数理ファイナンスに現れる
数値計算の確率解析手法

第２回

楠岡成雄

常微分方程式の数値計算

$V \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$

常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t,x) = V(x(t,x)),$$

$$x(0,x) = x, \qquad t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^N$$

$T > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^N$ given

$x(T,x_0)$ の数値計算

Euler 近似 $h > 0$

$y(n;h) \in \mathbf{R}^N$, $n = 0,1,2,\ldots,$ を帰納的に定義

$$y(0;h) = x_0$$

$$y(n+1;h) = y(n;h) + hV(y(n;h)), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$|x(h,x)-(x+hV(x))| = |\int_0^h V(x(t,x))dt - hV(x)|$$

$$= |\int_0^h (h-t)\frac{d}{dt}V(x(t,x))dt| \leqq \frac{h^2}{2}||\nabla V(\cdot)V(\cdot)||_\infty$$

$\exists\, C \in (0,\infty)$

$$|y(n;\frac{T}{n}) - x(T,x_0)| \leqq \frac{C}{n}, \qquad n \geqq 1$$

収束のオーダー： $1/n$　$V(x)$ の計算回数 n

もっと速くしたい

テイラー展開　$f \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$\frac{d}{dt} f(x(t,x)) = (Vf)(x(t,x))$$

$$f(x(t,x)) = f(x) + \int_0^t Vf(x(r,x))dr$$

$$= f(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{t^k}{k!}(V^k f)(x) + \int_0^t \frac{(t-r)^m}{m!}(V^{m+1} f)(x(r,x))dr,\ m \geqq 1.$$

V はベクトル場：1 階の微分作用素と同一視

テーラー展開法

$H(x)=x,\ \ m \geqq 1,\ h>0$

$y_{(m)}(n;h),\ n=0,1,2,\ldots,$ を帰納的に定義

$$y_{(m)}(0;h)=x_0$$

$$y_{(m)}(n+1;h)=y_{(m)}(n;h)+\sum_{k=1}^{m}\frac{h^k}{k!}(V^kH)(y_{(m)}(n;h)), \qquad n=0,1,\ldots$$

$$|y_{(m)}(n;\frac{T}{n})-x(T,x_0)|=O(\frac{1}{n^m}), \qquad n\to\infty$$

$y_{(1)}(n;h)$ は Euler 近似

$m \geqq 2$ の時は Euler 近似より精度が良い

しかし、関数 $(V^kH)(x),\ k=1,2,\ldots,m,$ のプログラムが必要

手作業の計算（今日では数式処理プログラムでできるかも）

この計算をさける：ルンゲ・クッタ法

$$(VH)(x) = V(x)$$

$$(V^2H)(x) = \nabla V(x)(V(x))$$

$$(V^3H)(x) = \nabla^2 V(x)(V(x), V(x)) + \nabla V(x)(\nabla V(x)(V(x)))$$

$(V^k H)(x)$ は $\nabla^k V(x)$, $k = 0, 1, 2 \ldots,$ を結合したものの 1 次結合

グラフで表示できる（図 1 ）

$(h, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N)$ の滑らかな関数の空間 $C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ の

部分ベクトル空間 $\mathcal{W}_n$, $n \geqq 0$, を以下のように定義

$$\mathcal{W}_0 = \{0\},$$

$$\mathcal{W}_{n+1} = \text{linear .hull of}\{hV(x+W(h,x));\ W \in \mathcal{W}_n\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$m \geqq 1$ に対して $C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ 上の同値関係 $\sim_m$

$H_1 \sim_m H_2 \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^k (H_1 - H_2)}{\partial h^k}(0,x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^N,\ k = 0, 1, \ldots, m$$

$W \in \mathcal{W}_n$ に対して

$$hV(x + W(h,x))$$

$$\sim_m hV(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} h \nabla^k V(x) (\sum_{\ell=1}^{m} \frac{h^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell W}{\partial h^\ell}(0,x), \ldots, \sum_{\ell=1}^{m} \frac{h^\ell}{\ell!} \frac{\partial^\ell W}{\partial h^\ell}(0,x))$$

$W \in \mathcal{W}_n$ の同値類はグラフの一次結合で表されることが

帰納的に示せる

（問題）　$m \geqq 2$,　$W \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$ で

$$W(h,x) \sim_m \sum_{k=1}^{m} \frac{h^k}{k!}(V^k H)(x)$$

となるものを見つけよ

　この時

$$y(0;h) = x_0,$$

$$y(n+1;h) = y(n;h) + W(h, y(n;h)), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

