数理ファイナンスに現れる
数値計算の確率解析手法

第 5 回　Greeks, Gaussian K-scheme

楠岡成雄

(Euler-丸山近似再論)

(UH) の場合の Euler-丸山近似に関しての定理

$X_h(t,x)$, $h>0$, $t\in[0,\infty)$, $x\in\mathbf{R}^N$, オイラー丸山近似とする

$$X_h(0,x)=x, \qquad x\in\mathbf{R}^N,$$

$$X_h(t,x)$$

$$=X_h((n-1)h,x)+\sum_{k=1}^{d}V_k(X_h((n-1)h,x)(B^k(t)-B^k((n-1)h))$$

$$+b(X_h((n-1)h,x)(t-(n-1)h),$$

$t\in((n-1)h,nh],\ n=1,2,\ldots,\ x\in\mathbf{R}^N$

定理 1　ベクトル場 $\{V_0, V_1, \ldots, V_N\}$ が (UH) を満たすならば、任意の $T > 0$ に対して $C \in (0, \infty)$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |E[f(X(T,x))] - E[X_{T/n}(T,x))]| \leqq \frac{C}{n} ||f||_\infty$$

$n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ が成立する。

証明のアイデア

線形作用素 $Q_{(t)}^{(h)}$, $h > 0$, $t \geqq 0$, を以下で定義

$$(Q_{(t)}^{(h)} f)(x) = E[f(X_h(t,x))], \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

(UH) 条件が成立すると仮定

Malliavin covariance $M^{ij}(t,x) = (DX^i(t,x), DX^j(t,x))$,

$i,j = 1,\ldots,N$, $t \geqq 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, に対して

$$\sup_{t\in[T_1,T_2],x\in\mathbf{R}^N} E[\det(M^{ij}(t,x))^{-p}] < \infty, \qquad p \in (1,\infty)$$

が成立

これから、$X(t,x)$ の分布の滑らかさが示される

$M_h^{ij}(t,x) = (DX_h^i(t,x), DX_h^j(t,x))$,

$i,j = 1,\ldots,N$, $h > 0$, $t \geqq 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, とおく

任意の多重指標 $\alpha \in \mathbf{Z}^N_{\geqq 0}$, $T > 0$ 及び $p \in (1,\infty)$ に対して

$$h^{-1/4} \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbf{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} E[|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} M^{ij}(t,x) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} M_h^{ij}(t,x)|^p]^{1/p} \to 0,\ h \downarrow 0$$

$\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi \geqq 0$, $\varphi(z) = 1$, $z > 2/3$, かつ $\varphi(z) = 0$, $z < 1/3$,

となるものを取る

$C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$, 上の線形作用素 $Q_{(t)}^{(h),0}$, $Q_{(t)}^{(h),1}$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, を

下記で定義

$$(Q_{(t)}^{(h),0} f)(x) = E[\varphi((\det(M^{ij}(t,x)))^{-1}\det(M_h^{ij}(t,x)))f(X_h(t,x))]$$

$$(Q_{(t)}^{(h),1} f)(x) = (Q_{(t)}^{(h)} f)(x) - (Q_{(t)}^{(h),0} f)(x)$$

$$= E[(1-\varphi((\det(M^{ij}(t,x)))^{-1}\det(M_h^{ij}(t,x))))f(X_h(t,x))]$$

命題 2 (UH) 条件が成立すると仮定する。任意の $T_2 > T_1 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^N_{\geqq 0}$, 及び $\gamma > 0$ に対して $C > 0$ が存在し、以下の条件を満たす。

(i) すべての $t \in [T_1, T_2]$, $h \in (0,1)$, $f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ に対して

$$||\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(Q_{(t)}^{(h),0}\frac{\partial^{|\beta|}f}{\partial x^\beta})||_\infty \leqq C||f||_\infty,$$

