担保付きデリバティブの「価格」に対する一考察

楠岡　成雄　(東京大学大学院数理科学研究科)

会社１，会社２

担保付きデリバティブ

２から１へのキャッシュフロー　＋符号

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$　通常の仮定を満たす確率空間

［契約］　N 個のヨーロッパ型デリバティブ

満期 T_k, 支払い Z_k, $k = 1, \ldots, N$.

$0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_N$,　Z_k $\mathcal{F}_{T_k}$-可測

スポット金利過程　$r : [0, \infty) \times \Omega \to [0, \infty)$ 発展的可測

Overnight 金利過程　$c : [0, \infty) \times \Omega \to [0, \infty)$ 発展的可測

τ_i, $i = 1, 2$ 停止時刻　会社 i のデフォルト時刻

仮定　$P(\tau_1 = \tau_2) = 0.$

$\hat{\tau} = \tau_1 \wedge \tau_2$

$$N_i(t) = 1_{\{t \geqq \tau_i\}}, \qquad i = 1, 2,$$

$$\hat{N}(t) = 1_{\{t \geqq \hat{\tau}\}}$$

$l_i(t)$, $i = 1, 2$, ： 時刻 t に会社 i が倒産した時の損失率

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds), \qquad \gamma(t) = \exp(\int_0^t c(s)ds)$$

とおく

$\tilde{T}$ ホライズン $T_N < \tilde{T}$

X 時刻 t における差し入れ担保額

セミマルチンゲールであると仮定する

キャッシュフロー

$t < \hat{\tau},\, t \neq T_k,\, k = 1, \ldots, N$ の時：$-c(t)X(t)dt + dX(t)$

$t < \hat{\tau},\, t = T_k,\, k = 1, \ldots, N$ の時：$Z_k - c(t)X(t)dt + dX(t)$

$A_i(t),\, i = 1, 2,$: $t = \tau_i = \hat{\tau}$ の時のキャッシュフロー (契約で決まる)

[条件] $X(t) = 0,\, t \geqq T_N \wedge \hat{\tau}$

Q : β-EMM β をニュメレールとした時の EMM

これが経済価値を決めるとする

$\tilde{G}(t)$ ：時刻 $t < \hat{\tau} \wedge \tilde{T}$ における将来キャッシュフローの割引価値

$$\tilde{G}(t) = \int_t^{\tilde{T}} (1 - \hat{N}(s-))\beta(s)^{-1}(-c(s)X(s)ds + dX(s))$$

$$+ \sum_{t<T_k} \beta(T_k)^{-1}(1 - \hat{N}(T_k))Z_k$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_t^{\tilde{T}} \beta(s)^{-1}A_i(s)(1 - \hat{N}(s-))dN_i(s)$$

方程式

$$E^Q[\tilde{G}(t)|\mathcal{F}_t] = 0$$

$$U(t) = \sum_{T_k \leqq t} \beta(T_k)^{-1}(1 - \hat{N}(T_k))Z_k$$

とおく。

$$\int_0^t (1 - \hat{N}(s-))\beta(s)^{-1}(-c(s)X(s)ds + dX(s)) + U(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \beta(s)^{-1} A_i(s)(1 - \hat{N}(s-))dN_i(s)$$

$$= \tilde{G}(0) - \tilde{G}(t) = E^Q[\tilde{G}(0) - \tilde{G}(t)|\mathcal{F}_t]$$

