数理ファイナンスに現れる
数値計算の確率解析手法

第１回　様々な問題

楠岡成雄

数値計算

１９世紀から存在する

コンピュータの発達に伴い大きく進展

大型計算機での計算　⇒　 PC での計算

「良い数値計算法」は何か　？

数学的に同じ問題であっても。数値計算の目的により異なる

１９８０年頃～

数理ファイナンスの理論の革命的発展

一般企業における金融リスクの増大

背景：金融自由化、外国為替の変動相場制への移行

金融機関におけるファイナンス技術の革命

企業がリスク回避するための金融新商品　デリバティブ

金融機関への資本規制

デリバティブの価格

積むべき資本

すべて具体的に　＊＊＊円ということになる

ファイナンスに関する数値計算

～ 2000 年　既存の数値計算法を用いる

徐々に既存の方法の限界が明らかとなる

計算ファイナンス　：　ファイナンスのための数値計算法

講演で扱う問題

(1) 期待値の計算：ヨーロピアンデリバティブ

(2) アメリカンデリバティブ、バミューダンデリバティブの価格問題

(3) Greeks の計算

(4) CVA (Credit Valuation Adjustment)　（あまり扱わない）

(5) バリアーデリバティブ等々

ファイナンスのモデル：最も広く使われているのが拡散過程モデル

講演では　係数が滑らかな良い SDE　のみを扱う

数学的設定

$d, N \geqq 1$,　　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ：完備確率空間

$B(t) = (B^1(t), \ldots, B^d(t))$, $t \in [0, \infty)$　d 次元ブラウン運動

$$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqq 0} = \sigma\{B(s); s \in [0, t]\} \vee \mathcal{N}, \qquad t \in [0, \infty)$$

$\mathcal{N} = \{B \in \mathcal{F},\ P(B) = 0\ or\ 1\}$

$V_k \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$, $k = 0, 1, \ldots, d$,

$$X(t, x) = x + \sum_{k=0}^d \int_0^t V_k(X(s, x)) \circ dB^k(s), \qquad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}^N$$

話の簡略化のため考える拡散過程はこれのみ

良い「解の version」　$X(t, \cdot) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ $t \geqq 0$, 微分同相

$$(V_k f)(x) = \sum_{i=1}^{N} V_k^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x), \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

ベクトル場 V_k ： 1 階の微分作用素

伊藤の公式

$$f(X(t,x)) = f(x) + \sum_{k=0}^{d} \int_0^t (V_k f)(X(s,x)) \circ dB^k(s)$$

$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N),\ t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}^N$

(1) 期待値計算の問題　　(基本的な問題)

$x_0 \in \mathbf{R}^N$, $T > 0$, 可測関数 $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ に対して

$E[f(X(T, x_0)]$ を数値計算せよ

$x_0 \in \mathbf{R}^N$ 現在の「経済状態」を表す

$T > 0$: ヨーロピアンデリバティブを考える時は　「満期」

マルコフ作用素の半群 $\{P_t\}_{t \geqq 0}$

$$(P_t f)(x) = E[f(X(t, x))], \quad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}^N$$

P_t : $C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ 上の作用素

　問題 : $P_T f(x_0)$ を計算せよ

ファイナンスが実務で用いられるようになった 1980 年頃は

ブラック・ショールズモデル　（幾何ブラウン運動）　がほとんど

$E[f(X(T, x_0)]$ は 1 次元の積分で書け、良い近似式が多くあった

この問題は存在しなかった

1990 年以後多種のデリバティブが出現

カリブレーション：モデルと市場の整合性を保つためのパラメータ調整

ブラック・ショールズモデルでは市場整合性が保てない

新しいモデルが考案される

stochastic volatility モデル等々

金利のモデル等の複雑化

ファイナンスではパラメータを含むモデルを考える

$$X(t,x;\theta)=x+\sum_{k=0}^{d}\int_0^t V_k(X(s,x;\ \theta);\theta)\circ dB^k(s),\quad t\geqq 0,\ x\in\mathbf{R}^N$$

