数理ファイナンスに現れる
数値計算の確率解析手法

第４回　拡散過程の期待値

楠岡成雄

数値計算：うまくいけば、何故うまくいったかを問わないことが多い

数値解析：数値計算の原理

数値計算の確率解析的手法

確率過程のシミュレーションが重要

◇ 拡散過程の近似　　従来は　オイラー・丸山法で近似

◇ ランダムシミュレーションは必要か？

どういう条件を満たせば　よいシミュレーションか？

基本：拡散過程の期待値

オイラー・丸山法より良い方法は？

最初に思いつくのは　確率テーラー展開法

$E[f(X(T,x_0))]$, $T>0$, $x_0\in\mathbf{R}^N$, の近似計算

伊藤の公式

$$g(X(t,x)) = g(X(0,x)) + \sum_{i=0}^{d}\int_0^t (V_i g)(X(s,x))\circ dB^i(s) \qquad g\in C^\infty(\mathbf{R}^N)$$

これを繰り返す：確率的テイラー展開

$$g(X(t,x))$$

$$= g(x) + \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{i_1,\dots,i_\ell=0}^{d}(V_{i_1}\cdots V_{i_\ell})g(x)$$

$$\times\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{\ell-1}}\circ dB_{i_1}(s_1)\cdots\circ dB_{i_\ell}(s_\ell)) + R_m(t,x)$$

確率テーラー展開 $H(x)=x$

$$X_h^{(m)}(kh,x)$$

$$= X_h^{(m)}((k-1)h,x) + \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_\ell=0}^{d} (V_{i_1}\cdots V_{i_\ell}H)(X_n^{(m)}((k-1)h,x))$$

$$\times \int_{k-1h}^{kh}\int_{k-1h}^{s_1}\cdots\int_{k-1h}^{s_{\ell-1}} \circ dB_{i_1}(s_1)\cdots \circ dB_{i_\ell}(s_\ell))$$

$E[f(X_{T/n}(T/n,x_0))]$ を $E[f(X(T,x_0))]$ の近似値とする

確率テイラー展開法の問題点

(1) ブラウン運動の逐次積分の結合分布は一般には分かっていない

(2) f が滑らかでない場合はあまりテーラー展開による近似は有効ではない。

改良できないか？

(1) 逐次積分の結合分布が情報として真に必要なのか。

(2) f が滑らかでなければ本当にテイラー展開が有効にならないのか。

(2) $\Leftarrow$ マリアバン解析の応用

(1) $\Leftarrow$ 確率解析の結果＋リー代数

伊藤の公式、　マリアバン解析：ベクトル場の作るリー環

その代数的構造を理解する道具：リー代数

◇ KLNV 法（楠岡-Lyons-二宮-Victoir ）

cubature 法

Gaussian K-scheme

(リー代数)

$A = A_d = \{v_0, v_1, \cdots, v_d\}$: alphabet (文字) の集合

alphabet を有限個並べたもの $v_{i_1} \cdots, v_{i_k}$: word（語）

空語： 1

A^* ：1 を含む word 全体の集合

積 uw, $u, w \in A^*$, u と w の alphabet をこの順に並べた word

注意：$1v = v = v1$

$|w|$: word $w \in A^*$ の長さ $|1| = 0$, $|v_{i_1} \cdots v_{i_k}| = k$

$$||w|| = |w| + (w \text{ の含む } v_0 \text{ の個数})$$

$$||1|| = 0,\ ||v_1|| = 1,\ ||v_0|| = 2$$
$$||uw|| = ||u|| + ||w||,\ u, w \in A^*$$

$$\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle = \{\sum_{w\in A^*} a_w w; a_w \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^{A^*}$$

$\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$: $\mathbf{R}$ を基礎体とする単位元を持つ非可換多元環

$\xi = \sum_{w\in A^*} a_w w,\ \ \eta = \sum_{w\in A^*} b_w w\ \ \in \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle\ \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$\alpha\xi + \beta\eta := \sum_{w\in A^*} (\alpha a_w + \beta b_w) w$$

$$\xi\eta = \sum_{w\in A^*} (\sum_{u,\tilde{u}\in A^*; u\tilde{u}=w} a_u b_{\tilde{u}}) w$$

