数理ファイナンスに現れる
数値計算の確率解析手法

第３回　バミューダデリバティブの価格

楠岡成雄

$T > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^N$, $K \geqq 2$, $0 < T_1 < \cdots < T_K = T$

可測関数 $g : [0,T] \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$

バミューダデリバティブの価格

$$c_B = \sup\{E[g(\tau, X(\tau, x_0))];\ \tau \in \mathcal{T}_0^T,\ \tau \in \{T_1, \ldots, T_K\}\ a.s.\}$$

を求める数値計算

$$\bar{v}_K = g(T_K, \cdot)$$

$$\bar{v}_{k-1} = P_{T_k - T_{k-1}}(g(T_k, \cdot) \vee \bar{v}_k), \qquad k = K, K-1, \ldots, 1$$

$$\bar{v}_k(X(T_k, x_0)) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau, x_0))|\mathcal{F}_{T_k}];\ \tau \in \mathcal{T}_{T_k}^T, \tau \in \{T_{k+1}, \ldots, T_K\}\ a.s.\}$$

となる　（$\bar{v}_k$：継続価値としばしば呼ぶ）

$c_B = \bar{v}_0(x_0)$

(最小二乗回帰法)

関数の記憶：「次元の呪い」

$\nu_t,\ t > 0$ ：$X(t, x_0)$ の分布　（$\mathbf{R}^N$ 上の確率測度）

$\mathcal{V}_k$ ：$L^2(d\nu_{T_k})$ の有限次元部分ベクトル空間 $k = 1, \ldots, K-1$

$\mathcal{V}_0 = \mathbf{R}$

アイデア：$\bar{v}_k$ を $\mathcal{V}_k$ の元で近似

方法

(Step 1) $k = 1, 2, \ldots, K-1,$ に対して $\mathcal{V}_k$ をまず決める。

(Step 2) さらに $M \geqq 1$ を定め、疑似乱数によるシミュレーションにより、独立な M 個の $\mathbf{R}^{NK}$-値確率変数 $\{X_m(T_k)\}_{k=1,\ldots,K}$, $m = 1, 2, \ldots, M,$ の標本で、その分布が $\{X(T_k, x_0)\}_{k=1,\ldots,K}$ と一致するようなものを発生

(Step 3) $v_K = g(T_K, \cdot)$ とし、$v_k \in \mathcal{V}_k$, $k = K-1, \ldots, 1, 0$, を以下のように帰納的に定めていく

$$v_{k-1} = \mathrm{arg.min}_{v \in \mathcal{V}_{k-1}} \{ \sum_{m=1}^{M} |v(X_m(T_{k-1})) - (g(T_k, X_m(T_k)) \vee v_k(X_m(T_k))|^2 \}$$

$k = K, K-1, \ldots, 1.$

v_0 を c_B の近似解とする

この方法の根拠

$u \in L^2(\nu_{T_k})$ が与えられた時

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}|v(X_m(T_{k-1})) - (g(T_k, X_m(T_k)) \vee u(X_m(T_k))|^2$$

$$\to E[|v(X(T_{k-1}, x_0)) - (g(T_K X(T_K, x_0)) \vee u(X(T_k, x_0))|^2]\ a.s. \quad \mathrm{v} \in \mathcal{V}_{k-1}$$

さらに

$$E[|v(X(T_{k-1}, x_0)) - (g(T_K X(T_K, x_0)) \vee u(X(T_k, x_0))|^2]$$

$$= E[|v(X(T_{k-1}, x_0)) - E[g(T_K X(T_K, x_0)) \vee u(X(T_k, x_0))|\mathcal{F}_{T_{k-1}}]|^2]$$

$$+E[(g(T_K X(T_K, x_0)) \vee u(X(T_k, x_0)) - E[g(T_K X(T_K, x_0)) \vee u(X(T_k, x_0))|\mathcal{F}_{T_{k-1}}]|^2]$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} |v(x) - P_{T_k - T_{k-1}}(g(T_K, \cdot)) \vee u(\cdot))|^2 d\nu_{T_{k-1}} + \text{ (}v\text{ に依存しない数)}$$

v_{k-1} は $M \to \infty$ の時、確率 1 で $P_{T_k - T_{k-1}}(g(T_K, \cdot)) \vee u(\cdot))$ の $L^2(\nu_{T_{k-1}})$ の中の $\mathcal{V}_{k-1}$ への直交射影に「収束」