とおくと

$$|y(n;\frac{T}{n}) - x(T, x_0)| = O(\frac{1}{n^m}), \qquad n \to \infty$$

m-次のルンゲ・クッタ法

4-次のルンゲ・クッタ法の例

$$W_1(h,x) = hV(x), \qquad W_2(h,x) = hV(x + W_1(h,x)),$$

$$W_3(h,x) = hV(x + W_2(h,x)),$$

$$W(h,x) = \frac{1}{6}(W_1(h,x) + 2W_2(h,x) + 2W_3(h,x) + hV(x + W_3(h,x)))$$

とおくと、$W(h,x)$ が 4-次のルンゲ・クッタ法を与える（1900 年頃）

1 ステップでの V への代入　4 回

m 次のルンゲ・クッタ法の見つけ方

手順を決め、グラフの数だけの代数方程式を解く

確率微分方程式におけるルンゲ・クッタ法　？？

(オイラー・丸山近似)

$b \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$ を次で定義

$$b^i(x) = V_0^i(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{N} V_k^j(x)\frac{\partial V_k^i}{\partial x^j}(x), \qquad i = 1,\dots,N,\ x \in \mathbf{R}^N$$

伊藤型確率微分方程式

$$X(t,x) = x + \sum_{k=1}^{d}\int_0^t V_k(X(s,x))dB^k(s) + \int_0^t b(X(s,x))ds$$

$X_h : [0,\infty) \times \mathbf{R}^N \times \Omega \to \mathbf{R}^N$, $h > 0$, を以下で帰納的に定義

$$X_h(0,x) = x, \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

$$X_h(t,x)$$

$$= X_h((n-1)h, x) + \sum_{k=1}^{d} V_k(X_h((n-1)h, x)(B^k(t) - B^k((n-1)h))$$

$$+b(X_h((n-1)h, x)(t-(n-1)h),$$

$t \in ((n-1)h, nh],\ n = 1, 2, \ldots, x \in \mathbf{R}^N$

X_h ：オイラー・丸山近似

定理 1 （丸山）$\forall p \in [2,\infty)$ $\forall T>0$ $\exists C \in (0,\infty)$

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |X(t,x) - X_h(t,x)|^p]^{1/p} \leqq Ch^{1/2}, \qquad h \in (0,1],\ x \in \mathbf{R}^N$$

論文 : 拡散過程の場合の Cameron-Martin-Maruyama-Girsanov の公式

拡散過程のシミュレーションでは、ほとんどの場合に用いられている

系 2 $\forall$ リプシッツ連続な関数 $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ $\forall T>0$

$\exists C \in (0,\infty)$

$$|E[f(X(T,x))] - E[f(X_{T/n}(T,x))]| \leqq C(\frac{1}{n})^{1/2} \qquad t \in [0,T],\ x \in \mathbf{R}^N$$

$T > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^N$ が与えられている時

$$X_{T/n}(mT/n, x_0)$$

$$= X_{T/n}((m-1)T/n, x_0)$$

$$+\sum_{k=1}^{d} V_k(X_{T/n}((m-1)T/n, x_0))(B^k(mT/n) - B^k((m-1)T/n))$$

$$+b(X_{T/n}((k-1)T/n, x_0))T/n, \qquad m = 1, 2, \ldots, n$$

$X_{T/n}(T, x)$ ： $Z_m^k = B^k(mT/nt) - B^k((m-1)T/n)$ の関数

Z_m^k, $k = 1, \ldots, d$, $m = 1, \ldots, n$ ：独立な nd 個の確率変数、

平均ゼロ、分散 T/n の正規分布

$E[f(X_{T/n}(T, x))]$ ： nd 次元のガウス積分として表現可能

積分を解析的に計算することは困難

（準）モンテカルロ法により $E[f(X_{T/n}(T,x))]$ を近似的に求める

積分の次元 nd の大きさが問題：小さい方が望ましい

n は近似の精度と関連：近似の精度の問題

命題 3　$T>0$ とする。この時、 $C\in(0,\infty)$ が存在して

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^N}|E[f(X(T,x))]-E[f(X_{T/n}(T,x)))]|\leqq\frac{C}{n}\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_{\geqq 0},1\leqq|\alpha|\leqq 4}||\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}||_\infty$$