$$= E^Q[\tilde{G}(0)|\mathcal{F}_t] = M_0(t) \quad \text{マルチンゲール}$$

$A_i(t)$ はどのようなものか：契約に依存

時刻 t におけるデリバティブの総価値 $Z(t)$

$$Z(t) = \sum_{t \leqq T_k} \beta(t) E^Q[\beta(T_k)^{-1} Z_k | \mathcal{F}_t]$$

$$A_1(t) = -(1 - \ell_1(t))(X(t-) - Z(t))_+ + (X(t-) - Z(t))_-$$

$$A_2(t) = (1 - \ell_2(t))(X(t-) - Z(t))_- - (X(t-) - Z(t))_+$$

デフォルトがない場合

$$d(\gamma(t)^{-1}X(t)) = \gamma(t)^{-1}(-c(t)X(t)dt + dX(t))$$

$$\gamma(t)^{-1}X(t) - X(0) + \sum_{T_k \leqq t} \gamma(T_k)^{-1}Z_k$$

$$= \int_0^t \beta(s)\gamma(s)^{-1}dM_0(s)$$

$$\gamma(t)^{-1}X(t) = E^Q[\sum_{T_k > t} \gamma(T_k)^{-1}Z_k|\mathcal{F}_t]$$

Fujii-Shimada-Takahashi の式

デフォルトのある場合はどうなるか？

以下では特別な状況を考える

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 完備確率空間、 $\tilde{T} < T$

$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F};\ P(A) = 0 \text{ or } 1\}$

$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ d 次元弱ブラウニアンフィルトレーション

$\mathcal{G}_0 \supset \mathcal{N}$

τ_i , $i = 1, 2$ $[0, \infty)$ 値確率変数、分布は連続、$\hat{\tau} = \tau_1 \wedge \tau_2$

$P(\tau_1 = \tau_2) = 0$ であるとする。

$N_i(t) = 1_{\{t \geqq \tau_i\}}, i = 1, 2, \qquad \hat{N}(t) = 1_{\{t \geqq \hat{\tau}\}}, t \in [0, T]$

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma\{\tau_i \wedge t;\ i = 1, 2\}, \qquad t \in [0, T]$$

$$\mathcal{F}_t^i = \mathcal{G}_t \vee \sigma\{\tau_i \wedge t\}, \qquad t \in [0, T],\ i = 1, 2$$

確率空間に対する仮定

(P-1) $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-発展的可測過程 $\lambda_i^0 : [0,T]\times\Omega \to [0,\infty)$, $i=1,2$, が存在して、

$$M_i(t) = N_i(t) - \int_0^t (1-N_i(s))\lambda_i^0(s)ds$$

は P -$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ -マルチンゲール

(P-2) 任意の P - $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-マルチンゲールは P - $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-マルチンゲール

[仮定] (1) $r:[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$, $c:[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$, $\ell_i:[0,T]\times\Omega\to\mathbf{R}$, $i=1,2$, は $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ 発展的可測、

(2) Z_k, $k=1,\ldots,N$, は $\mathcal{G}_{T_k}$ 可測

[β-**EMM** Q に対する仮定]

(Q-1) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-発展的可測過程 $\lambda_i : [0,T]\times\Omega \to [0,\infty)$, $i=1,2$ が存在して、

$$N_i(t) - \int_0^t (1-N_i(s))\lambda_i(s)ds$$

は Q -$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ -マルチンゲール

(Q-2) (この仮定はなくても議論は進めることは可能)

任意の Q - $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-マルチンゲールは Q - $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-マルチンゲール

これは金利等のマクロ的指標は default の影響を受けないという仮定

会社１，２の影響を受けるならば他社の影響も受けることとなりモデルが巨大となるのでファイナンスとしては妥当な仮定

若干の可積分性の仮定の下で
Q と同値な確率測度 $\hat{Q}$ 及び $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-発展的可測過程
$\hat{\lambda}_i : [0,T] \times \Omega \to [0,\infty)$, $i = 1,2$ が存在して、

$$\hat{Q}|_{\mathcal{G}_T} = Q|_{\mathcal{G}_T}$$

$$\hat{M}_i(t) = N_i(t) - \int_0^t (1 - N_i(s))\hat{\lambda}_i(s)ds$$

は $\hat{Q}$ -$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ -マルチンゲールとなり、さらに