が成立する。

(ii) すべての $t \in [T_1, T_2]$, $h \in (0,1)$, $f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ に対して

$$||Q_{(t)}^{(h),1}f||_\infty \leq Ch^\gamma||f||_\infty$$

が成立する。

伊藤の公式より $t \in (0,h]$ に対して

$$f(X_h(t,x))$$

$$= f(x) + \int_0^t \nabla f(X_h(r.x))dX_h(r,x)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_h(r,x))V_k^i(x)V_k^j(x)dr$$

$$E[f(X_h(t,x))]$$

$$= f(x) + \int_0^t dr(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} V_k^i(x)V_k^j(x))E[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_h(r,x))]$$

$$+\sum_{i=1}^{d} b^i(x)E[\frac{\partial f}{\partial x^i}(X_h(r,x))])$$

$$E[f(X_h(t,x))]$$

$$= f(x)+t(Lf)(x)+\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_{\geqq 0},|\alpha|\leqq 4} a_\alpha(x)\int_0^t dr_1\int_0^{r_1} E[\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(X_h(r_2,x))]dr_2$$

$$E[f(X(h,x))] = f(x) + hLf(x) + \int_0^h dr_1 \int_0^{r_1} E[(L^2 f)(X(r_2,x))]dr_2$$

$$((P_h - Q_{(h)}^{(h)})f)(x) = E[f(X(h,x))] - E[f(X_h(h,x))]$$

$$= \int_0^h dr_1 \int_0^{r_1} E[(L^2 f)(X(r_2,x))]dr_2$$

$$- \sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_{\geqq 0},|\alpha|\leqq 4} a_\alpha(x)\int_0^h dr_1\int_0^{r_1} E[\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(X_h(r_2,x))]dr_2$$

$$E[f(X(T,x))] - E[f(X_{T/n}(T,x))] = P_T f(x) - (Q^{(T/n)}_{(T)} f)(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (Q^{(T/n)}_{(Tk/n)} (P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)}) P_{T(n-k-1)/n} f)(x)$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |E[f(X(T,x))] - E[f(X_{T/n}(T,x))]|$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{[n/2]} ||Q^{(T/n)}_{(Tk/n)} (P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)}) P_{T(n-k-1)/n} f||_\infty$$

$$+ \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} ||Q^{(T/n)}_{(Tk/n)} (P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)}) P_{T(n-k-1)/n} f||_\infty$$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^N} |E[f(X(T,x))] - E[f(X_{T/n}(T,x))]|$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{[n/2]} ||(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)/n}f||_\infty$$

$$+ \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} ||Q^{(T/n),0}_{(Tk/n)}(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)/n}f||_\infty$$

$$+ \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} ||Q^{(T/n),1}_{(Tk/n)}(P_{T/n} - Q^{(T/n)}_{(T/n)})P_{T(n-k-1)/n}f||_\infty$$

$C \in (0, \infty)$ が存在して

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |E[f(X(T/n, x))] - E[f(X_{T/n}(T, x))]|$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{C}{n^2} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}, |\alpha| \leqq 4} || \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} P_{T(n-k-1)/n} f ||_\infty$$

$$+ \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} \frac{C}{n^2} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}, |\alpha| \leqq 4} || Q_{(Tk/n)}^{(T/n),0} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} ||_{L^\infty \to L^\infty} ||f||_\infty$$

$$+ \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} \frac{C}{n^3} ||f||_\infty$$

$$\leqq \tilde{C} \frac{1}{n} ||f||_\infty$$

(Greeks)

金融機関では、例えば $b \in \mathbf{R}^N$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial t} E[f(X(T, x_0 + tb))]|_{t=0}$$

を計算する時

$$\frac{1}{\varepsilon}(E[f(X_{T/n}(T, x_0 + \varepsilon b))] - E[f(X_{T/n}(T, x_0))])$$