(内側の和は有限和なので well defined)

$A^* \subset \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ と見なせる

$$u = \sum_{w\in A^*} \delta_{w,u} w \qquad u \in A^*$$

$1 \in \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ は単位元

$\xi = \sum_{w\in A^*} a_w w$ および $u \in A^*$ に対して $\langle \xi, u\rangle = a_u$ と定義

(notation)

$$A^*_{\leqq m} = \{u \in A^*;\ ||u|| \leqq m\}, \qquad m \geqq 0$$

$j_{\leqq m} : \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle \to \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$, $m \geqq 0$

$$j_{\leqq m}(\xi) = \sum_{w\in A^*_{\leqq m}} \langle \xi, w\rangle w,$$

$$\mathbf{R}\langle A\rangle = \bigcup_{m=0}^{\infty} j_{\leqq m}(\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle)$$

（リー積）

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi, \qquad \xi, \eta \in \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$$

$r:\ A^* \to \mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ を帰納的に定義

$$r(1)=0,\qquad r(v_i)=v_i,\qquad i=0,1,\ldots,d,$$

$$r(v_iu)=[v_i,r(u)],\qquad i=0,1,\ldots,d,\ u\in A^*\setminus\{1\}$$

$\mathcal{L}(A)_{\leqq m}=\{r(u);\ u\in A^*_{\leqq m}\}$ の張る部分ベクトル空間　　$m\geqq 0$

$$\mathcal{L}((A))=\{w\in\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle;\ j_{\leqq m}(w)\in\mathcal{L}(A)_{\leqq m},\ m\geqq 0\}$$

$A^{**}=A^*\setminus\{1,v_0\}$

$A^{**}_{\leqq m}=\{u\in A^{**};\ \| u \|\leqq m\},\ m\geqq 1$

(拡散半群の諸性質)

$V_0, V_1, \ldots, V_d \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$

確率微分方程式

$$X(t,x) = x + \sum_{k=0}^{d} \int_0^d V_k(X(s,x)) \circ dB^k(s), \qquad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}^N$$

$\mathcal{DO}(\mathbf{R}^N)$: $\mathbf{R}^N$ 上のなめらかな係数を持つ線形微分作用素全体

$V_0, V_1, \ldots, V_d \in \mathcal{DO}(\mathbf{R}^N)$

準同型写像 $\Phi : \mathbf{R}\langle A\rangle \to \mathcal{DO}(\mathbf{R}^N)$ を以下で定義

$$\Phi(1) = Identity, \qquad \Phi(v_{k_1} \cdots v_{k_n}) = V_{k_1} \cdots V_{k_n}$$

$$n \geqq 1,\ k_1, \ldots, k_n = 0, 1, \ldots, d$$

$$\Phi(r(v_k u)) = [V_k, \Phi(r(u))], \qquad i = 0, 1, \ldots, d,\ u \in A^* \setminus \{1\}.$$

よって $\Phi(r(u))$, $u \in A^*$, $\Phi(\xi)$, $\xi \in \mathcal{L}(A)_{\leqq m}$, $m \geqq 1$, はベクトル場

(Malliavin 解析による結果)

定理 1 $x_0 \in \mathbf{R}^N$ とする。$\ell_0 \geqq 1$, 及び $c > 0$ が存在し、

$$\sum_{u \in A^{**}_{\leqq \ell_0}} (\Phi(r(u))(x_0), \xi)^2_{\mathbf{R}^N} \geqq c|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbf{R}^N$$

が成り立つならば、$X(t, x_0)$, $t > 0$, の分布は絶対連続であり、滑らかな密度関数を持つ。

ベクトル場の族 $\{V_0, V_1, \ldots, V_d\}$ に対する条件

(UH) $\ell_0 \geqq 1$, 及び $c > 0$ が存在し、

$$\sum_{u \in A^{**}_{\leqq \ell_0}} (\Phi(r(u))(x), \xi)^2_{\mathbf{R}^N} \geqq c|\xi|^2, \qquad x, \xi \in \mathbf{R}^N$$