$\mathcal{V}_{k-1}$ が十分大きければ $P_{T_k - T_{k-1}}(g(T_K, \cdot)) \vee u(\cdot))$ に近いはず

この方法による近似値はあまり精度が良くないらしい

$\mathcal{V}_k$ を大きく取ることが困難

$\bar{v}_k$ の形がわからない：$\mathcal{V}_k$ のうまい取り方が一般にはわからない

その改良型 が LS 法 (Longstaff-Schwarz による近似法)

(LS 法)

(Step 1) $k = 1, 2, \ldots, K-1$, に対して $\mathcal{V}_k$ をまず決める。

(Step 2) さらに $M \geqq 1$ を定め、疑似乱数によるシミュレーションにより、独立な M 個の $\mathbf{R}^{NK}$-値確率変数 $\{X_m(T_k)\}_{k=1,\ldots,K}$, $m = 1, 2, \ldots, M$, の標本で、その分布が $\{x(T_k, x_0)\}_{k=1,\ldots,K}$ と一致するようなものを発生

(Step 3) $b_{k,m} \in \mathbf{R}$, $m = 1, \ldots, M$, $k = K, K-1, \ldots, 1$, 及び $\mathbf{R}^N$ 上の関数 $v_k \in \mathcal{V}_k$, $k = K-1, \ldots, 1$, を以下のように帰納的に定めていく。

$$b_{K,m} = g(T_K, X_m(T_K)),\ m = 1, 2, \ldots, M.$$

$$v_{k-1} = \mathrm{arg.min}_{v \in \mathcal{V}_{k-1}} \{ \sum_{m=1}^{M} |v(X_m(T_{k-1})) - b_{k,m}|^2 \}$$

$$b_{k-1,m}$$

$$= 1_{[0,\infty)}(g(T_{k-1}, X_m(T_{k-1})) - v_{k-1}(X_m(T_{k-1})))g(T_{k-1}, X_m(T_{k-1}))$$

$$+1_{(-\infty,0)}(g(T_{k-1}, X_m(T_{k-1})) - v_{k-1}(X_m(T_{k-1})))b_{k,m}$$

$$m = 1, \ldots, M,\ k = K, K-1, \ldots, 2$$

$\displaystyle \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} b_{1,m}$ を c_B の近似値とする

アイデア：v_k は $\bar{v}_k$ の近似関数

$b_{k,m}$ は $g(T_\ell,,x) \geqq v_\ell(x)$ の領域に $X(T_\ell, x_0)$, $\ell = k+1,\dots,K,$ が入ったら止めるという戦略のもとでの、見本路が X_m の時の実現値

$u_K = g(T_K, \cdot)$ とおく

$u_\ell \in L^2(\nu_{T_\ell}, \ell = k, k+1, \dots, K-1$ が与えら得た時

$$\sigma_k(y_k, y_{k+1}, \dots, y_K) = \min\{\ell = k, k+1, \dots, K;\ g(T_\ell, y_\ell) \geqq u_\ell(y_\ell)\}$$

$$W_k(y_k, y_{k+1}, \dots, y_K; u_k, \dots, u_{K-1}) = g(T_{\sigma_k(y_k,\dots,y_K)}, y_{\sigma_k(y_k,\dots,y_K)})$$

$$= 1_{[0,\infty)}(g(T_k, y_k) - u_k(y_k)g(T_k, y_k)$$

$$+1_{(-\infty,0)}(g(T_k, y_k) - u_k(y_k))W_{k+1}(y_{k+1}, \dots, y_K; u_{k+1}, \dots, u_{K-1})$$

