2次元離散ガウス自由場の極大値

阿部 圭宏 *
学習院大学 理学部

本稿をお読みになる際の注意点：本稿では当該分野特有の考え方を伝えることを主な目的としており, 厳密な議論を展開することよりも heuristics を述べることが多いことにご注意ください．細部よりも全体の流れおよび主要な概念に焦点をあててお読みくださると幸いです.

1 導入

この講義の目的は 2 次元離散ガウス自由場 (DGFF) の極大値に関する最近の研究動向を紹介することである．この講義ノートの構成は次の通り：

- 第 2 章： DGFF の最大値の収束
- 第 3 章： DGFF の極大値過程の収束
- 第 4 章： 被覆時間・局所時間の極大値
- 第 5 章： 対数相関をもつランダム場の普遍性

第 2 章では $N \times N$ 正方形上の DGFF の最大値が $N \to \infty$ とするとき Gumbel 分布のランダムシフトに収束することを紹介する．この章の内容は Bramson-Ding-Zeitouni 氏らの論文 [38] にもとづく.

第 3 章では Biskup-Louidor 氏らの一連の研究結果を概観する．Biskup 氏は氏らの研究をまとめた講義録を公開している [27]. この講義録は DGFF の最適な入門書であり, 第 3 章の執筆では大いに参考にした.

第 4 章では被覆時間・局所時間の極大値に関する研究の流れを概観する．第 5 章では BBM・BRW の関連する研究を紹介し, 対数相関をもつランダム場の極大値統計において成り立つと信じられている普遍性について簡単に触れる.

Bramson-Ding-Zeitouni 氏らおよび Biskup-Louidor 氏らの哲学はともに「分枝ランダムウォーク (BRW) の解析に近いものに帰着させる」という点で共通している[1]．しかし, 両者の解析手法は大きく異なる．Bramson-Ding-Zeitouni 氏らの手法は「DGFF の分布を他の解析しやすいガウス場の分布で近似する」というものである．DGFF の分布を近似するものとして「変形分枝ランダムウォーク (MBRW)」と呼ばれるものが登場する．この名称のとおり, MBRW で近似す

*yabe@math.gakushuin.ac.jp

[1] 感覚的な言葉でいえば DGFF をつぎのようなもので近似する：$\mathbb{Z}^2$ の各点にランダムウォークが対応しており, それらは対数相関している.

ることによって BRW の解析に近いものに帰着させることができる．この手法ではガウス場の比較定理 (Slepian の補題) が重要な道具として使われている．一方，Biskup-Louidor 氏らの手法は「各点を中心とした正方形列の層に対応させる形で DGFF を独立な小片に分解する」というものである．Biskup-Louidor 氏らはこの分解を”concentric decomposition”と呼んでいる．本稿では Biskup-Louidor 分解と呼ぶことにする．Biskup-Louidor 分解の主要部はランダムウォーク (RW) であり, DGFF を RW 表現することにより BRW の研究手法を援用できる．

以下では, 本稿を通して用いる記号, 基本的な定義, および前提とする DGFF の先行研究を紹介する．第 2 章では正方形上の DGFF を扱うが第 3 章では $\mathbb{R}^2$ の様々な有界な開集合の離散近似上での DGFF を考える．そこでまず扱う開集合のクラスとその離散近似を定義する．

定義 1.1 *(許容可能な開集合, [27, Definition 1.14])* $D \subset \mathbb{R}^2$ *が有限個の連結成分から成る有界な開集合であり, その境界* ∂D *が正のユークリッド直径をもつ有限個の連結成分から成るとき,* D *は許容可能な開集合であるといい, その集合族を* $\mathfrak{D}$ *と表記する.*

定義 1.2 *(許容可能な離散近似, [27, Definition 1.16]) つぎの 2 条件*[2] *を満たすとき,* $\{D_N : N \geq 1\}$ *を* $D \in \mathfrak{D}$ *の許容可能な離散近似とよぶ：*

1. $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_0, D_N \subset \{x \in \mathbb{Z}^2 : d_\infty(\frac{x}{N}, D^c) > \frac{1}{N}\}$
2. $\forall \delta > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_1, D_N \supset \{x \in \mathbb{Z}^2 : d_\infty(\frac{x}{N}, D^c) > \delta\}$.

ただし, $d_\infty(x,y)$ *を* $\mathbb{Z}^2$ *上の* ℓ^∞*-距離とする.*

離散 Gauss 自由場を定義するためにまずは (離散) Green 関数を定義する．$V \subset \mathbb{Z}^2$ が与えられたとき, Green 関数 $G^V(x,y)$ を次で定義する：

$$G^V(x,y) := E_x\left[\sum_{i=1}^{\tau_{\partial V}-1} 1_{\{X_i=y\}}\right]. \tag{1.1}$$

ただし, $(X_i)_{i\geq 0}$ は V 上の単純ランダムウォーク (SRW) であり, 各 $A \subset V$ に対して, $\tau_A := \min\{i \geq 0 : \ X_i \in A\}$ とする．また, $V \subset \mathbb{Z}^2$ が与えられたとき, V の境界 ∂V を $\partial V := \{x \notin V : \exists y \in V, \ d_\infty(x,y) = 1\}$ と定義する．

定義 1.3 *(2 次元離散ガウス自由場)* $V \subset \mathbb{Z}^2$ *が与えられたとする.* V *上の離散ガウス自由場 (DGFF) とは* $\mathbb{R}^V$*-値ガウス確率変数であり, 期待値は 0, 共分散は Green 関数で与えられるものである：*

$$\mathbb{E}[h_x^V] = 0, \ \mathbb{E}[h_x^V h_y^V] = G^V(x,y), \quad \forall x,y \in V.$$

DGFF の性質で最も重要なものは次の Gibbs-Markov 性[3]である：

[2] 離散調和関数が連続調和関数に収束するために必要な条件である．

[3] 領域 Markov 性と呼ぶのが一般的かもしれない．本稿では Biskup-Louidor 氏らの呼び方を採用する．

補題 1.4 *(Gibbs-Markov 性)* $\emptyset \neq U \subsetneq V \subsetneq \mathbb{Z}^2$ が与えられたとする．$V \backslash U$ において境界値 h^V をもち，U 上で離散調和なランダム関数を

$$\varphi_x^{V,U} := \mathbb{E}\left[h_x^V | \sigma(h_z^V : z \in V \backslash U)\right] \tag{1.2}$$

とおく．このとき，

$$h^V - \varphi^{V,U} \text{ と } \varphi^{V,U} \text{ は独立であり，}$$

$$h^V - \varphi^{V,U} \overset{law}{=} h^U.$$

ただし，$\overset{law}{=}$ は左辺と右辺の分布が等しいことを表す． つまり，V 上の *DGFF* $(h_x^V)_{x \in V}$ を次のように U 上の *DGFF* h^U と $\varphi^{V,U}$ に分解できる：

$$(h_x^V)_{x \in V} \overset{law}{=} (h_x^U + \varphi_x^{V,U})_{x \in V}, \quad h^U \text{ と } \varphi^{V,U} \text{ は独立.}$$

補題 1.4 の証明については例えば [27, Lemma 3.1] をご覧ください.

ポテンシャル核をつぎで定義する：

$$\mathfrak{a}(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \left(P[X_i = 0] - P\left[X_i = x\right]\right) \quad ((X_i)_{i \geq 0} \text{ は原点出発 SRW).} \tag{1.3}$$

また，ある $c_0 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\mathfrak{a}(x) = \frac{2}{\pi} \log|x| + c_0 + O(|x|^{-2}) \tag{1.4}$$

が成り立つ．例えば [27, Lemma 1.21] およびそこに挙げられている文献をご覧ください．ポテンシャル核を用いた Green 関数のつぎの表現は便利である：

補題 1.5 *(Green 関数のポテンシャル核による表現, (例えば [27, Lemma 1.19]))* $V \subset \mathbb{Z}^2$ を有界な部分集合とする．任意の $x, y \in V$ に対して，

$$G^V(x,y) = \sum_{z \in \partial V} P_x[X_{\tau_{\partial V}} = z]\mathfrak{a}(y-z) - \mathfrak{a}(x-y). \tag{1.5}$$

ただし，$(X_i)_{i \geq 0}$ は $\mathbb{Z}^2$ 上の *SRW*, $\tau_A := \min\{i \geq 0 : X_i \in A\}$.