が成り立つ

(UFG) $\ell_0 \geqq 1$ および $\varphi_{u,u'} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$, $u \in A^{**}_{\leqq \ell_0+2}$, $u' \in A^{**}_{\leqq \ell_0}$, が存在して以下が成立する。

$$\Phi(r(u)) = \sum_{u' \in A^{**}_{\leqq \ell_0}} \varphi_{u,u'} \Phi(r(u')), \qquad u \in A^{**}_{\leqq \ell_0+2}.$$

命題 2　$\{V_i; i = 0, 1, \ldots, d\}$ が (UH) を満たすならば (UFG) が満たされる。

定理 3 (UFG) 条件が成立すると仮定する。この時、$u_1, \ldots, u_{n+m} \in A^{**}$, $n, m \geq 1$, に対して、定数 $C >$ が存在して

$$||\Phi(r(u_1))\cdots\Phi(r(u_n)))P_t\Phi(r(u_{n+1}))\cdots\Phi(r(u_{n+m})))f||_\infty$$
$$\leqq Ct^{-(||u_1||+\cdots+||u_{n+m}||)/2} \parallel f \parallel_\infty \qquad t \in (0,1],\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

が成立する。

$A = (A^{ij})_{i,j=1,\ldots,N} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N \otimes \mathbf{R}^N)$ を以下で定義

$$A^{ij}(x) = \sum_{u \in A^{**}_{\leqq \ell_0}} \Phi(r(u))^i(x)\Phi(r(u))^j(x) \qquad i, j = 1, \ldots, N.$$

$h(x) = \det A(x)$, $x \in \mathbf{R}^N$,

$E = \{x \in \mathbf{R}^N;\ h(x) > 0\}$ と定めると

命題 4 （UFG) 条件が成立すると仮定する。この時、以下が成立する。

(1) $x \in E$ であれば $P(X(t,x) \in E) = 1,\ t > 0,$ であり、$X(t,x)$ の分布は絶対連続で滑らかな密度関数 $p(t,x,y)$ を持つ。

(2) 任意の $T > 0$ に対して $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$p(t,x,y) \leqq Ct^{-(N+1)\ell_0/2} h(x)^{-2(N+1)\ell_0} \exp(-\frac{2\delta_0}{t}|y-x|^2),$$

$$p(t,x,y) \leqq Ct^{-(N+1)\ell_0/2} h(y)^{-2(N+1)\ell_0} \exp(-\frac{2\delta_0}{t}|y-x|^2),$$

$$t \in (0,T],\ x,y \in E.$$

(2) 任意の $T > 0,\ p \in (1,\infty)$ に対して $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$\int_E p(t,x,y)h(y)^{-p}dy \leqq Ch(x)^{-p}, \qquad x \in E,\ t \in (0,T].$$

(cubature 法)

$Q_{(s)}$, $s > 0$, $\mathbf{R}^N$ 上のマルコフ作用素

$C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ 上の作用素でもあると仮定する

$T > 0$ 与えられたもの

$\gamma \geqq 1$ に対して

$$t_i^{(n)} = (\frac{i}{n})^\gamma T, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$s_i^{(n)} = t_i^{(n)} - t_{i-1}^n, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{k=1}^n s_i^{(n)} = T \text{ を満たす}$$

$$P_T f(x) - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f)(x)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} (Q_{(s_n^{(n)})} \cdots Q_{(s_{\ell+1}^{(n)})} (P_{s_\ell^{(n)}} - Q_{(s_\ell^{(n)})}) P_{t_{\ell-1}^{(n)}} f)(x)$$

$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$, $x \in \mathbf{R}^N$

$Q_{(s)}$ はマルコフ作用素なので

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty$$

$$\leqq \sum_{\ell=0}^{n} ||(P_{s_\ell^{(n)}} - Q_{(s_\ell^{(n)})}) P_{t_{\ell-1}^{(n)}} f||_\infty$$