よって $\qquad b_{k,m} = W_k(X_m(T_k), \cdots, X_m(T_K); v_k, \dots, v_{K-1})$

$M \to \infty$ の時、確率 1 で non-random な $\hat{v}_\ell$, $\ell = k, \ldots, K$ があり
$v_\ell \to \hat{v}_\ell$ が成り立つならば（かなり議論は粗いが)

$$b_{k,m} \to W_k(X_m(T_k), \cdots, X_m(T_K); \hat{v}_k, \ldots, \hat{v}_{K-1})$$

となり

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} |v(X_m(T_{k-1})) - b_{k,m}|^2$$

$$\to E[|v(X(T_{k-1}, x_0) - W_k(X(T_k, x_0), \cdots, X(T_K, x_0); \hat{v}_k, \ldots, \hat{v}_{K-1})|^2]$$

$$= E[|v(X(T_{k-1}, x_0) - E[W_k(X(T_k, x_0), \cdots, X(T_K, x_0); \hat{v}_k, \ldots, \hat{v}_{K-1})|\mathcal{F}_{T_{k-1}}]|^2]$$

$$+ (v \text{ に依存しない数})$$

となる

よって、最小にする v は

$E[W_k(X(T_k, x_0), \cdots, X(T_K, x_0); \hat{v}_k, \ldots, \hat{v}_{K-1})|X(T_{k-1}, x_0) = x]$ の

$L^2(\nu_{T_{k-1}})$ の中の $\mathcal{V}_{k-1}$ への直交射影に「収束」

したがって、$\mathcal{V}_{k-1}$ が大きければ $\bar{v}_{k-1}$ に近い

LS 法が良い理由は、 c_B の近似値として v_k を継続価値として、

再び最適停止問題を解いているので、誤差は

$|v_k - \bar{v}_k|$ の大きさではなく

$\{x \in \mathbf{R}^N; g(T_k, x) < \bar{v}_k(x)\}$ と $\{x \in \mathbf{R}^N; g(T_k, x) < v_k(x)\}$ の違い

に依存するからのようである

最小二乗回帰法、L-S 法の数学的欠点

$M \to \infty$ としただけでは真の値 c_B には収束しない

本当は $\mathcal{V}_k$ も M に依存させて $\mathcal{V}_k^{(M)}$ として考える必要がある

$\mathcal{V}_k^{(M)}$ の取り方と真の値にどの程度のスピードで収束するか
の関係が問題
（時間があれば少し解説）

金融機関で用いられている方法は LS 法
$\mathcal{V}_k$ をどのように取るかは企業秘密

(stochastic mesh 法)

stochastic mesh 法では遷移確率密度関数 $p(t,x,y)$, $t>0$, $x,y\in E$, が計算可能であることを仮定する　($E\subset\mathbf{R}^N$)

$m(E)$ は E 上のボレル可測な関数の作る空間とする。

(Step 1) $M \geqq 1$ を定め、疑似乱数によるシミュレーションにより、独立な M 個の $\mathbf{R}^{NK}$-値確率変数 $\{X_m(T_k)\}_{k=1,\ldots,K}$, $m=1,2,\ldots,M$, の標本で、その分布が $\{x(T_k,x_0)\}_{k=1,\ldots,K}$ と一致するようなものを発生

(Step 2) $m(E)$ 上の線形作用素 $Q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}$, $k=1,\ldots,K$, を以下で定義

$$(Q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}f)(x)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{p(T_k-T_{k-1},x,X_m(T_k))f(X_m(T_k))}{q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}(X_m(T_k))},$$

$x\in E, f\in m(E)$

ただし、

$$q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}(y)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}p(T_k-T_{k-1},X_m(T_{k-1}),y),\qquad y\in E$$