離散から連続へ議論を展開する際，連続調和測度による離散調和測度の近似が役立つ．その近似をみるために連続調和測度を定義する．各開集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ および $x \in D$ に対して，連続調和測度をつぎで定義する：

$$\Pi^D(x, A) = P_x\left(B_{\tau_{D^c}} \in A\right), \quad A \subset \partial D.$$

ただし，$(B_t)_{t \geq 0}$ は標準 Brown 運動で

$$\tau_{D^c} = \inf\{s \geq 0 : B_s \notin D\}.$$

離散調和測度は連続調和測度に弱収束する：

補題 1.6 *(離散調和測度から連続調和測度へ, [29, Lemma A.1] または [27, Lemma 1.23])* $D \in \mathfrak{D}$ および許容可能な D の離散近似 $(D_N)_{N\geq 1}$ を任意にとる．任意の有界連続関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して，つぎが $x \in D$ に関して広義一様に成り立つ：

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{z\in\partial D_N} P_{\lfloor xN\rfloor}[X_{\tau_{\partial D_N}} = z] f(\frac{z}{N}) = \int_D \Pi^D(x, dz) f(z), \quad x \in D. \tag{1.6}$$

ただし，$(X_i)_{i\geq 0}$ は $\mathbb{Z}^2$ 上の *SRW.*

Green 関数の漸近挙動はつぎのとおり：

補題 1.7 *([27, Theorem 1.17])* ある $c_0 \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の許容可能な開集合 $D \in \mathfrak{D}$ と D の任意の許容可能な離散近似 $(D_N)_{N\geq 1}$ に対して以下が成り立つ：
(1) 任意の $x \in D$ に対して，

$$G^{D_N}(\lfloor xN\rfloor, \lfloor xN\rfloor) = \frac{2}{\pi}\log N + c_0 + \frac{2}{\pi}\int_{\partial D} \Pi^D(x, dz)\log|x - z| + o(1). \tag{1.7}$$

(2) 任意の $x, y \in D$, $x \neq y$ に対して，

$$G^{D_N}(\lfloor xN\rfloor, \lfloor yN\rfloor) = -\frac{2}{\pi}\log|x - y| + \frac{2}{\pi}\int_{\partial D} \Pi^D(x, dz)\log|y - z| + o(1). \tag{1.8}$$

この証明は離散調和測度が連続調和測度に弱収束すること (補題 1.6) および Green 関数のポテンシャル核による表現 (補題 1.5) による．

本稿では詳しく述べないが 2 次元 DGFF の極大値の研究では重要な結果を羅列する．本稿ではこれらの結果を前提として話を進める．

まず 2 次元 DGFF の最大値に関する研究の出発点として $N \times N$ 正方形

$$V_N := (0, N)^2 \cap \mathbb{Z}^2$$

上の DGFF の最大値の第 1 次項は $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N$ であることが Bolthausen-Deuschel-Giacomin 氏らにより示されている：

定理 1.8 *(第 1 次オーダー [32])* 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，つぎの事象の確率は $N \to \infty$ のとき 1 に収束する：

$$(1 - \varepsilon)2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N \leq \max_{x\in V_N} h_x^{V_N} \leq (1 + \varepsilon)2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N.$$

定理 1.8 により $\lambda > 1$ のとき，$h_x^{V_N} \geq \lambda \cdot 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N$ となる $x \in V_N$ は高確率で存在しない．では，$\lambda \in (0, 1)$ のときはどのようなことがいえるであろうか? このことについて初めに調べたのは Daviaud 氏である[4]：

[4]最近 Biskup-Louidor 氏らがより強い結果を得ている [31]．定理 3.14 もご覧ください．

定理 1.9 *(Thick points [48])* 任意の $\lambda \in (0,1)$ および $\varepsilon > 0$ に対して, つぎの事象の確率は $N \to \infty$ のとき 1 に収束する：

$$N^{2(1-\lambda^2)-\varepsilon} \leq \left| \left\{ x \in V_N \mid h_x^{V_N} \geq \lambda \cdot 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N \right\} \right| \leq N^{2(1-\lambda^2)+\varepsilon}.$$

当時,「$(\max_{x\in V_N} h_x^{V_N} - \mathbb{E}[\max_{x\in V_N} h_x^{V_N}])_{N\geq 1}$ は緊密化か?」という大きな問いがあったが長らく未解決であった. 突破口を切り開いたのは Bolthausen, Deuschel, Zeitouni 氏らである：

定理 1.10 *(緊密性 [33, 41])* $(\max_{x\in V_N} h_x^{V_N} - \mathbb{E}[\max_{x\in V_N} h_x^{V_N}])_{N\geq 1}$ は緊密.

この論文 [33] は数ページながら 2 次元 DGFF の最大値の研究を一気に加速させたインパクトのある論文である. それだけでなく Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) をエレガントに使う議論を提示しておりその議論はそれ以後になされた研究の基盤になっているといっても過言ではない. 実は [33] では部分列の緊密性のみが示されている. [33] の議論から $\mathbb{E}[\max_{x\in V_N} h_x^{V_N}]$ の第 2 次項まで精密に評価できれば「部分列」という条件は外せる (つまり全列が緊密であることがいえる). それを実行したのが Bramson-Zeitouni 氏らである：

定理 1.11 *(第 2 次オーダー [41, Theorem 1.2])*

$$\mathbb{E}\left[\max_{x\in V_N} h_x^{V_N}\right] = m_N + O(1).$$

ただし,

$$m_N := 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log\log N. \tag{1.9}$$

Bramson 氏は 1978 年に [36] において分枝 Brown 運動の最大値の第 2 次項まで精密に評価する研究を行っているが, 実はその解析手法が定理 1.11 でも援用されている. それを可能にしているのがガウス場の比較定理であり, [41] において DGFF の分布を近似するものとして変形分枝ランダムウォークが初めて登場する. これについては第 2 章で詳しく述べる.

定理 1.11 より DGFF の最大値の近似値は m_N であるが, m_N 付近の値をとる 2 点の配置は「非常に近い」か「非常に離れている」かのいずれかである：

定理 1.12 *([57, Theorem 1.1])* ある正定数 c が存在して,

$$\lim_{r\to\infty} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\exists u, v \in V_N, r \leq |u-v| \leq \frac{N}{r} \text{ かつ } h_u^{V_N}, h_v^{V_N} \geq m_N - c\log\log r\right] = 0. \tag{1.10}$$

定理 1.12 より, 最大値付近の値をとる点達は非常に小さなクラスターを形成し, それらのクラスター同士は十分離れている, と想像される. このイメージを厳密化した方々が Biskup 氏と Louidor 氏であり, 3 章でこの話題を概説する.

2 DGFF の最大値の収束

本章では $N \times N$ 正方形

$$V_N := (0,N)^2 \cap \mathbb{Z}^2$$

上の DGFF h^{V_N} の最大値から (1.9) で定義した m_N を引いたものが $N \to \infty$ のとき Gumbel 分布のランダムシフトに収束することを示した Bramson-Ding-Zeitouni 氏らの論文 [38] の内容を概観する．本章の目標は次の定理である：

定理 2.1 *([38, Theorems 1.1, 2.5])* 確率変数列 $(\max_{v\in V_N} h_v^{V_N} - m_N)_{N\geq 1}$ は $N \to \infty$ のとき非退化な確率変数に法則収束する．さらにその極限の分布関数を $F_\infty(x)$ とおくと，つぎが成り立つ：ある正値確率変数 Z [5] とある正定数 $a_\star$ が存在して，

$$F_\infty(x) = \mathbb{E}\left[e^{-a_\star Z e^{-\sqrt{2\pi}x}}\right]. \tag{2.1}$$

注 2.2 *(Update)* 定理 *2.1* の $F_\infty(x)$ は独立なガウス場の最大値の極限分布関数とは異なるクラスに属する．実際，独立なガウス場の最大値の分布関数は *Gumbel* 分布

