう。この時、Malliavin covariance $M^{ij}(t,x) = (DX^i(t,x), DX^j(t,x))$, $i,j = 1, \ldots, N$, $t \geqq 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, に対して

$$\sup_{t \in [T_1, T_2], x \in \mathbf{R}^N} E[\det(M^{ij}(t,x))^{-p}] < \infty, \qquad p \in (1, \infty)$$

が示される。これから、$X(t,x)$ の分布の滑らかさが示される。

今、$M_h^{ij}(t,x) = (DX^i(t,x), DX^j(t,x))$, $i,j = 1, \ldots, N$, $h > 0$, $t \geqq 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, とおくと、任意の多重指標 $\alpha \in \mathbf{Z}^N_{\geqq 0}$ に対して

$$\sup_{t \in [T_1, T_2], x \in \mathbf{R}^N} \sum_{i,j=1}^N E[|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} M^{ij}(t,x) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} M_h^{ij}(t,x)|^p] \to 0,\ h \downarrow 0, \qquad p \in (1, \infty)$$

となることが容易に導ける。

今、$\varphi \in C^\infty \mathbf{R})$ で $\varphi \geqq 0$, $\varphi(z) = 1$, $z > 2/3$, かつ $\varphi(z) = 0$, $z < 1/3$, となるものを取る。そして、

$$(Q^{(h),0}_{(t)} f)(x) = E[\varphi((\det(M^{ij}(t,x)))^{-1} \det(M_h^{ij}(t,x)) - 1) f(X_h(t,x))]$$

$$(Q^{(h),1}_{(t)} f)(x) = (Q^{(h)}_{(t)} f)(x) - (Q^{(h),0}_{(t)} f)(x) = E[(1 - \varphi((\det(M^{ij}(t,x)))^{-1} \det(M_h^{ij}(t,x)) - 1)) f(X_h(t,x))]$$

$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, で線形作用素 $Q^{(h),0}_{(t)}$, $Q^{(h),1}_{(t)}$, を定義すると以下のようなことが容易に示され得る。

**命題 10.2** （UH) 条件が成立すると仮定する。任意の $T_2 > T_1 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^N_{\geqq 0}$, 及び $r > 0$ に対して $C > 0$ が存在し、以下の条件を満たす。
(i) すべての $t \in [T_1, T_2]$, $h \in (0,1)$, $f \in C^\infty_b(\mathbf{R}^N)$ に対して

$$||\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(Q^{(h),0}_( t)\frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta})||_\infty \leqq C||f||_\infty,$$

が成立する。
(ii) すべての $t \in [T_1, T_2]$, $h \in (0,1)$, $f \in C^\infty_b(\mathbf{R}^N)$ に対して

$$||Q^{(h),0}_( t)f||_\infty \leq Ch^r||f||_\infty$$

が成立する。

任意の $T > 0$ に対して

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |E[f(X(T/n)] - E[f(X_{T/n}(T,x)]| = ||P_T f - Q^{(T/n)}_{T)} f||_\infty$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} ||Q^{(T/n}_{(Tk/n)}(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)}f||_\infty$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{[n/2]} ||(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)}||_\infty + \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} ||Q^{(T/n}_{(Tk/n),0}(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)}f||_\infty$$

$$+ \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} ||Q^{(T/n}_{(Tk/n),1}(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)}f||_\infty$$

が成立する。命題より、$k = [n/2]+1, \ldots, n-1$, ならば $C_1 \in (0,\infty)$ が存在して

$$||Q^{(T/n}_{(Tk/n),1}(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)}f||_\infty \leqq C_1(T/n)^2||(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)}f||_\infty \leqq 2C_1(T/n)^2||f||_\infty$$

となる。また、容易な計算により $C_2 \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_h f - Q^{(h)}_{(h)} f||_\infty \leqq C_2 \quad h^2 \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^N_{\geqq 0},\ |\alpha| \leqq 4} ||\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}||_\infty, \qquad f \in C^\infty_b(\mathbf{R}^N)$$

が成立することがわかる。これらの考察から定理 4.4 が成立する。

## 参考文献


[1] Avramidis, A.N. , and P. Hyden, Efficiency improvements for pricing American options with a stochastic mesh, in Proceedings of the 1999 Winter Simulation Conference, pp. 344-350

[2] Avramidis, A.N. , and H. Matzinger Convergence of the stochastic mesh estimator for pricing American options J. Computational Finance, 7 (4) (2004), 73-91.

[3] Bally, V., and G. Pagés, A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems Bernoulli 9 (2003), 1003?1049.

[4] Bally, D., and D. Talay, The law of the Euler scheme for stochastic differential equations I. Convergence rate of the distribution function, Probab. Theory Relat. Fields 104(1996), 43-60.

[5] Belomestny, D., Pricing Bermudan Options by Nonparametric Regression: Optimal Rates of Convergence for Lower Estimates, Finance and Stochastics, 15(2011), 655- 683.

[6] Bouchard, B.,and N Touzi Discrete-time approximation and Monte-Carlo simulation of backward stochastic differential equations Stoch. Proc. Appl. , 111(2004), 175-206

[7] Broadie, M., and P. Glasserman, A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options J. Computational Finance, 7 (4) (2004), 35-72.