$n\geqq 1,\ f\in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ が成立する。

f が C^4-級であれば近似の精度が上がる

しかし、ファイナンスで現れる f は

リプシッツ連続もしくは不連続関数であることが多い

定理 4　ベクトル場 $\{V_0, V_1, \ldots, V_N\}$ が (UH) を満たすならば、任意の $T > 0$ に対して $C \in (0, \infty)$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |E[f(X(T,x))] - E[X_{T/n}(T,x))]| \leqq \frac{C}{n} ||f||_\infty$$

$n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ が成立する。

(UH) が満たされ f が有界可測：近似誤差は $O(1/n)$

経験上　オイラー・丸山法の誤差は $1/n$ のオーダーと認識されている

(UH) 条件がない場合に、精度が落ちる理由

（例）$N=2,\ d=1,$ とし $V_0=0,$

$$V_1(x)=-x^2\frac{\partial}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial}{\partial x^2}=(-x^2,x^1)$$

$$b(x)=-\frac{1}{2}(x^1,x^2)=-\frac{1}{2}x$$

$x\cdot V_1(x)=0$ に注意

伊藤の公式より

$$|X(t,x)|^2=|x|^2, \qquad t>0,\ x\in\mathbf{R}^2$$

$$|X_h(h,x)|^2=|(1-\frac{h}{2})x+V_1(x)B(h)|^2=|x|^2(1+(B(h)^2-h)+\frac{h^2}{4})$$

$$|X_{1/n}(1,x)|^2=|x|^2\prod_{k=1}^{n}(1+((B(kh)-B((k-1)h))^2-h)+\frac{h^2}{4})$$

$$\sim |x|^2 \exp(\sum_{k=1}^{n}(((B(kh)-B((k-1)h))^2-h)-\frac{1}{2}((B(kh)-B((k-1)h))^2-h)^2+\frac{h^2}{4})$$

$(B(kh)-B((k-1)h))^2-h$, $k=1,\ldots,n$, i.i.d. 平均 0, 分散 $2h^2$

中心極限定理により $|X_{1/n}(1,x)|^2$ の分布は

$$|x|^2 \exp(\sqrt{\frac{2}{n}}Z+O(\frac{1}{n})) \sim |x|^2(1+\sqrt{\frac{2}{n}}Z+O(\frac{1}{n}))$$

Z ：標準正規分布を持つ確率変数

$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=g(|x|^2)$, $x\in\mathbf{R}^2$,

$E[f(X(1,x))]=g(|x|^2)$

$$E[f(X_{1/n}(1,x)] \sim E[g(|x|^2(1+\sqrt{\frac{2}{n}}Z+O(\frac{1}{n})))]$$

$g \in C_b^2$ ならば

$$E[g(|x|^2(1+\sqrt{\frac{2}{n}}Z+O(\frac{1}{n}))]$$

$$= g(|x|^2) + E[g'(|x|^2)(\sqrt{\frac{2}{n}}Z + O(\frac{1}{n})))] + ||g''||O(\frac{1}{n}) = g(|x|^2) + O(\frac{1}{n})$$

$g(r) = (r-1) \vee 0$ であれば、$|x| = 1$ の時には

$$E[(\sqrt{\frac{2}{n}}Z + O(\frac{1}{n})) \vee 0] \sim \sqrt{\frac{2}{n}}E[Z \vee 0]$$

Gauss 積分は容易に $[0,1]^n$ 上の積分に変換できる (Box-Muller 法)

$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 有界可測関数に対して

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{|x|^2}{2})dx$$

$$=\int_0^1 d\theta\int_0^\infty rdrf(r(\cos(2\pi\theta),\sin(2\pi\theta))\exp(-\frac{r^2}{2})$$

$$=\int_0^1 d\theta\int_0^1 dzf(\log((2\log(1/z))^{1/2}(\cos(2\pi\theta),\sin(2\pi\theta)))$$

($r=(2\log(1/z))^{1/2}$, $z=\exp(-\frac{r^2}{2})$ とおいた)

$(z,\theta)\in(0,1)^2\to\log((2\log(1/z))^{1/2}(\cos(2\pi\theta),\sin(2\pi\theta))\in\mathbf{R}^2$

２次元の一様分布が２次元の標準正規分布に変換される

(積分の数値計算)