$m \geqq 2$ とする

（仮定）$r \geqq 2m$, 及び $C_0 \in (0,\infty)$ が存在し、

すべての $s \in (0,1]$, $f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ に対して

$$||(P_s - Q_{(s)})f||_\infty$$

$$\leqq C_0 \sum_{i=1}^{r} \sum_{u_1,\ldots,u_i \in A^{**}, m+1 \leqq ||u_1||+\cdots+||u_i|| \leqq r} s^{(||u_1||+\cdots+||u_i||)/2}$$

$$\times ||\Phi(r(u_1)) \cdots \Phi(r(u_i))f||_\infty$$

が成立する

（仮定）が成立すると、(UFG) 条件の下で $C_1 \in (0,\infty)$ が存在して

$$||(P_s - Q_{(s)})P_t f||_\infty$$

$$\leqq C_1 \sum_{i=1}^{r} \sum_{u_1,\ldots,u_i \in A^{**}, m+1 \leqq ||u_1||+\cdots+||u_i|| \leqq r} s^{(||u_1||+\cdots+||u_i||)/2}$$

$$\times t^{-(||u_1||+\cdots+||u_{i-1}||)/2} ||\nabla f||_\infty$$

$$s,t \in (0,1],\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

よって $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty$$

$$\leqq C((\frac{1}{n^\gamma})^{1/2} ||\nabla f||_\infty + \sum_{\ell=1}^{n} (\frac{\ell^{\gamma-1}}{n^\gamma})^{(m+1)/2} ||\nabla f||_\infty) \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

次の結果を得る。

(1) $\gamma < (m-1)/2$ ならば $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty \leqq C(\frac{1}{n})^{\gamma/2} ||\nabla f||_\infty, \quad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

(2) $\gamma = m-1$ ならば $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty \leqq C(\frac{1}{n})^{(m-1)/2} (\log n) ||\nabla f||_\infty$$

$$n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

(3) $\gamma > m-1$ ならば $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q_{(s_n^{(n)})} Q_{(s_{n-1}^{(n)})} \cdots Q_{(s_1^{(n)})} f||_\infty \leqq C(\frac{1}{n})^{(m-1)/2} ||\nabla f||_\infty$$

$$n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

(仮定) を満たす $Q_{(s)}$ の見つけ方

$\mathbf{R}^N$ 上のベクトル場 $W \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ に対して常微分方程式

$$\frac{d}{dt} y(t,x) = W(y(t,x)),$$

$$y(0,x) = x$$

$y(1,x)$ を $\exp(W)(x)$ と表す

$C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ 上の線形作用素 $\mathrm{Exp}(W)$ を以下で定義

$$(\mathrm{Exp}(W)f)(x) = f(\exp(W)(x)) \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\mathrm{Exp}(tW) = W^n \mathrm{Exp}(tW) = \mathrm{Exp}(tW)W^n, \qquad n \geqq 1$$

形式的にはテーラー展開により

$$\mathrm{Exp}(tW) = Identity + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} W^n = \exp(tW)$$

Lie 代数

$\xi \in \mathbf{R}\langle\langle A \rangle\rangle$ が $\langle \xi, 1 \rangle = 0$ を満たすならば

$$\exp(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!}$$

は定義可能

$\xi \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}(A)_{\leqq m}$ に対して $\Psi(\xi)$ はベクトル場

形式的には、テーラー展開の収束のことを無視すれば

$$\mathrm{Exp}(t\Phi(\xi)) = \Phi(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Phi(\xi^n) = \text{''}\Phi(\exp(t\xi))\text{''}$$

拡散作用素 P_t についても

$$\frac{d^n}{dt^n}P_t = P_t L^n = P_t((\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} V_k^2 + V_0)^2)$$

であるので、形式的には、

$$P_t = \Phi(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Phi((\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} v_k^2 + v_0)^n) = \text{''}\Phi(\exp(t(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} v_k^2 + v_0)))\text{''}$$

これらは $t \downarrow 0$ の時の漸近展開に関する情報を与える

$\mathbf{R}\langle\langle A\rangle\rangle$ 上の線形作用素 Ψ_s, $s>0$, を以下で定義

$$\Psi_s(\sum_{u\in A^*} a_u u) = \sum_{u\in A^*} s^{||u||/2} a_u u$$

$\mathbf{R}\langle A\rangle$ 上のノルム $||\cdot||$

$$||\xi|| = (\sum_{u\in A^*} \langle \xi, u\rangle^2)^{1/2}$$

定理 5　$m \geqq 2$ とする。$Z_1, Z_2, \cdots, Z_M$ は $\mathcal{L}(A)_{\leqq m}$-値確率変数で以下の条件を満たすとする。