$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$$

に収束するが[6]，定理 *2.1* の $F_\infty(x)$ は *Gumbel* 分布ではない．このことはつぎの漸近挙動からわかる：ある正定数 c が存在して，$x \to \infty$ のとき

$$1 - F_\infty(x) \sim cxe^{-\sqrt{2\pi}x}.$$

Bramson-Ding-Zeitouni 氏らの手法の軸は「ガウス場の比較定理を用いて DGFF の分布を (変形) 分枝ランダムウォークの分布で近似する」ことである．ガウス場の比較定理としてつぎの Slepian の補題を度々使う：

補題 2.3 *(Slepian の補題)* I を有限集合とする．$(Y_i)_{i\in I}$ と $(Z_i)_{i\in I}$ は期待値 0 のガウス確率変数の族であり，つぎを満たすとする：

$$\mathbb{E}[(Y_i)^2] = \mathbb{E}[(Z_i)^2], \quad \forall i \in I,$$

$$\mathbb{E}[(Y_i - Y_j)^2] \leq \mathbb{E}[(Z_i - Z_j)^2], \quad \forall i,j \in I.$$

このとき，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{P}[\max_{i\in I} Y_i \geq x] \leq \mathbb{P}[\max_{i\in I} Z_i \geq x].$$

補題 2.3 の証明については例えば [27, Corollary 5.9] の証明をご覧ください．本章では簡単のため

$$N = 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

と表せる場合のみを考える．(2.2) を仮定する理由は本章の議論では度々 V_N の 2 進分解を考えるためである．

---

[5] (Update) Biskup-Louidor 氏らの結果 (定理 3.1) により Z は定数因子の違いを除いて $(0,1)^2$ 上の臨界的 Liouville 量子重力測度の全測度 $Z^{(0,1)^2}((0,1)^2)$ と同分布である．

[6] 例えば [72] をご覧ください．

2.1　分枝ランダムウォーク

本節では DGFF の分布を近似する分枝ランダムウォーク (BRW) を定義し, DGFF の最大値分布を BRW の最大値分布で上から評価できること (命題 2.6) を概説する.

BRW を定義するためにまずはいくつか記号を準備する.

- (V_N の 2 進分解)

$$\mathcal{BD}_j := \left\{ (i_1 2^j, i_2 2^j) + V_{2^j} :\ 0 \le i_1, i_2 \le 2^j - 1 \right\}. \tag{2.3}$$

特に, 各点 $v \in V_N$ に対して,

$$\mathcal{BD}_j(v) := \text{点 } v \text{ を含む } \mathcal{BD}_j \text{ に属する正方形} \tag{2.4}$$

とおく.

- (V_N の 2 進分解上にのるガウス確率変数)

$$(\overline{\phi}_{N,j,B})_{j \ge 0, B \in \mathcal{BD}_j(v)} = \text{i.i.d. } N(0, \frac{2\log 2}{\pi})\text{-確率変数の族} \tag{2.5}$$

ただし, $N(m, \sigma^2)$-確率変数という場合, 期待値 0, 分散 σ^2 のガウス分布に従う確率変数を指す.

BRW をつぎのように各点を追跡する正方形 (2.4) 上にのっているガウス確率変数 (2.5) を足し合わせたものとして定義する：各 $v \in V_N$ に対して,

$$\vartheta_{v,N} := \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\phi}_{N,j,\mathcal{BD}_j(v)} \tag{2.6}$$

とおき, これを分枝ランダムウォーク (BRW) と呼ぶ. BRW は分枝構造を与えれば定義できるものであり, (2.6) は特別な場合に過ぎない. ではどこに分枝構造があるかといえば V_N の 2 進分解の中にそれを見出すことができる. 実際, V_N の 2 進分解を (深さ n の)4 分木と対応付けることができ[7], その意味で (2.6) を 4 分木上の BRW とみなすことができる.

Slepian の補題を使って DGFF および BRW の最大値分布を比較するために DGFF および BRW の共分散の評価が必要である. DGFF の共分散は Green 関数で与えられるのでその精密な評価はよく知られている：

補題 2.4 *(DGFF の共分散評価)* 任意の $\delta \in (0, \frac{1}{100})$ に対して, ある正定数 $C = C(\delta)$ が存在して, 任意の $u, v \in V_N^\delta$ に対して,

$$\left| Cov(h_x^{V_N}, h_y^{V_N}) - \frac{2\log 2}{\pi}\left(n - (0 \vee \log_2 |u - v|)\right) \right| \le C.$$

ただし, V_N^δ を V_N の境界から δN 以上離れた部分とする：

$$V_N^\delta := \{x \in V_N : d_\infty(x, \partial V_N) \ge \delta N\}. \tag{2.7}$$

[7] 各 $0 \le j \le n$ に対して, $\mathcal{BD}_{n-j}$ は 4 分木の第 j 世代目に対応する. 特に正方形 V_N は 4 分木の根 (root) に対応し, V_N の各点は深さ n の 4 分木の葉 (leaf) に対応する.

この証明は例えば [48, Lemma 2.1] を参照のこと．定義 (2.6) より比較的容易に BRW の分散および共分散の上からの評価を得ることができる．

補題 2.5 *(BRWの分散・共分散評価)* ある正定数 C が存在して，任意の $u, v \in V_N$, $u \neq v$ に対して，

$$Var(\vartheta_{u,N}) = \frac{2\log 2}{\pi} n,$$

$$Cov(\vartheta_{u,N}, \vartheta_{v,N}) \leq \frac{2\log 2}{\pi}(n - \log_2 |u-v|) + C.$$

残念ながら補題 2.5 で述べている共分散の上からの評価に対応するような下からの評価を得ることはできない．この欠点を解消するために 2.3 節で変形分枝ランダムウォークを導入する．

補題 2.5 の証明概略　分散については定義より明らか．共分散評価では u, v を追跡する正方形列 $(\mathcal{BD}_j(u))_{j=0}^n$, $(\mathcal{BD}_j(v))_{j=0}^n$ の分枝構造を使う．追跡する正方形が十分大きければ u, v を両方含んでいるが正方形が小さくなるにつれていつかは u, v を同時に含むことはできなくなる．その枝分かれがおこるときの正方形のサイズを 2^k とする．すなわち，

$$k := \max\{j \in \{0, \ldots, n\} : \mathcal{BD}_j(u) \neq \mathcal{BD}_j(v)\}$$

とおく．この定義より，u, v は同じ $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ 正方形に含まれるので $|u-v| \leq \sqrt{2} \cdot 2^{k+1}$ が成り立つ．また BRW の定義 (2.6) より，$\mathrm{Cov}(\vartheta_{u,N}, \vartheta_{v,N}) = \frac{2\log 2}{\pi}(n-k-1)$. これらより BRW の共分散評価を得ることができる．□

補題 2.4, 2.5, および Slepian の補題 (補題 2.3) を使って，DGFF の最大値の右裾分布を BRW の最大値の右裾分布で上から評価することができる：

命題 2.6 ある正定数 $\kappa > 0$ が存在して，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N} h_v^{V_N} \geq \lambda\right] \leq 4\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_{2^\kappa N}} \vartheta_{v, 2^\kappa N} \geq \lambda\right].$$

証明　Slepian の補題の仮定を満たすようにするために少し技巧的なことをする．まず補題 2.4 の仮定にもあるように考えている点が正方形の境界から十分離れていないと DGFF の共分散の一様な評価は使えないので h^{V_N} をいきなり考えるのではなく，まずは大きめの正方形 V_{4N} 上の DGFF $h^{V_{4N}}$ を考え，$h^{V_{4N}}$ を境界から離れた部分に制限したものの分布と BRW の分布を比較した後，Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) を使ってもとの h^{V_N} の分布に帰着させる．具体的には以下のように考える．