$\tilde{v}^{(M)}_{T_k,T_{k+1},\ldots,T_K}$, $k = K, K-1, \ldots, 0$, を帰納的に以下で定める

$\tilde{v}^{(M)}_{T_K}(x) = g(T_K, x)$, $x \in E$,

$$\tilde{v}^{(L)}_{T_k,T_{k+1},\ldots,T_K}(x)$$

$$= Q^{(M)}_{T_k,T_{k+1}}(g(T_{k+1},\cdot) \vee \tilde{v}^{(L)}_{T_{k+1},\ldots,T_K}(\cdot))(x) \qquad x \in E,\ k = K-1, \ldots, 0$$

$\tilde{v}^{(M)}_{T_0,\ldots,T_K}$ を c_B の近似値とする

$\tilde{v}^{(M)}_{T_0,\ldots,T_K}$ の計算には $p(T_k - T_{k-1}, X_r(T_{k-1}), X_m(T_k))$, $g(X_m(T_k))$,
$k = 0, 1, \ldots, K$, $r, m = 1, \ldots, M$, の値のみが用いられる

線形作用素 $Q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}$ は非負値関数を非負値関数に移すが

マルコフ作用素ではない

$M \to \infty$ の時、大数の法則により、

$$q^{(M)}_{T_{k-1},T_k}(y) \to \int_E p(T_k - T_{k-1}, x, y)\nu_{T_{k-1}}(dx)$$

$$= p(T_k, x_0, y) = \frac{\nu_{T_k}(dy)}{dy} \qquad y \in E$$

$$(Q^{(M)}_{T_{k-1},T_k} f)(x) \to \int_E \left(\frac{p(T_k - T_{k-1}, x, y)f(y)}{d\nu_{T_k}(dy)/dy}\right)\nu_{T_k}(dy)$$

$$= \int_E p(T_k - T_{k-1}, x, y)f(y)dy = (P_{T_k - T_{k-1}} f)(x)$$

となるので $\tilde{v}^{(M)}_{T_0,\ldots,T_K} \to c_B$ となる

今述べた説明は $p(t,x,y)$ に対する評価があれば数学的に正当化でき、また、LS 法とは違い、近似する関数空間をどう取るかという問題がない

しかし、一般には推移確率密度 $p(t,x,y)$ の形がわかっていないと使えないので適用できるモデルの範囲がかなり小さいという難点がある。

Stochastic Meshing 法をアメリカンデリバティブに適用する場合、$K_M \geqq 1$ を大きく取り、$T_k^{(M)} = k\tilde{T}/K_M$, $k = 0,1,2,\ldots,K_M$, として、$\tilde{v}^{(M)}_{T_0^{(M)},\ldots,T_{K_M}^{(M)}}$ を近似値とすることが考えられる

K_M と M がどのような関係を満たせばよいかが問題となる

実はこれは $p(t,x,y)$ の t が小さい時の評価に依存し、

ある意味で「次元の呪い」が現れる

Stochastic Meshing 法は特殊な状況では有効と思うが

金融機関では使われていないようである

(Rogers の方法)

$U : [0,T] \times \Omega \to \mathbf{R}$ を以下で定義

$$U(t) = \sup\{E[g(\tau, X(\tau x_0))|\mathcal{F}_t];\ \tau \in \mathcal{T}_t^T,\ \tau \in \{T_1, \ldots, T_K\}\ a.s.\}$$

$U(t)$ は優マルチンゲール

マルチンゲール M 及び 非減少過程 A が存在して $A(0) = 0$,

$$U(t) = M(t) - A(t), \qquad t \in [0, \tilde{T}]$$

$$g(T_k, X(T_k, x_0)) \leqq U(T_k) \leqq M(T_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

$$c_B = U(0) = M(0)$$

$$\geqq M(0) + E[\max_{k=1,\ldots,K}\{g(T_k, X(T_k, x_0)) - M(T_k)\}]$$

が成立

一方、N を任意のマルチンゲールとし、

$$\tilde{N}(t) = N(t) + E[\max_{k=1,\ldots,K}\{g(T_k, X(T_k, x_0)) - N(T_k)\}|\mathcal{F}_t] \qquad t \in [0, \infty)$$