$(n \geqq 1$ 十分大、$\varepsilon > 0$ 十分小$)$ を近似値とすることが多い

数値計算でやってはいけないことの 1 つ（小さい数で割ること）

ところが以下の議論で正当化できる。

$$
\begin{aligned}
&|\frac{1}{\varepsilon}(E[f(X(T,x_0+\varepsilon b))]-E[f(X(T,x_0))]) \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{\partial}{\partial t}E[f(X(T,x_0+tb))]|_{t=0}| \\
&= \frac{1}{\varepsilon}|\int_0^\varepsilon (\frac{d}{dr}(P_T f)(x_0+rb)-\frac{d}{dt}(P_T f)(x_0+tb)|_{t=0})dr| \\
&= \frac{1}{\varepsilon}|\int_0^\varepsilon (\varepsilon-t)\frac{d^2}{dt^2}(P_T f)(x_0+tb)dt| \leqq C\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$|\frac{1}{\varepsilon}(E[f(X(T,x_0+\varepsilon b))]-[f(X(T,x_0))])$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}(E[f(X_{T/n}(T,x_0+\varepsilon b))]-E[f(X_{T/n}(T,x_0))])|$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{[n/2]}\int_0^{\varepsilon}|\frac{d}{dt}Q_{(Tk/n)}^{(T/n)}(P_{T/n}-Q_{(T/n)}^{(T/n)})P_{T(n-k-1)}f(x_0+tb)|dt$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=[n/2]+1}^{n-1}\int_0^{\varepsilon}|\frac{d}{dt}(Q_{(Tk/n)}^{(T/n),0}(P_{T/n}-Q_{(T/n)}^{(T/n)})P_{T(n-k-1)}f)(x_0+tb)|dt$$

$$+\sum_{k=[n/2]+1}^{n-1}\frac{2}{\varepsilon}||Q_{(Tk/n)}^{(T/n),1}(P_{T/n}-Q_{(T/n)}^{(T/n)})P_{T(n-k-1)}f||_{\infty}$$

$$\forall \gamma > 0\ \exists C \in (0, \infty)$$

$$|\frac{\partial}{\partial t} E[f(X(T, x_0 + tb))]|_{t=0} - \frac{1}{\varepsilon} E[f(X_{T/n}(T, x_0 + \varepsilon b)) - f(X_{T/n}(T, x_0))]|$$

$$\leqq C(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon n^\gamma} + \frac{1}{n})$$

さらに

$$E[f(X_{T/n}(T, x_0 + b))] - E[f(X_{T/n}(T, x_0 + b))]$$

の数値計算の近似誤差も考える必要がある

実務では

$$\frac{1}{\varepsilon}(E[f(X_{T/n}(T,x_0+\varepsilon b))]-E[f(X_{T/n}(T,x_0))])$$

のモンテカルロ計算で、$E[f(X_{T/n}(T,x_0+\varepsilon b))]$, $E[f(X_{T/n}(T,x_0))]$
両方の計算に同じ疑似乱数列を用いる

$X_{T/n}(T,x))$ は x について滑らかであるので

f がリプシッツ連続であれば、

モンテカルロ法の計算回数が M の時、誤差は $O(M^{-1/2})$

よって計算誤差は

$$O(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon n^{\gamma}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{M^{1/2}})$$

$\varepsilon\sim\frac{1}{n}$ ととるのが良い

(Gaussian K-scheme)

二宮・二宮の例で作った $Q_{(s)}$ については以下の評価が成り立つ

(2006 年の summer school)

定理 3 （UFG) 条件が成立すると仮定する。この時、$T > 0$ に対して $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$||P_T f - (Q^n_{(T/n)} f)||_\infty \leqq \frac{C}{n^2}||f||_\infty \qquad n \geqq 1,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

が成立する。

証明のアイデアは Euler-丸山と同じ

命題 4　(UFG) が成立すると仮定する。$0 < T_0 < T_1$ とする。$n \geqq 1$, $s \in (0,1]$, に対して $C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ 上の線形作用素 $Q_{n,s}^{(0)}$ 及び $Q_{n,s}^{(1)}$ が存在し