$\kappa > 0$ をひとまず固定しておく (後で大きさを調整する)．V_{4N} の部分正方形 $(2N, 2N) + V_N$ から $V_{2^\kappa N}$ への写像 ψ_N を $\psi_N(v) = (\frac{1}{2}2^\kappa N, \frac{1}{2}2^\kappa N) + 2^{\kappa-3}v$ と定義する[8]．$(h_v^{V_{4N}})_{v \in (2N,2N)+V_N}$ および $(\vartheta_{\psi_N(v), 2^\kappa N})_{v \in (2N,2N)+V_N}$ の最大値分布を Slepian の補題を使って比較したい．$(2N, 2N) + V_N \subset V_{4N}$ は ∂V_{4N} から十分離れているので DGFF の共分散の評価 (補題 2.4) を使うことができ，$\mathrm{Var}(h_v^{V_{4N}}) = \frac{2\log 2}{\pi}(n+2) + O(1)$, $\forall v \in (2N, 2N) + V_N$ を得る．また BRW の定義 (2.6) よ

[8] このように ψ_N を定義する理由は (2.9) が成立するようにするためである．(2.9) の前の記述もご覧ください．

り $\mathrm{Var}(\vartheta_{\psi_N(v),2^\kappa N}) = \frac{2\log 2}{\pi}(n+\kappa)$, $\forall v \in (2N,2N)+V_N$. Slepian の補題では比較する 2 つのランダム場の分散が一致していることを要求しているので微調整が必要である．そのために DGFF $h^{V_{4N}}$ と独立な $N(0,1)$-確率変数 X をとり，各 $v \in (2N,2N)+V_N$ に対して，正数 $a_v = a_v(\kappa)$ をつぎを満たすようにとる[9]：

$$\mathrm{Var}(h_v^{V_{4N}} + a_v X) = \mathrm{Var}(\vartheta_{\psi_N(v),2^\kappa N}), \quad \forall v \in (2N,2N)+V_N. \tag{2.8}$$

さらに DGFF･BRW の共分散評価 (補題 2.4, 2.5) を使うと，$\forall u, v \in (2N,2N)+V_N$ に対して，$\mathbb{E}[\{(h_u^{V_{4N}} + a_u X) - (h_v^{V_{4N}} + a_v X)\}^2] = \frac{4\log 2}{\pi}\log_2|u-v| + O(1)$, $\mathbb{E}[(\vartheta_{\psi_N(u),2^\kappa N} - \vartheta_{\psi_N(v),2^\kappa N})^2] \geq \frac{4\log 2}{\pi}(\log_2|u-v|+\kappa)+O(1)$. 後者の評価において $|\psi_N(u)-\psi_N(v)| = 2^{\kappa-3}|u-v|$ であることから κ の項が出てくるのである．このおかげで κ を十分大きくとるとつぎが成り立つ：$\forall u, v \in (2N,2N)+V_N$ に対して，

$$\mathbb{E}\left[\left\{(h_u^{V_{4N}} + a_u X) - (h_v^{V_{4N}} + a_v X)\right\}^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(\vartheta_{\psi_N(u),2^\kappa N} - \vartheta_{\psi_N(v),2^\kappa N})^2\right]. \tag{2.9}$$

(2.8) と (2.9) により Slepian の補題 (補題 2.3) を使って $(h_v^{V_{4N}} + a_v X)_{v\in(2N,2N)+V_N}$ および $(\vartheta_{\psi_N(v),2^\kappa N})_{v\in(2N,2N)+V_N}$ の最大値分布を比較できる：任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\mathbb{P}\left[\max_{v\in(2N,2N)+V_N}(h_v^{V_{4N}} + a_v X) \geq \lambda\right] \leq \mathbb{P}\left[\max_{v\in(2N,2N)+V_N}\vartheta_{\psi_N(v),2^\kappa N} \geq \lambda\right]. \tag{2.10}$$

つぎに (2.10) の左辺から X を消し，さらに $h^{V_{4N}}$ を h^{V_N} を置き換えたい．まず，事象 $\{X \geq 0\}$ のもとでは $\max(h^{V_{4N}} + a_v X) \geq \max h^{V_{4N}}$ であり，X は $h^{V_{4N}}$ と独立なので，(2.10) の左辺は下から $\frac{1}{2}\mathbb{P}[\max_{v\in(2N,2N)+V_N} h_v^{V_{4N}}]$ で評価できる．これを h^{V_N} の最大値分布に帰着させるために Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) を使う：

$$h^{V_{4N}} \overset{\text{law}}{=} h^{(2N,2N)+V_N} + \varphi^{V_{4N},(2N,2N)+V_N}.$$

ただし，右辺の $h^{(2N,2N)+V_N}$ と $\varphi^{V_{4N},(2N,2N)+V_N}$ は独立である．最大値をとる点を $v_\star := \mathrm{argmax} h^{(2N,2N)+V_N}$ とおくと，$h^{(2N,2N)+V_N}$ と $\varphi^{V_{4N},(2N,2N)+V_N}$ の独立性より

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\max_{v\in(2N,2N)+V_N} h_v^{V_{4N}} \geq \lambda\right] \\
&\geq \mathbb{P}\left[\max_{v\in(2N,2N)+V_N} h_v^{(2N,2N)+V_N} \geq \lambda,\ \varphi_{v_\star}^{V_{4N},(2N,2N)+V_N} \geq 0\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left[\max_{v\in(2N,2N)+V_N} h_v^{(2N,2N)+V_N} \geq \lambda\right].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

最後に $h^{(2N,2N)+V_N} \overset{\text{law}}{=} h^{V_N}$ および $\max_{v\in(2N,2N)+V_N}\vartheta_{\psi_N(v),2^\kappa N} \leq \max_{v\in V_{2^\kappa N}}\vartheta_{v,2^\kappa N}$ に注意すれば (2.10) および (2.11) より欲しかった主張が得られる．□

[9] 暗に $\mathrm{Var}(h_v^{V_{4N}}) < \mathrm{Var}(\vartheta_{\psi_N(v),2^\kappa N})$ $\forall v \in (2N,2N)+V_N$ を満たすくらい κ は十分大きくとっている．

2.2 DGFF の最大値の右裾分布：上からの評価

本節では前節の命題 2.6 を使って DGFF の最大値の右裾分布を上から精密に評価する．本節の目標は次の命題の証明を概説することである：

命題 2.7 *([38, Lemma 3.8])* ある正定数 c_1, c_2 が存在して，任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $z \geq 1$ に対して，

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N} h_v^{V_N} \geq m_N + z\right] \leq c_1 z e^{-\sqrt{2\pi} z} e^{-c_2 \frac{z^2}{n}}. \tag{2.12}$$

ただし，m_N は *(1.9)* で定義したものである．

命題 2.6 より，つぎの BRW の解析に帰着できる：

命題 2.8 ある正定数 c_1, c_2 が存在して，任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $z \geq 1$ に対して，

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N} \vartheta_{v,N} \geq m_N + z\right] \leq c_1 z e^{-\sqrt{2\pi} z} e^{-c_2 \frac{z^2}{n}}. \tag{2.13}$$

この証明で大事な点は BRW が最大値にいたる「途中過程」が存在すること，その途中過程で BRW は好き勝手な値をとれるわけではなく，ある制限 (ある「障壁」を超えない) のもとで最大値にいたる，という点である[10]．ここでいう「途中過程」，「障壁」が何であるかを説明するために BRW の定義 (2.6) を思い出そう．各 $v \in V_N$ に対して，$\vartheta_{v,N}$ は n-ステップ RW なので自然に時刻を導入することができる[11]．よって，途中過程とは時刻 0 から時刻 n までを指す．BRW が最大値 m_N に達するとき，BRW は時刻とともに 0 から m_N まで直線的に揺らぎをもちつつ増加するだろう．しかし，その揺らぎは極端には大きくならない．その上限を与えるのが「障壁」である．大雑把にいうと障壁は (直線)+(小さなこぶ) で与えられる．この障壁を超えない確率の評価は BRW の最大値分布の解析では必須であり，しばしば「障壁評価」 (barrier estimate) と呼ばれる．今の場合，実は障壁評価はドリフトつき Brown 運動が (直線)+(小さなこぶ) を超えない確率の評価に帰着される．その確率は同じ Brown 運動が直線を超えない確率と大差ないことがいえ，そのような性質はしばしば「エントロピー的反発」 (entropic repulsion) と呼ばれる[12]．したがって，Brown 運動の反射原理を用いれば障壁評価を得ることができる．