とおくと

$$g(T_k, X(T_k, x_0)) \leqq \tilde{N}(T_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

であるので、$\tau \in \mathcal{T}_0^T$ が $\tau \in \{T_1, \ldots, T_K\}$ $a.s.$ を満たせば

$$\tilde{N}(0) = E[\tilde{N}(\tau)] \geqq E[g(\tau, X(\tau, x_0))]$$

より $c_B \leqq \tilde{N}(0)$ がわかる

よって、以下の結果を得る

定理 1（Rogers）

$$c_B = \inf\{E[N(0) + \max_{k=1,\ldots,K}\{g(T_k, X(T_k, x_0)) - N(T_k)\}]; \quad N \text{ はマルチンゲール }\}$$

$$c_A = \inf\{E[N(0) + \sup_{t\in[0,\tilde{T}]}\{g(t, X(t, x_0)) - N(t)\}]; \quad N \text{ はマルチンゲール }\}$$

Rogers の数値計算のアイデアは以下のようなものである。

(i) inf に近いうまいマルチンゲール N を見つけて

(ii) さらに $M \geqq 1$ を定め、疑似乱数によるシミュレーションにより、独立な M 個の $\mathbf{R}^{2NK}$-値確率変数 $\{(X_m(T_k), N_m(T_k))\}_{k=1,\ldots,K}$, $m = 1, 2, \ldots, M$, の標本で、その分布が $\{(x(T_k, x_0), N(T_k))\}_{k=1,\ldots,K}$ と一致するようなものを発生

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(N_m(0) + \max_{k=1,\ldots,K}\{g(T_k, X_m(T_k)) - N_m(T_k)\})$$ を c_B の近似値とする

LS 法は c_B の下限を与える

Rogers の方法は上限を与える

両方をうまく使えば、近似値の誤差を評価できるかも

ブラックショールズモデルのアメリカンコールオプションの場合（ $g(t,x) = \max\{e^{-rt}x, K\}$ ）の場合に

$$N(t) = E[g(\tilde{T}, X(\tilde{T}, x_0))|\mathcal{F}_t], \qquad t \in [0, \infty)$$

と取るとうまくいった Rogers は論文で数値と共に述べている

Rogers の方法の欠点：マルチンゲール N をどう取るか

あまり研究もされていない

バミューダデリバティブの価格決定の問題

(1) どの方法も数学的には十分詰められていない

(2) 確率過程のシミュレーションが正確に行えることが前提

多くの場合、Euler-丸山近似によるシミュレーションが行われている

モンテカルロシミュレーションが本当に必要か？

準モンテカルロではだめか？

確率過程の近似の影響はどのようなものか？

半線形偏微分方程式にこれらの方法が応用できるか？

CVA の計算には、これまでのアイデアで使えるものがある

K.-Morimoto [24]

$$\lambda_0(V,\nu) = \sup\{\frac{\int_E g(x)^4 \nu(dx)}{(\int_E g(x)^2 \nu(dx))^2};\ g \in V \setminus \{0\}\}$$

定理 2　$\mathcal{V}_k^{(M)} \in L^4(E, d\nu_{T_k}),\ k = 1, \ldots, K-1,\ M \geqq 1,$ が各 $k = 1, \ldots, K-1$ に対して、以下を満たすとする。

(i) $\mathcal{V}_k^{(M)}$ は M について単調増大　かつ $\bigcup_{M=1}^{\infty} \mathcal{V}_k^{(M)}$ は $L^2(E; d\nu_{T_k})$ の中で稠密

(ii)

$$\frac{1}{M} \dim(\mathcal{V}_k^{(M)})^2 \lambda_0(\mathcal{V}_k^{(M)}, \nu_{T_k}) \to 0,\ M \to \infty$$

この時、$v_0^{(M)} \to c_B,\ M \to \infty,$ （確率収束）