$i=1,2$ に対して $\{\mathcal{F}_t^{3-i}\}_{t\in[0,T]}$-可予測過程 $\kappa_i:[0,T]\times\Omega\to[0,\infty)$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$-発展的可測過程 $\hat{\rho}:[0,T]\times\Omega\to[0,\infty)$ が存在して

$$\hat{\rho}(t)=1+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \kappa_i(s)(1-N_i(s-))\hat{\rho}(s-)d\hat{M}_i(s)$$

$$\kappa_i(t)(1-\hat{N}(t))=0,$$

$$\lambda_i(t)=\hat{\lambda}_i(t)(1+\kappa_i(t)),\ i=1,2,\ a.e.t\in[0,T]$$

$$\frac{dQ}{d\hat{Q}}|_{\mathcal{F}_t}=\hat{\rho}(t)$$

注意：仮定（Q-2) がないとさらに複雑な設定が必要となる

この時、

$$\exp(\int_0^t (\lambda_1(s)+\lambda_2(s))ds)(1-\hat{N}(t))$$

は Q-$\mathcal{F}$-マルチンゲール

$\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-発展的可測過程 g に対して

$$E^Q[\int_0^T g(s)(1-\hat{N}(s-))dN_i(s)|\mathcal{F}_t]$$

$$=(1-\hat{N}(t))E^{\hat{Q}}[\int_t^T g(s)\hat{\lambda}_i(s)\exp(-\int_t^s(\hat{\lambda}_1(u)+\hat{\lambda}_2(r))dr)|\mathcal{G}_t]$$

担保価格過程 X に対して $\{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$-発展的可測過程 $\hat{X}$ が存在して

$$X(t) = (1 - N(t))\hat{X}(t)$$

とできるので、

$$\tilde{G}(t) = \int_t^{\tilde{T}} (1 - \hat{N}(s-))\beta(s)^{-1}(-c(s)\hat{X}(s)ds + d\hat{X}(s))$$

$$+ \sum_{t<T_k} \beta(T_k)^{-1}(1 - \hat{N}(T_k))Z_k$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_t^{\tilde{T}} \beta(s)^{-1}\hat{A}_i(s)(1 - \hat{N}(s-))dN_i(s)$$

ただし

$$\hat{A}_1(t) = -(1-\ell_1(t))(\hat{X}(t-) - Z(t))_+ + (\hat{X}(t-) - Z(t))_-$$

$$\hat{A}_2(t) = (1-\ell_2(t))(\hat{X}(t-) - Z(t))_- - (X(t-) - Z(t))_+$$

$$Z(t) = \sum_{t \leqq T_k} \beta(t) E^Q[\beta(T_k)^{-1} Z_k | \mathcal{G}_t]$$

となる。

$$\Lambda(t) = \exp(\int_0^t (\hat{\lambda}_1(s) + \hat{\lambda}_2(s)) ds$$

とおくと

方程式は

$$E^{\hat{Q}}[\int_t^{\tilde{T}} \Lambda(s)^{-1}\beta(s)^{-1}\gamma(s)d(\gamma(s)^{-1}\hat{X}(s)) + \sum_{T_k>t}\Lambda(T_k)^{-1}\beta(T_k)^{-1}Z_k$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_t^{\tilde{T}} \Lambda(s)^{-1}\beta(s)^{-1}\hat{\lambda}_i(s)\hat{A}_i(s)ds|\mathcal{G}_t] = 0$$

$$\hat{X}(T) = 0.$$

となる

これより

$$\hat{M}_0(t) = \int_0^t \Lambda(s)^{-1}\beta(s)^{-1}\gamma(s)d(\gamma(s)^{-1}\hat{X}(s)) + \hat{U}(t)$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^t \Lambda(s)^{-1}\beta(s)^{-1}\hat{\lambda}_i(s)\hat{A}_i(s)ds$$

が $\hat{Q}$-$\mathcal{G}$-マルチンゲールとなる。ただし、

$$\hat{U}(t) = \sum_{T_k \leqq t} \Lambda(T_k)^{-1}\beta(T_k)^{-1}Z_k$$

$$b_1(t,x) = -(1-\ell_1(t))x_+ + x_-, \qquad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}$$

$$b_2(t,x) = (1-\ell_2(t))x_- - x_+ \qquad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}$$

$$b_0(t,x) = \sum_{i=1}^{2} \hat{\lambda}_i(t) b_i(t,x) \qquad t \geqq 0,\ x \in \mathbf{R}$$