(i) 任意の $p \in (1,\infty)$ に対して

$$E[||Z_k||^p] < \infty, \qquad k = 1, \dots, M.$$

(ii) $\sum_{k=1}^M \langle Z_k, v_0\rangle = 1.$

(iii) $E[j_{\leqq m}(\exp(Z_1)\exp(Z_2)\cdots\exp(Z_M))] = j_{\leqq m}(\exp(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d v_k^2 + v_0))$

この時、$Q_{(s)}$, $s > 0$, を

$$(Q_{(s)}f)(x) = E[(\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_1))\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_2))\cdots\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_M))f)(x)],$$

$$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

で定義すれば、$Q_{(s)}$ は (仮定) の評価式を満たす

Lyons らは Z_k として有限値の確率変数を選び、期待値を有限和で計算することを考えている

$m=5$ の場合の例　二宮-二宮の例

$W_{i,j}$ $i=1,\ldots,d$, $j=1,2$, ガウス型確率変数

$$E[W_{i,j}]=0, \quad E[W_{i,j}Z_{i',j'}]=\delta_{ii'}R_{j,j'} \qquad i,i'=1,\ldots,d,\ j,j'=1,2$$

$$R_{1,1}=\frac{1}{2}, \qquad R_{2,2}=\frac{3}{2}, \qquad R_{1,2}=-\frac{1}{2}$$

$$Z_1=v_0+\sum_{i=1}^{d}Z_{i,2}v_i, \qquad Z_2=\sum_{i=1}^{d}Z_{i,1}v_i$$

とおくと、定理の条件を満たす（ただし、$M=2$)

二宮-二宮の場合、Z_1, Z_2 共に $v_1, i = 0, 1, \ldots, d,$ の一次結合であるので、$\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_i)))$ は計算がしやすい。

また期待値はガウス積分なので、準乱数計算等が可能となる。

ガウス積分に基づく KLNV 法については計算のしやすい方法という観点から多くの研究がある

なお、$m = 7, 9$ となる具体的な例も最近、篠崎裕司氏により発見された

篠崎の例では、$M = 1$ であるが、Z_1 はかなり複雑なリー環を含んでおり、$\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(Z_1)))$ の計算には $\Phi(\Psi_s(Z_1)))$ の部分を手作業で求める必要がある

これをさけるためには、ルンゲ・クッタ法のアイデアが手がかりとなるが、次のような問題を解く必要がある

$\xi \in \mathcal{L}(A)_{\leqq m}$ に対して $(\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_s(\xi)))f)(x)$ を s についてテーラー展開を行うと

$s^{n/2}$ の項は $(V_{i_1}\cdots V_{i_r}f)(x)$, $i_1,\ldots,i_r = 0,1,\ldots,d$, $||v_{i_1}\cdots v_{i_r}|| = n$, の線形和となる。$(V_{i_1}\cdots V_{i_r}H)(x)$ はグラフ（ただし点に番号がつく）で表せる (図 2)。

ここで　$H(x) = x$

いま、 常微分方程式の時と同様に、$(h,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N)$ の滑らかな関数の空間 $C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$ の部分ベクトル空間 $\mathcal{W}_n$, $n \geqq 0$, を以下のように定義する。

$$\mathcal{W}_0 = \{0\},$$

$$\mathcal{W}_{n+1}$$

$$= \text{linear .hull of } (\{hV_i(x{+}W(h,x));\ W \in \mathcal{W}_n, i = 1,\ldots,d\}$$

$$\cup\{h^2 V_0(x + W(h,x));\ W \in \mathcal{W}_n\}),$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$W \in \mathcal{W}_n$ の同値類はグラフの一次結合で表される

$r \geqq 1$ に対して $C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N; \mathbf{R}^N)$ 上の同値関係 $\sim_r$ は前に述べたもの

$W \in \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{W}_n$ で $(\mathrm{Exp}(\Phi(\Psi_{h^2}(\xi)))H)(x) \sim_{2m} x + W(h,x)$

となるものが見つかれば、篠崎氏の方法を実装化することが可能