$N \geqq 1$, $f : [0,1]^N \to \mathbf{R}$ は（連続）関数

$$I(f) = \int_{[0,1]^N} f(x)dx$$

この積分の数値計算

求積法

$$\sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{n} \frac{1}{n^N} f(\frac{i_1}{n}, \cdots, \frac{i_N}{n})$$

で近似： n^N 回の計算回数が必要

「次元の呪い」

$n = 2$, $N = 1000$, の場合： 1 秒に 10^{50} 回計算 10^{50} 秒 $> 10^{40}$ 年以上

モンテカルロ法

X_n, $n = 1, 2, \ldots$, $[0,1]$-値 i.i.d.　一様分布

$$J_{1,M}(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f(X_{mN+1}, X_{mN+2}, \ldots, X_{mN+N})$$

$J_{1,M}(f) \to I(f)$ a.s.

近似誤差 $|J_{1,M}(f) - I(f)|$ ：　$M^{-1/2}$ 程度 (中心極限定理)

誤差を 10^{-5} 程度 $\Rightarrow M \geqq 10^{10}$

次元 N の準乱数列：$[0,1]^N$ に値をとる数列 $\{y_n\}_{n \geqq 1}$

この数列 $\{y_n\}_{n \geqq 1}$ を用いて積分 $I(f)$ を

$$J_{2,M}(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f(y_m)$$

で近似する（準モンテカルロ法）

誤差 $|I(f)-J_{2,M}(f)|$ が $M\to\infty$ の時どのような速度で減少するか？

B ： $[0,1]^N$ 上の有界可測関数の空間の部分ベクトル空間で、

バナッハ空間の構造を持つ

$\gamma>0$ を固定

任意の $f\in B$ に対して、$C_f\in(0,\infty)$ が存在して

$$|I(f)-J_{2,M}(f)|\leqq C_f M^{-\gamma}, \qquad M=1,2,\ldots,$$

$\Rightarrow$

$$\sup_M |M^\gamma(I(f)-J_{2,M}(f))|<\infty, \qquad f\in B$$

$\Rightarrow$ (共鳴定理)

$$\sup\{M^\gamma|I(f)-J_{2,M}(f)|;\ f\in B, ||f||_B\leqq 1,\ M\geqq 1\}<\infty$$

（例）B ： $[0,1]^N$ 上リプシッツ連続な関数全体

どのような数列 $\{y_n\}_{n \geqq 1}$ をとっても $\gamma \leqq 1/N$ となる

次元 N に依存 :「次元の呪い」

モンテカルロ法は確率の小さい例外集合が被積分関数 f に依存

誤差 $M^{-1/2}$ は上の意味の厳密さは持っていない

$C^N([0,1]^N)$ 上のノルムとして

$$||f|| = \sum_{n=0}^{N} \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_n \leqq N} \int_{[0,1]^N} |\frac{\partial^n f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_n}}(x)|dx$$

を取り、B_0 をその完備化空間とする

$$\sup\{M(\log(M+1))^{-N}|I(f) - J_{2,M}(f)|;\ f \in B_0, ||f||_{B_0} \leqq 1,\ M \geqq 1\} < \infty$$

となるものが存在　（low-discrepancy 列）

$1_{[0,a_1)\times\cdots\times[0,a_N} \in B_0$, $a_1,\ldots,a_N \in (0,1)$

$N=3$ の時 $f(x)=(x^1+x^2+x^3-1)\vee 0$ は B_0 に属さない

low-discrepancy 列の例　（Halton 列）

素数 $p \geqq 2$ に対して $\varphi_p : \mathbf{Z}_{\geqq 1} \to (0,1)$ を以下で定義

$n \geqq 1$ に対して、$a_m = 0,1,\ldots,p-1$, $n=1,2,\ldots,$ で

$$n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m p^{m-1}$$

となるものが唯一つ存在。その時

$$\varphi_p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m p^{-m}$$

と定義

$N \geqq 1$ に対して $p_1, \ldots, p_N$ は異なる素数とすると

$$y_n = (\varphi_{p_1}(n), \ldots, \varphi_{p_N}(n)), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

は low-discrepancy 列となる

Halton 列は実用上あまり役には立たない

現在使われている low-discrepancy 列は Sobol 列など

ほとんどが代数的手法で構成される

B としてある解析的な関数よりなる空間をとると、

γ はいくらでも大きくなる

指数オーダーでの減少も可能