[8] Butcher, J.C., The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Chichester, 1987.

[9] Chassagneux, JF., and D. Crisan, Runge Kutta schemes for backward stochastic differential equations Ann. Appl. Prob., 24 (2014), 679-720.

[10] Clement, E., D. Lamberton, and P. Protter, An analysis of a least squares regression algorithm for American option pricing, Finance and Stochastics, 6(2002), 449-471.

[11] Crisan, D., and K. Manolarakis Solving backward stochastic differential equations using the cubature method: application to nonlinear pricing SIAM J. Finan. Math., 3(1), 534 57

[12] D Crisan, K Manolarakis, N Touzi - On the Monte Carlo simulation of BSDEs: An improvement on the Malliavin weights Stoch. Proc. Appl., 120(2010), 1133-1158

[13] Douglas, J., J. Ma, P Protter, Numerical methods for forward-backward stochastic differential equations Ann. Appl. Probab. 6, (1996), 940-968.

[14] Glasserman, P., "Monte Carlo Methods in Financial Engineering" Springer, 2004, Berlin.

[15] Gobet, E., J-P. Lemor, and X. Warin, A regression-based Monte Carlo method to solve backward stochastic differential equations, Ann. Appl. Probab. 15 (2005), 2172?2202. .

[16] Jacobson, N., Lie algebras, New York, Interscience 1962.

[17] Kloeden, P.E., and E. Platen, Numerical Solution of Stochastic differential Equations, Applications of Mathematics vol.23, Springer, Berlin,1994.

[18] Kuipers, L., and H. Niederreiter Uniform distribution of sequences, Dover Publications, 2012.

[19] Kusuoka, S., Approximation of Expectation of diffusion processes and Mathematical Finance, Advanced Studies in Pure Mathematics 31, Proceedings of Final Taniguchi Symposium, Nara 1998,(edited by Sunada, T.), Mathematical Society of Japan, 2001, pp. 147-165.

[20] Kusuoka, S., Malliavin Calculus revisited, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 10(2003), 261-277.

[21] Kusuoka, S., Approximation of expectation of diffusion processes based on Lie algebra and Malliavin calculus, in Advances in Mathematical Economics vol. 6, ed. S.Kusuoka, M.Maruyama , pp. 69-83, Springer 2004.

[22] Kusuoka, S., Gaussian K-Scheme: Justification for KLNV method, in Advances in Mathematical Economics vol. 17, ed. S.Kusuoka, M.Maruyama , pp. 71-120, Springer 2013.

[23] Kusuoka, S., and Y.Morimoto, Stochastic mesh methods for Hörmander type diffusion processes Adv. Math. Econ. vol.18 (2014),61-99.

[24] Kusuoka, S., and Y.Morimoto, Least Square Regression methods for Bermudan Derivatives and systems of functions Adv. Math. Econ. vol.19 (2015), 57-89.

[25] Kusuoka, S., and D.W.Stroock, Applications of Malliavin Calculus II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 32(1985),1-76.

[26] Liu, G., and L.J. Hong, Revisit of stochastic mesh method for pricing American options, Operations Research Letters 37(2009), 411-414.

[27] Longstaff, F., and E. Schwartz, E, : Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach, Rev. Financ. Stud. 14 (2001), 113?147.

[28] Lyons, T., Victoir, N.: Cubature on Wiener space, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Sci. 460(2004), 169?198.

[29] Morimoto, Y., Application of Stochastic Mesh Method to Efficient Approximation of CVA, Preprint 2015, arXiv:1510.04588 [math.PR]

[30] Morimoto, Y., and M. Sasada, Algebraic Structure of Vector Fields in Financial Diffusion Models and its Applications, Preprint.

[31] Matsumoto, M., and T. Yoshiki, Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Volume 65 (2012), pp 569-579.

[32] Matsumoto, M., M. Saito and K., Matoba A computable figure of merit for quasi-Monte Carlo point sets Journal: Math. Comp. 83 (2014), 1233-1250

[33] Ninomiya, S., A New Simulation Scheme of Diffusion Processes: Application of the Kusuoka Approximation to Finance Problems, Mathematics and Computer in Simulation, to appear in 2002.

[34] Ninomiya, M., and Ninomiya, S., A new higher order weak approximation scheme of Stochastic Differential Equations and the Runge-Kutta method, Finance Stoch. 13(2009), 415-443.

[35] Ninomiya, S., and Victoir, N., Weak Approximation of Stochastic Differential Equations and Application to Derivative Pricing, Applied Mathematical Finance 15(2008),107-121.

[36] Reutenauer, C., Free Lie Algebras, Clarendon Press, Oxford, 1993.

[37] Rogers, LCG, Monte Carlo valuation of American options Math. Finance 12(2002), 271-286.

[38] The 47th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (December 5-8, 2015, Hawaii, USA) の proceedings に載る予定

[39] Sussmann, H.J., Orbits of family of vector firelds and integrability of distributions , Trans. A.M.S. 180(1973), 171-188.

[40] Takanobu, S., Multiple stochastic integrals appearing in the stochastic Taylor expansions, J. Math. Soc. Japan 47(1995), 67-92.

[41] Tsitsiklis, J., and B. Van Roy, Regression methods for pricing complex American style options. IEEE Trans. Neural Netw. 12(1999), 694-703.