市場にある「流動性の高い」デリバティブの価格

理論的には $E[f_1(X(T,x_0;\theta))],\ldots,E[f_m(X(T,x_0;\theta))]$ で与えられる

市場価格とフィットする $\theta=\theta_0$ を選ぶ

θ を与える毎に $E[f_1(X(T,x_0;\theta))],\ldots,E[f_m(X(T,x_0;\theta))]$ を計算し、

良い θ を探し当てる

1000 回程度 θ を変えて計算

最初は計算精度は粗くて良いが、

終わりでは計算精度を高くする必要がある

最初と最後では　異なった計算法を実務では使うらしい

$u(t,x) = (P_t f)(t,x)$, $f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$　とおくと

$u : [0,\infty) \times \mathbf{R}^N$ 連続、$u : (0,\infty) \times \mathbf{R}^N$ 滑らか

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = (Lu)(t,x), \qquad u(0,x) = f(x)$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} V_k^2 + V_0$$

2 階の（退化した）楕円型微分作用素である。

$E[f(X(T,x_0)]$ の数値計算 $= u(T,x_0)$ の数値計算

PDE の数値計算法の歴史は古い！

1990 年頃までは PDE の数値計算手法（有限要素法など）で解いていた

PDE の手法の問題点

(i) 領域の問題

$\mathbf{R}^N$ 上の関数を精度良く近似することは困難

適当な有界領域をとり、境界条件の付いた偏微分方程式の解で近似

しかし、その段階で誤差が生じる

(ii) 「次元の呪い」

方程式の定義されている領域の次元は N

各座標を例えば 10^3 個のメッシュに切ると 10^{3N} 個の点で定義された関数に対する方程式を解くことになる

計算機の記憶容量の限界のため、N が大きいと困難

（一般に $N = 4$ が限界と言われている）。

(iii) 技術的な理論上の問題

L が退化した楕円型作用素になることが多い

これまでの PDE に対する数値計算の理論ではあまり扱われていない

近似解の理論的な精度の保証が困難

ファイナンスの問題の利点

関数 $P_T f = u(T, \cdot)$ を求める必要はない

与えられた $x_0 \in \mathbf{R}^N$, $T > 0$, に対して

$(P_T f)(x_0)$, $(V_k P_T f)(x_0)$, $k = 1, \ldots, d$, 等

期待値　及び　Greeks と呼ばれるいくつかの値にのみ関心がある

x_0：現在の「経済状態」

x_0 等の微小変化には興味があるが、それ以外は興味がない

(2) アメリカンデリバティブ、バミューダンデリバティブ

$\mathcal{T}_s^t$, $0 \leqq s < t \leqq T$,

$\mathcal{F}_t$-停止時刻 τ で $s \leqq \tau \leqq T$ を満たすもの全体

$T > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^N$,

$g : [0, T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ 可測関数

アメリカンデリバティブの価格

$$c_A = c_A(x_0) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau, x_0))];\ \tau \in \mathcal{T}_0^T\ a.s.\}$$

$K \geqq 2$, $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_K = T$,

バミューダンデリバティブの価格

$$c_B = c_B(x_0) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau, x_0))];\ \tau \in \mathcal{T}_0^T,\ \tau \in \{T_1, \ldots, T_K\}\ a.s.\}$$

問題　これらを数値計算せよ

実務では真のアメリカンデリバティブは存在しない

バミューダンデリバティブは多い

アメリカンデリバティブの数値計算

PDE の手法では 自由境界値問題　解くのが困難

多くの場合、K を大きくとり $T_k = Tk/K,\ k = 1, 2, \ldots K,$ として

バミューダデリバティブの数値計算法を用いる

実務上は c_B を計算することが重要

数学的には c_B は

$$v_K(x) = g(T_K, x), \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

$$v_{n-1}(x) = g(T_{n-1}, x) \vee (P_{T_n - T_{n-1}} v_n)(x), \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

$n = K, K-1, \ldots, 0$ とおけば $c_B = v_0(x_0)$

「(1) 期待値の計算」に帰着するように見える

この計算方法では関数 $v_k : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, $k = K-1, \ldots, 1$, を