(1) $Q_{(s)}^n = Q_{n,s}^{(0)} + Q_{n,s}^{(1)}$

(2) $u_1, u_2, \cdots, u_{k+k'} \in A^{**}$, $k, k' \geqq 0$, に対して 以下を満たす $C \in (0,\infty)$ が存在する。. もし $n \geqq 1$, $s \in (0,1]$, が $T_0 \leqq ns \leqq T_1$ を満たすならば

$$\begin{aligned}
&||\Phi(r(u_1)\cdots r(u_k))Q_{n,s}^{(0)}\Phi(r(u_{k+1})\cdots r(u_{k+k'}))f||_\infty \\
&\leqq Ct^{-(||u_1||+\cdots+||u_{k+k'}||/2)}||f||_\infty \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)
\end{aligned}$$

(3) 任意の $\gamma > 0$ に対して 以下を満たす $C \in (0,\infty)$ が存在する。$n \geqq 1$, $s \in (0,1]$, が $T_0 \leqq ns \leqq T_1$ を満たすならば

$$||Q_{n,s}^{(1)}f||_\infty \leqq Cs^\gamma||f||_\infty \qquad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

また、Greeks についても $k = 1, \ldots, d$ に対して

$$||V_k P_T f - \frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{Exp}(\varepsilon V_k) Q^n_{(T/n)} f - Q^n_{(T/n)} f)||_\infty$$

$$\leqq C(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon n^\gamma} + \frac{1}{n^2})$$

等々といった式が成立する

パラメータ付きの場合のパラメータに関する微分についても

少し違った形の (UFG) 条件の下で、同様な評価が成り立つ

Barrier derivatives

吸収壁付きの拡散過程についての期待値計算も重要

極めて困難な問題

話を見やすくするために、

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

$$V_k = \sum_{i=2}^{d} V_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad k = 2, \ldots, d$$

という特別な場合を考える

$$(P_t^0 f)(x) = E[f(X(t,x)),\ \min_{s\in[0,t]} X^1(s,x) > 0]$$

$t \in [0,\infty),\ x \in \mathbf{R}^N,\ f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ で線形作用素 P_t^0 を定める

$$u(t,x) = (P_t^0 f)(x), \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \{x \in \mathbf{R}^N;\ x^1 \geqq 0\}$$

とおくと、u は連続で

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = Lu(t,x), \quad (\text{弱い意味で}) \qquad t > 0,\ x \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^{N-1}$$

$$\lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = f(x), \qquad x \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^{N-1}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \{0\} \times \mathbf{R}^{N-1}$$

を満たすことがわかり、u は $x^1 > 0$ の領域でのディリクレ境界条件付き PDE の解となる。

実は次のような定理が証明できる。

定理 5 (UFG) を仮定する。この時、すべての $k, k' \geqq 0$ $u_1, \ldots, u_{k+k'} \in A^{**}$ に対して $C \in (0,\infty)$ が存在し

$$\sup_{x\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^{N-1}} |(\Phi(r(u_1)\cdots r(u_k))P_t^0\Phi(r(u_{k+1})\cdots r(u_{k+k'}))f)(x)|$$

$$\leqq Ct^{-(||u_1||+\cdots||u_{k+k'}||)/2} \sup_{x\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^{N-1}} |f(x)| \qquad t\in(0,1],\ f\in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$$

が成立する。

この結果の評価は境界条件のないものとほぼ同じ

cubature 法と同様なことができるか？

重要な違い

$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ に対して、

$$\sup_{x \in (0,\infty)\times\mathbf{R}^{N-1}} |(V_1 f)(x) - (V_1 P_t f)(x)| \to 0, \qquad t \downarrow 0$$

しかし $f \equiv 1$ とすると

$$\sup_{x \in (0,\infty)\times\mathbf{R}^{N-1}} |(V_1 f)(x) - (V_1 P_t^0 f)(x)|$$

$$\to \infty, \qquad t \downarrow 0$$

$C_b^\infty(\mathbf{R}^N)$ は P_t^0 の生成作用素の定義域に含まれない

テーラー展開に関する単なる代数的考察だけでは、

良い近似法を見つけることはできない