<u>命題 2.8 の証明概略.</u>

<u>**ステップ 1：BRW に Brown 運動を対応させる.**</u> BRW の定義 (2.6) を思い出す．BRW を連続過程に拡張するために各 $\overline{\phi}_{N,j,\mathcal{BD}_j(v)}$ を Brown 運動 $(\overline{\phi}_{N,j,\mathcal{BD}_j(v)}(t))_{t\in[0,1]}$ に置き換える．ただし，Brown 運動の族 $(\overline{\phi}_{N,j,\mathcal{BD}_j(v)}(t))_{t\in[0,1]}$, $v \in V_N, 0 \leq j \leq n-1$ は独立でありその分布は $(\sqrt{\frac{2\log 2}{\pi}} B_t)_{t\in[0,1]}$ $((B_t)_{t\in[0,1]}$ は 0 出発の標準

---

[10] 最大値に至る途中過程において値を制限する障壁が存在する，という考え方は BRW に限らず対数相関をもつランダム場の極大値を解析するときに欠かせないものである．

[11] ただし，BRW の定義は V_N の 2 進分解に対応しているため，大きい正方形から小さい正方形に向かう方向を時間の向きとするのが自然である．すなわち，BRW は時刻 j で位置 $\overline{\phi}_{N,n-1,\mathcal{BD}_{n-1}(v)} + \overline{\phi}_{N,n-2,\mathcal{BD}_{n-2}(v)} + \ldots + \overline{\phi}_{N,n-j,\mathcal{BD}_{n-j}(v)}$ にいると考える．表記と時間の向きが逆なのでややこしいが本稿では [38] の表記に従う．

[12] このエントロピー的反発も対数相関をもつランダム場の極大値の解析では欠かせない性質である．

Brown 運動) の分布に等しいものとする．すなわち，次のように BRW を連続過程 $(\vartheta_{v,N}(t))_{t\in[0,n]}$ に拡張する：

$$\vartheta_{v,N}(t) := \sum_{j=n-\lfloor t\rfloor}^{n-1} \overline{\phi}_{N,j,\mathcal{BD}_j(v)}(1) + \overline{\phi}_{N,n-\lfloor t\rfloor-1,\mathcal{BD}_{n-\lfloor t\rfloor-1}(v)}(t-\lfloor t\rfloor). \tag{2.14}$$

このとき，各 $v \in V_N$ に対して，

$$(\vartheta_{v,N}(t))_{t\in[0,n]} \overset{\text{law}}{=} \left(\sqrt{\frac{2\log 2}{\pi}} B_t\right)_{t\in[0,n]} \tag{2.15}$$

が成り立つ．ただし，$(B_t)_{t\in[0,n]}$ は 0 出発の標準 Brown 運動である．
このように連続過程にする利点は先に述べた障壁評価を Brown 運動の反射原理に帰着できる点にある．感覚的には BRW を分枝 Brown 運動 (BBM) に置き換えたとみなせる．以下では (2.14) で定義した $(\vartheta_{\cdot,N}(t))_{t\in[0,n]}$ のことを BBM と呼ぶことにする．

<u>**ステップ 2：障壁の設定.**</u> ステップ 1 では BRW を BBM に置き換えた．さらに (2.15) のとおり，$v \in V_N$ を固定すれば BBM は Brown 運動なので設定する障壁は Brown 運動に対するものを考えればよい．$z \geq 1$ を任意にとる．Brown 運動が時刻 n で $m_N + z$ に達する場合，Brown 運動は直線 $\frac{m_N}{n}t + z,\ t \in [0,n]$ のまわりで揺らいでいるだろう．その揺らぎの上限を $\psi_N(t)$ とおくと，Brown 運動に対する障壁を

$$\frac{m_N}{n}t + \psi_N(t) + z \tag{2.16}$$

と設定できる．具体的に $\psi_N(t)$ を与えるには BBM が障壁 (2.16) を超える確率を小さくできることを示せばよい．そのために次の事象を考える：

$$G_N(z) := \left\{\exists v \in V_N, \exists t \in [0,n], \vartheta_{N,v}(t) \geq \frac{m_N}{n}t + \psi_N(t) + z\right\}. \tag{2.17}$$

つぎの補題は ψ_N を具体的にどのようにとればよいかを教えてくれる：

補題 2.9 *([38, Lemma 3.7])* $\psi_N(t) = 10(\log(t\wedge(n-t)))_+ + 1$ ととる[13]．このとき，ある正定数 c_1, c_2 が存在して，任意の $z > 0$ に対して

$$\mathbb{P}[G_N(z)] \leq c_1 z e^{-\sqrt{2\pi}z} e^{-c_2\frac{z^2}{n}}. \tag{2.18}$$

この補題より，ψ_N として

$$\psi_N(t) := 10(\log(t\wedge(n-t)))_+ + 1, \quad t \in [0,n] \tag{2.19}$$

ととってよいことがわかった[14]．以下では ψ_N を (2.19) とおいて議論を進める．補題 2.9 の証明では BBM が初めて障壁を超える時刻で場合分けし，それに応じて

[13] $a_+ := \max\{a, 0\}$ と定義する．
[14] “10” という数に深い意味はない．十分大きい数であればよい．また 1 を足しているのは $\psi_N > 0$ になるようにするためである．

union bound をとる v の範囲も制限する必要がある．このため証明は複雑になるのでここでは省略する．証明に興味のある方は [38, Lemma 3.7] の証明をご覧ください．

ステップ 3：測度変換． ステップ 2 で導入した事象 $G_N(z)$ が起こるか起こらないかで分けて考えると (2.13) の左辺は上から次で評価できる：

$$\sum_{v\in V_N}\mathbb{P}\begin{bmatrix}\vartheta_{v,N}(t)\le \frac{m_N}{n}t+\psi_N(t)+z,\ \forall t\in[0,n],\\ \vartheta_{v,N}\in[m_N+z,\ m_N+z+1]\end{bmatrix}+\mathbb{P}[G_N(z)]. \tag{2.20}$$

ステップ 2 で (2.20) の第 2 項の評価をみたのでここでは第 1 項を評価する．$v\in V_N$ を固定する．新たな確率測度 $\mathbb{Q}_n$ を次で定義する：

$$\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}}=\exp\left\{\frac{\pi}{2\log 2}\frac{m_N}{n}\vartheta_{v,N}-\frac{\pi}{4\log 2}\frac{m_N^2}{n}\right\}. \tag{2.21}$$

Girsanov の定理より, $\mathbb{Q}_n$ のもとでは

$$\overline{\vartheta}_{v,N}(t):=\vartheta_{v,N}(t)-\frac{m_N}{n}t,\quad t\in[0,n]$$

の分布は $(\sqrt{\frac{2\log 2}{\pi}}B_t)_{t\in[0,n]}$ の分布と等しい．ただし, $(B_t)_{t\in[0,n]}$ は 0 出発の標準 Brown 運動とする．この測度 $\mathbb{Q}_n$ を使うと (2.20) の第 1 項の v に対応する確率は次のように表せる：

$$\mathbb{Q}_n\left[\exp\left\{-\frac{\pi}{2\log 2}\frac{m_N}{n}\overline{\vartheta}_{v,N}-\frac{\pi}{4\log 2}\frac{m_N^2}{n}\right\}1_{\left\{\begin{subarray}{l}\overline{\vartheta}_{v,N}(t)\le \psi_N(t)+z,\ \forall t\in[0,n],\\ \overline{\vartheta}_{v,N}\in[z,\ z+1]\end{subarray}\right\}}\right]. \tag{2.22}$$

(2.22) の定義関数内の条件を使って指数部分を評価できる．よって, (2.22) は上から次で評価できる：

$$e^{O(\frac{\log n}{n}z)}e^{-\frac{\pi}{2\log 2}\frac{m_N}{n}z}e^{-\frac{\pi}{4\log 2}\frac{m_N^2}{n}}\mathbb{Q}_n\begin{bmatrix}\overline{\vartheta}_{v,N}(t)\le \psi_N(t)+z,\ \forall t\in[0,n],\\ \overline{\vartheta}_{v,N}\in[z,\ z+1]\end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