とおけば、

$$\hat{M}_0(t) = \int_0^t \Lambda(s)^{-1}\beta(s)^{-1}\gamma(s)d(\gamma(s)^{-1}\hat{X}(s)) + \hat{U}(t)$$

$$+ \int_0^t \Lambda(s)^{-1}\beta(s)^{-1} b_0(s, \hat{X}(s) - Z(s))ds$$

となり、

$$
\begin{aligned}
\gamma(t)^{-1}\hat{X}(t) - \hat{X}(0) + \int_0^t \Lambda(s)\beta(s)\gamma(s)^{-1} d\hat{U}(s) \\
+ \int_0^t \gamma(s)^{-1} b_0(s, \hat{X}(s) - Z(s)) ds \\
= \int_0^t \Lambda(s)\beta(s)\gamma(s)^{-1} d\hat{M}_0(s)
\end{aligned}
$$

よって、

$$\hat{Y}(t) = \gamma(t)^{-1}(\hat{X}(t) - Z(t))$$

とおけば

$$\hat{M}(t) = \hat{Y}(t) + \gamma(t)^{-1}Z(t) - \hat{X}(0) + U_0(t) + \int_0^t b_0(s, \hat{Y}(s))ds$$

が $\hat{Q}$-$\mathcal{G}$-マルチンゲールとなる（BSDE)。ただし、

$$U_0(t) = \sum_{T_k \leqq t} \gamma(T_k)^{-1} Z_k$$

注意１．仮定（(Q-2)）の下では上の $\hat{Q}$ を Q に置き直してよい。

注意２.

$$b_0(t,x) = \hat{\lambda}_1(t)(-(1-\ell_1(t))x_+ + x_-) + \hat{\lambda}_2(t)((1-\ell_2(t))x_- - x_+)$$

$$= -(\hat{\lambda}_1(t)(1-\ell_1(t)) + \hat{\lambda}_2(t))x_+ + (\hat{\lambda}_1(t) + \hat{\lambda}_2(t)(1-\ell_2(t)))x_-$$

$$= -(\hat{\lambda}_1(t) + \hat{\lambda}_2(t)(1-\ell_2(t)))x + (\hat{\lambda}_1(t)\ell_1(t) - \hat{\lambda}_2(t)\ell_2(t))x_+$$

$$\hat{\lambda}_1(t)\ell_1(t) = \hat{\lambda}_2(t)\ell_2(t)$$

であれば非線形性は消えるが、影響は残る。

会社 i の社債

$$\beta(t)^{-1}B_i(t;T')(1-N_i(t))$$

$$= E^Q[\int_t^{T'} \beta(s)^{-1}(1-\ell_i(s))B_i(s;T')dN_i(s) + \beta(T')^{-1}(1-N(T'))|\mathcal{F}_t]$$

$$= E^Q[\int_t^{T'} \beta(s)^{-1}(1-\ell_i(s))\lambda_i(s)(1-N_i(s))B_i(s;T')ds+\beta(T')^{-1}(1-N(T'))|\mathcal{F}_t]$$

$$= (1-N_i(t))E^{Q_i}[\int_t^{T'} \beta(s)^{-1}(1-\ell_i(s))\lambda_i(s)\exp(-\int_t^s \lambda_i(u)du)B_i(s;T')ds$$

$$+\beta(T')^{-1}\exp(-\int_t^{T'} \lambda_i(u)du)|\mathcal{F}_t^{3-i}]$$

これは解けて

$$B_i(t;T') = E^{Q_i}[\exp(-\int_t^{T'}(\ell_i(u)\tilde{\lambda}_i(u) + r(u))du)|\mathcal{F}_t^{3-i}]$$

(Duffi-Singleton) は成立

ただし　Q_i は

$$d\rho_i(t) = \kappa_i(t)\rho_i(t-)d\hat{M}_i(t)$$

$$\frac{dQ_i}{d\hat{Q}}|\mathcal{F}_t = \rho_i(t)$$

スプレッドに寄与するのは $\ell_i(t)\tilde{\lambda}_i(t)$

測度も変わる

$Q_i = \hat{Q}$ は 互いの default が相手に影響を及ぼさないことを意味する