記憶する必要がある

記憶容量の問題から困難　「次元の呪い」

(3) Greeks

$(V_kP_Tf)(x_0)$ や $(V_kc_B)(x_0)$ 等の数値計算

特に「デルタ」の計算は必須：ヘッジ戦略を与える

「ベガ」、「ガンマ」等はリスクの指標

パラメータを含むモデル

$$X(t,x;\theta) = x + \sum_{k=0}^{d} \int_0^t V_k(X(s,x);\theta) \circ dB^k(s), \quad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}^N$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} E[f(X(T,x_0;\theta)]|_{\theta=\theta_0},\ \ \frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} E[f(X(T,x_0;\theta)]|_{\theta=\theta_0}$$

の計算

数学的にはよく知られているように、初期値の微分の問題に変換できる

(4) CVA, XVA (DVA, FVA, KVA, MVA)

CVA ： credit valuation adjustment の略

背景

リーマンショック：巨大な金融機関が倒産する可能性が認識

様々な規制や新たな慣行の導入

金融機関に対する従来の資本規制：バーゼル規制

メガ銀行間の取引に対する金融規制

もしくは　担保付き取引の担保額の決定

A,B：二つの巨大な金融機関

A,B 間で様々な証券やデリバティブが取引されているとする

A 銀行から見ると「B 銀行の債務不履行リスク」が問題となるが

B 銀行から見れば「A 銀行の債務不履行リスク」が問題となる

担保付き取引：担保はキャッシュ

毎日、デリバティブ等の時価が変化

それに応じて担保額を変えていく取引

$$A \Leftrightarrow B$$

担保の額は A 銀行、B 銀行の信用度の差に応じて決まっていく

信用度も時間と共に変化する

「差し入れ担保の額は、Backward SDE の解として与えられる」

ということになっている

BSDE の形

$0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_K$

満期 T_k に $g_k(X(T_k, x_0))$, $k = 1, 2, \ldots, K$ が A 銀行から B 銀行に支払われる

いくつかの仮定をおくと、以下のような BSDE が問題となる

ある関数 $\beta : [0, \infty) \times \mathbf{R}^N \to (0, \infty)$, $\gamma : [0, \infty) \times \mathbf{R}^N \to (0, \infty)$, $b : [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

（$b(t, x, \cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は 1 次同次）

$$Y(t) + \int_0^t b(s, X(s), Y(s))ds + U(t) = M(t), \qquad Y(T_K) = 0,$$

という BSDE の $Y(0)$ を計算せよというのが問題

ただし、

$$U(t)$$

$$= \sum_{T_k > t} \gamma(t, X(t, x_0))^{-1} \beta(t, X(t, x_0)) E[\beta(T_k, X(T_k, x_0))^{-1} g_k(X(T_k, x_0)) | \mathcal{F}_t]$$

$$+ \sum_{T_k \leqq t} \gamma(T_k, X(T_k, x_0))^{-1} g_k(X(T_k, x_0))$$

BSDE の数値計算：盛んだが、実用可能なものはない

「第 1 次近似」$E[\int_0^T b(s, X(s), U(s)) ds]$　で代用することが多い

金融機関ではこれが CVA とされている

これは数学的には $E[\int_0^T (U(s) \vee 0)ds]$ を計算するできればよい

$U(s)$ は $X(s, x_0)$ の関数

この場合の次元 N は極めて巨大（まじめにやればであるが）

メモリーの問題、 $\int_0^T ds$ の計算方法の問題

アメリカンデリバティブの価格計算と似た側面がある

現在、上で述べた問題は金融機関では、すべて

「モンテカルロ法」による解法が用いられている

(5) Barrier option

$\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ として、満期 T までに $\psi(X(t,x)) \leqq 0$ となると支払い条件が変わる契約

基本的には

$$E[f(X(T,x_0)),\ \inf_{t\in[0,T]} \psi(X(t,x_0)) > 0]$$

の計算の問題

「モンテカルロ法」による「有効な」解法が知られていない