さらに m_N の定義 (1.9) を使って (2.23) の指数部分を評価しよう．ここは単なる計算であるが, m_N がなぜ (1.9) のような形なのかにも関わってくる重要な部分でもあるので粗い評価は許されない．

$$\frac{\pi}{2\log 2}\frac{m_N}{n}=\sqrt{2\pi}+O(\frac{\log n}{n}),\ \ \frac{\pi}{4\log 2}\frac{m_N^2}{n}=(\log 4)\ n-\frac{3}{2}\log n+O(1)$$

より, (2.23) は上から次で評価できる：

$$c_1e^{-\sqrt{2\pi}z+O(\frac{\log n}{n}z)}4^{-n}n^{\frac{3}{2}}\mathbb{Q}_n\begin{bmatrix}\overline{\vartheta}_{v,N}(t)\le \psi_N(t)+z,\ \forall t\in[0,n],\\ \overline{\vartheta}_{v,N}\in[z,\ z+1]\end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

ステップ 4：障壁評価． (2.21) の直後でみたように, $\mathbb{Q}_n$ のもとで $\overline{\vartheta}_{v,N}$ は Brown 運動である．よって, (2.24) の確率は Brown 運動に対する障壁評価である．障壁

は定数関数 $z+1$ に小さな「こぶ」$10(\log(t \wedge (n-t)))_+$ をつけただけである．このような場合, 障壁を定数関数 $z+1$ に置き換えても障壁評価に大差はないことが知られている．先にも述べたようにこのような性質は「エントロピー的反発」(entropic repulsion) と呼ばれる．よって, 「エントロピー的反発」より (細かいことを抜きにすると) (2.24) の確率は次とほぼ等しい：

$$\mathbb{Q}_n\left[\overline{\vartheta}_{v,N}(t) \le z+1,\ \forall t \in [0,n],\ \overline{\vartheta}_{v,N} \in [z, z+1]\right]. \tag{2.25}$$

(2.24) の確率を (2.25) で近似できる, という正確な主張については [38, Lemma 3.6] をご覧ください．最後に Brown 運動の反射原理より (2.25) の確率は

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{2\log 2}{\pi} n}} e^{-\frac{(z+1-s)^2}{2\frac{2\log 2}{\pi} n}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{2\log 2}{\pi} n}} e^{-\frac{(z+1+s)^2}{2\frac{2\log 2}{\pi} n}} \right) ds \tag{2.26}$$

に等しく, これは上から次で評価できる[15]：

$$c_2 \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{z}{n} e^{-c_3 \frac{z^2}{n}}. \tag{2.27}$$

ステップ 5：仕上げ. (2.24) および (2.27) より, (2.20) の第 1 項は上から次で評価できる[16]：

$$c_4 4^n 4^{-n} n^{\frac{3}{2}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} z e^{-\sqrt{2\pi} z} e^{-c_3 \frac{z^2}{n} + O(\frac{\log n}{n} z)} \le c_6 z e^{-\sqrt{2\pi} z} e^{-c_5 \frac{z^2}{n}}. \tag{2.28}$$

ここでやっと m_N が (1.9) の形をしている理由がわかる．つまり m_N は 4^n および $n^{-\frac{3}{2}}$ を消せるようにうまくとったのである．これと (2.18), (2.20) より欲しかった評価 (2.13) が得られる．□

命題 2.7 の証明. 命題 2.6, 2.8 より直ちに欲しい評価 (2.12) を得る．□

本節の目標であった命題 2.7 の証明では「BRW の分布との比較」, 「障壁評価」, 「エントロピー的反発」といった技術が出てきたが, これらは今後も頻繁に使う手法であり, 汎用性は非常に高い.
最後に, 命題 2.7 を一般化したものを紹介してこの節を終える.

命題 2.10 *([38, Lemma 3.8])* ある正定数 c_1 が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $z \ge 1$, $y \ge 0$, 任意の $A \subset V_N$ に対して,

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in A} h_v^{V_N} \ge m_N + z - y\right] \le c_1 \sqrt{\frac{|A|}{|V_N|}} z e^{-\sqrt{2\pi}(z-y)}. \tag{2.29}$$

ただし, m_N は *(1.9)* で定義したものである.

[15] $\frac{z}{n} e^{-c_3 \frac{z^2}{n}}$ は $\exp\left(-\frac{(z+1-s)^2}{2\frac{2\log 2}{\pi} n}\right) - \exp\left(-\frac{(z+1+s)^2}{2\frac{2\log 2}{\pi} n}\right)$ からくる.

[16] 4^n は $|V_N| \le cN^2$ および $N = 2^n$ からくる．不等式は C を十分大きくとって $z \le C\log n$ の場合と $z \ge C\log n$ の場合に分けて考えると得られる.

2.3 変形分枝ランダムウォーク

BRW は DGFF の分布を近似するために導入されたが欠点がある. 補題 2.5 の直後に述べたように DGFF の共分散を近似するような BRW の下からの共分散評価を望めないため, DGFF の最大値の右裾分布を BRW の最大値の右裾分布で下から近似することは困難である. 本節ではこの問題点を解消するために BRW の定義を少し変更して変形分枝ランダムウォーク (MBRW) を導入し, DGFF の最大値分布が下から MBRW の最大値分布で近似できることをみる.

MBRW を定義するために必要ないくつか記号を準備する.

- (2^j-正方形) 各 $j = 0, \dots, n-1$ に対して,

$$\mathcal{B}_j := \left\{(i_1, i_2) + V_{2^j} : \ (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2\right\}. \tag{2.30}$$

特に, 各点 $v \in V_N$ に対して, v を含む $\mathcal{B}_j$-正方形の族を次で定義する：

$$\mathcal{B}_j(v) := \{B \in \mathcal{B}_j : \ v \in B\} \tag{2.31}$$

- (代表正方形) 各 $j = 0, \dots, n-1$ に対して, 左下頂点が V_N にのっている $\mathcal{B}_j$-正方形の族を次で定義する：

$$\mathcal{B}_{N,j} := \{(i_1, i_2) + V_{2^j} : \ (i_1, i_2) \in V_N\}. \tag{2.32}$$

- (周期条件をもつガウス確率変数)
(1) ガウス確率変数の族 $(\phi_{N,j,B})_{j \geq 0, B \in \mathcal{B}_{N,j}}$ を次で定義する: 各 $j = 0, \dots, n-1$ に対して,

$$(\phi_{N,j,B})_{B \in \mathcal{B}_{N,j}} := \text{i.i.d. } N(0, \frac{2\log 2}{\pi} 2^{-2j})\text{-確率変数の族} \tag{2.33}$$

さらに $(\phi_{N,j,B})_{B \in \mathcal{B}_{N,j}}$, $j = 0, \dots, n-1$ は独立.
(2) 各 $j = 0, \dots, n-1$, $B \in \mathcal{B}_j$ に対して,

$$\phi_{N,j,B} := \phi_{N,j,\widetilde{B}}. \tag{2.34}$$

ただし, $\widetilde{B} \in \mathcal{B}_{N,j}$ を N の倍数分だけ平行移動したら B と一致するものとする. つまり, ある $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, $B = (i_1 N, i_2 N) + \widetilde{B}$ となるものとする. このような関係にあるとき, $B \sim_N \widetilde{B}$ と表記する.

各 $v \in V_N$ に対して,

$$\xi_{v,N} := \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{B \in \mathcal{B}_j(v)} \phi_{N,j,B}. \tag{2.35}$$

とおき, これを変形分枝ランダムウォーク (MBRW) と呼ぶ. MBRW は BRW とは異なり上からだけでなく下からも「よい」共分散評価をもち, それは DGFF の共分散を精度よく近似する：

補題 2.11 *(MBRW の共分散評価, [41, Lemma 2.2])* ある正定数 $C = C(\delta)$ が存在して, 任意の $u, v \in V_N$, $u \neq v$ に対して,

$$Var(\xi_{u,N}) = \frac{2\log 2}{\pi} n,$$

$$\left| Cov(\xi_u, \xi_v) - \frac{2\log 2}{\pi} (n - \log_2 d_N(u,v)) \right| \leq C.$$

ただし, $d_N(u,v)$ は V_N をトーラスとみなしたときの ℓ^2-距離とする. すなわち[17],

$$d_N(u,v) := \min_{w \sim_N v} |u - w|. \tag{2.36}$$

証明. 分散の評価は MBRW の定義 (2.35) より明らか[18]. 任意の $u, v \in V_N$, $u \neq v$ をとる. MBRW の定義 (2.35) より, $\mathrm{Cov}(\xi_{u,N}, \xi_{v,N})$ はつぎと等しい：

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} \sum_{B \in \mathcal{B}_j(u), \widetilde{B} \in \mathcal{B}_j(v)} \mathbb{E}\left[\phi_{N,i,F_i(B)} \phi_{N,j,F_j(\widetilde{B})}\right]. \tag{2.37}$$

ただし, $B \in \mathcal{B}_i$ に対して, $F_i(B)$ は $F_i(B) \in \mathcal{B}_{N,i}$ かつ $B \sim_N F_i(B)$ なるものとする. $\phi_{N,i,B}$ の定義より,

$$\mathbb{E}\left[\phi_{N,i,F_i(B)} \phi_{N,j,F_j(\widetilde{B})}\right] = \begin{cases} \frac{2\log 2}{\pi} 2^{-2j} & (i = j \text{ かつ } F_j(B) = F_j(\widetilde{B})) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

これより, (2.37) は次と等しい：

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left| \left\{ (B, \widetilde{B}) \in \mathcal{B}_j(u) \times \mathcal{B}_j(v) : \ F_j(B) = F_j(\widetilde{B}) \right\} \right| \frac{2\log 2}{\pi} 2^{-2j}. \tag{2.38}$$

ここで (2.38) に現れる集合のサイズは次を満たす $B \in \mathcal{B}_{N,j}$ の個数と等しいことに注意する：

$$\text{ある } u' \sim_N u \text{ とある } v' \sim_N v \text{ が存在して}, B \text{ は } u', v' \text{を両方とも含む.} \tag{2.39}$$

幾何的な考察をすることにより条件 (2.39) を満たす $B \in \mathcal{B}_{N,j}$ の個数は

$$(2^j - d_\infty(u', v'))^2 \text{以上 } 2^{2j} \text{以下} \tag{2.40}$$

であるとわかる. さらに $B \in \mathcal{B}_{N,j}$ が (2.39) を満たすためにはつぎの j の条件が必要である：

$$2^j \geq d_\infty(u', v'). \tag{2.41}$$

---

[17] $w \sim_N v \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists i_1, i_2 \in \mathbb{Z}, \ w = (i_1 N, i_2 N) + v$
[18] $|\mathcal{B}_j(v)| = 2^{2j}$ であることに注意.

さらに (2.39) が成り立つとき, $d_\infty(u',v') = d_\infty^N(u,v)$ [19] かつ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d_N(u,v) \le d_\infty^N(u,v) \le d_N(u,v). \tag{2.42}$$

したがって, (2.39)-(2.42) より, (2.38) は上から

$$\sum_{\log_2(\frac{1}{\sqrt{2}} d_N(u,v)) \le j \le n-1} 2^{2j} \frac{2\log 2}{\pi} 2^{-2j} \tag{2.43}$$

で評価でき, 下から

$$\sum_{\log_2(d_N(u,v)) \le j \le n-1} (2^j - d_N(u,v))^2 \frac{2\log 2}{\pi} 2^{-2j} \tag{2.44}$$

で評価できる. (2.43), (2.44) を計算することで欲しかった MBRW の共分散評価を得る. □

補題 2.4, 2.11 および Slepian の補題 (補題 2.3) を使うと DGFF の最大値分布を下から MBRW の最大値分布で近似できる：

命題 2.12 *([57, Lemma 2.6])* ある正定数 κ が存在して, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N} h_v^{V_N} \ge \lambda\right] \ge \frac{1}{2}\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_{2^{-\kappa}N}} \xi_{v,2^{-\kappa}N} \ge \lambda\right].$$

この命題の証明は命題 2.6 の証明と同様なのでここでは省略する. 証明に興味のある方は [57, Lemma 2.6] の証明をご覧ください.

2.4 DGFF の最大値の右裾分布：下からの評価

本節では DGFF の最大値の右裾分布を下から精密に評価する. 本節の目標は次の命題の証明を概説することである：

命題 2.13 *([57, Theorem 1.4])* ある正定数 c が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $z \in [1, \sqrt{\log N}]$ に対して,

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N} h_v^{V_N} \ge m_N + z\right] \ge cze^{-\sqrt{2\pi}z}. \tag{2.45}$$

命題 2.12 によって命題 2.13 の証明は次の命題を示すことに帰着される：

---

[19] $d_\infty^N(x,y) := \min_{z \sim_N y} d_\infty(x,z)$ と定義する. $d_\infty(u',v') = d_\infty^N(u,v)$ が成り立つ理由は以下の通り：まず $u' \sim_N u$, $v' \sim_N v$ より $d_\infty^N(u,v) = d_\infty^N(u',v')$. つぎに (2.41) かつ $j \le n-1$ に注意すると, 任意の $w \sim_N v'$, $w \ne v'$ に対して,

$$d_\infty(u',w) \ge d_\infty(v',w) - d_\infty(u',v') \ge N - 2^j \ge \frac{N}{2} \ge d_\infty(u',v').$$

よって $d_\infty^N(u,v) = d_\infty^N(u',v') = d_\infty(u',v')$ が成り立つ.

命題 2.14 *([57, Lemma 3.7])* ある正定数 c が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$ と任意の $z \in [1, \sqrt{\log N}]$ に対して,

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N} \xi_{v,N} \geq m_N + z\right] \geq cze^{-\sqrt{2\pi}z}. \tag{2.46}$$

2 次モーメント法 (second moment method) および BRW の分枝構造を使ってこの命題を示す.

2 次モーメント法を使うために各 $v \in V_N$ に対して $\xi_{v,N}$ が $m_N + z$ にいたる典型的な道筋を考え出す必要がある. そこで 2.2 節でみた「障壁」がここでも重要な役割を果たす. BRW のときと同様に MBRW の定義 (2.35) の部分和

$$\xi_{v,N}(\ell) = \sum_{j=n-\ell}^{n-1} \sum_{B \in \mathcal{B}_j(v)} \phi_{N,j,B}, \quad k = 0, \cdots, n \tag{2.47}$$

をとることで自然に時間の概念を入れることができる. BRW の場合と同様に MBRW $\xi_{v,N}$ が $m_N + z$ に達するとき, $\xi_{v,N}(\ell)$ は直線 $\frac{m_N}{n}\ell + z$ に沿って揺らぎながら時刻 n で $m_N + z$ に達すると考えられる. 今の場合, 最も単純な直線 $\frac{m_N}{n}\ell + z$ を「障壁」として設定すればよい[20]. そこで各 $v \in V_N$ に対して, $\xi_{v,N}$ が $m_N + z$ に達する典型的な事象を次で定義する：

$$A_v(z) := \left\{\xi_{v,N}(\ell) \leq \frac{m_N}{n}\ell + z,\ \ell = 0, \ldots, n,\ \xi_{v,N} \in [m_N + z - 1, m_N + z]\right\}. \tag{2.48}$$

この事象が起こる $v \in V_N$ の個数を次でおく：

$$\mathcal{Z}_N := \sum_{v \in V_N} 1_{A_v(z)}. \tag{2.49}$$

ここで "$\mathcal{Z}_N \geq 1$"ならば「ある $v \in V_N$ が存在して事象 $A_v(z)$ が起こる」がいえ, さらに $A_v(z)$ が起こればもちろん "$\max_{u \in V_N} \xi_{u,N} \geq m_N + z$"がいえるので, つぎが成り立つ：

$$\mathbb{P}[\max_{v \in V_N} \xi_{v,N} \geq m_N + z] \geq \mathbb{P}[\mathcal{Z}_N \geq 1]. \tag{2.50}$$

よって, (2.50) の右辺が下から (2.46) の右辺の形のもので評価できることを示せばよい. そこで 2 次モーメント法を使う：

$$\mathbb{P}[\mathcal{Z}_N \geq 1] \geq \frac{(\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N])^2}{\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N^2]}. \tag{2.51}$$

これより $\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N]$ を下から評価し, $\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N^2]$ を上から評価すればよい. $\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N]$ の評価は (2.20) の第 1 項の評価法とほぼ同じ[21] なので証明は省略して結果だけ記す：

$$\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N] \geq c_1 ze^{-\sqrt{2\pi}z}. \tag{2.52}$$

---

[20]いま求めたいのは DGFF の最大値が $m_N + z$ 以上になる確率の下からの評価なので BRW の上からの評価で設定した「直線+小さなこぶ」のような複雑な障壁を設定する必要はなく, 解析しやすい直線の障壁を採用すればよい. ここでも障壁として「直線+こぶ」, 「直線」どちらをとっても確率としては大差ない, というエントロピー的反発が背後にある.

[21]つまり, 測度変換した後, 障壁評価する. ただし, 今の場合 $\xi_{v,N}(\ell)$ は離散時間過程なので RW の障壁評価 (Ballot theorem と呼ばれる) を使う. Ballot theorem については例えば [4, Theorem 1] あるいは [39, Lemma 2.1] をご覧ください. また Brown 運動の障壁評価に帰着させる方法もある. それについては例えば [21, Lemma 2.3] をご覧ください.

2 次モーメント $\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N^2]$ の評価は計算量が多いという点で厄介である. しかし, 基本方針は明快で

「分枝構造を使い独立な “枝”に分け, 各 “枝”の障壁評価に帰着させる」

というものである. 障壁評価については今までに詳しく説明したのでここではどのように独立な枝に分解するかに焦点を当てる.

まず, 当たり前の等式だが

$$\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N^2] = \sum_{u,v \in V_N} \mathbb{P}[A_u(z) \cap A_v(z)] \tag{2.53}$$

より, $\mathbb{P}[A_u(z) \cap A_v(z)]$ を上から評価すればよい. $u, v \in V_N$, $u \neq v$ を固定しておく. MBRW の部分和 (2.47) を思い出そう. BRW ほど単純ではないが MBRW も分枝構造をもつ : u を含む正方形の族の 1 辺は 2^{n-1}, 2^{n-2}, ... とどんどん小さくなっていき, それぞれのスケールに対して $\sum_{B \in \mathcal{B}_{n-1}(u)} \phi_{N,n-1,B}$, $\sum_{B \in \mathcal{B}_{n-2}(u)} \phi_{N,n-1,B}$, ..., が対応している. v に対しても同様である. スケール j が大きければ u と v を同時に含む正方形が存在するだろう. このとき対応する $\sum_{B \in \mathcal{B}_j(u)} \phi_{N,j,B}$ と $\sum_{B \in \mathcal{B}_j(v)} \phi_{N,j,B}$ は独立ではない. スケールが小さくなっていくとどこかのスケール k で u を含む正方形の族と v を含む正方形の族は交わらなくなるだろう. このとき任意の $j \leq k$ に対して対応する $\sum_{B \in \mathcal{B}_j(u)} \phi_{N,j,B}$ と $\sum_{B \in \mathcal{B}_j(v)} \phi_{N,j,B}$ は独立である. この意味で u, v はスケール k で分枝すると考え, $u \sim_k v$ と表記することにする. $\overline{\xi}_{u,N}(\ell) := \xi_{u,N}(\ell) - \frac{m_N}{n}\ell$ $(\ell = 0, \dots n)$ とおく. $\overline{\xi}_{v,N}(\ell)$ も同様に定義する. $\xi_{u,N} - \xi_{u,N}(\ell)$ と $\xi_{v,N} - \xi_{v,N}(\ell)$ は $\ell = 1, \cdots, n-k-1$ のとき独立ではなく, $\ell \geq n-k$ のとき独立である.

$$A^{\uparrow}(y) := \left\{ \overline{\xi}_{u,N}(\ell) \leq z,\ \forall \ell = 1, \dots, n-k,\ \overline{\xi}_{u,N}(n-k) \in [y-1, y] \right\},\ y \leq z,$$

$$A_w^{\downarrow} := \left\{ \overline{\xi}_{w,N}(n-k+\ell) \leq z,\ \forall \ell \leq k,\ \overline{\xi}_{w,N} \in [z-1, z] \right\},\ w \in \{u, v\}$$

とおくと, $\mathbb{P}[A_u(z) \cap A_v(z)]$ は上から $\sum_{y \leq z} \mathbb{P}[A^{\uparrow}(y) \cap A_u^{\downarrow} \cap A_v^{\downarrow}]$ で評価でき, さらにこれは上記の独立性より上から

$$\sum_{y \leq z} \mathbb{P}[A^{\uparrow}(y)] \cdot \prod_{w \in \{u,v\}} \left(\sup_{s \in [y-1,y]} \mathbb{P}[A_w^{\downarrow} | \overline{\xi}_{w,N}(n-k) = s] \right). \tag{2.54}$$

で評価できる. BRW の解析でしたように (2.54) の 3 つの因子は測度変換して障壁評価すれば評価可能である. 詳しくは [57, Lemma 3.7] の証明をご覧ください. ここでは結論だけ記す :

$$\mathbb{E}[\mathcal{Z}_N^2] \leq c_2 z e^{-\sqrt{2\pi} z}. \tag{2.55}$$

したがって, (2.51), (2.52), (2.55) より欲しかった評価 (2.46) を得る. □

<u>命題 2.13 の証明.</u> 命題 2.12, 2.14 より直ちに (2.45) を得る. □

命題 2.14 の証明では 2 次モーメント法を使ったが, このとき分枝構造が 2 次モーメントを計算する上で鍵となった. 対数相関をもつランダム場の極大値の解析ではこのような分枝構造を利用して独立性を獲得する decoupling の手法は重要な技術の 1 つである.

2.5 DGFF の最大値の右裾分布の極限

DGFF の最大値の右裾分布の正確な漸近挙動が必要となる：

命題 2.15 *([38, Proposition 4.1])* ある正定数 α^* が存在して，任意の開集合 $A \subset (0,1)^2$ に対して，

$$\lim_{z\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\left|z^{-1}e^{\sqrt{2\pi}z}\mathbb{P}\left[\max_{v\in NA}h_v^{V_N}\geq m_N+z\right]-\alpha^*\int_A\psi^{(0,1)^2}(x)dx\right|=0. \tag{2.56}$$

ただし有界な開集合 D が与えられたとき，$\psi^D(x)$ はつぎで定義される：

$$\psi^D(x):=\exp\left\{2\int_{\partial D}\Pi^D(x,dy)\log|y-x|\right\}. \tag{2.57}$$

注 2.16 *(Update:命題 2.15 の heuristics.) Union bound* をとることにより，*(2.56)* の確率はつぎで近似できるだろう：

$$\sum_{\frac{x}{N}\in A}\mathbb{P}[h_x^{V_N}\geq m_N+z, h_x^{V_N}\geq h^{V_N}]. \tag{2.58}$$

ただし，“$h_x^{V_N}\geq h^{V_N}$” は x で極大値をとることを表すものとする．条件付き確率を考えることにより *(2.58)* の各確率は

$$\mathbb{P}[h_x^{V_N}\geq h^{V_N}|h_x^{V_N}\geq m_N+z]\mathbb{P}[h_x^{V_N}\geq m_N+z] \tag{2.59}$$

と変形できる．障壁評価により *(2.59)* の第 1 因子は $c_1\frac{z}{\log N}$ の形で表せるだろう *(c_1 はある正定数)*．ガウス確率変数の裾分布の漸近挙動より *(2.59)* の第 2 因子は

$$\frac{\sqrt{G^{V_N}(x,x)}}{\sqrt{2\pi}(m_N+z)}e^{-\frac{(m_N+z)^2}{2G^{V_N}(x,x)}} \tag{2.60}$$

の形で表せるだろう．ここでポイントとなるのは補題 *1.7* でみた *Green* 関数の漸近挙動である：

$$G^{V_N}(x,x)\approx\frac{2}{\pi}\log N+c_0+\frac{2}{\pi}\int_{\partial(0,1)^2}\Pi^{(0,1)^2}(\frac{x}{N},dy)\log|\frac{x}{N}-y|.$$

これを *(2.60)* に代入すると，ある正定数 c_2 が存在して *(2.60)* はつぎのように表せる：

$$\frac{c_2}{\sqrt{\log N}}N^{-2}(\log N)^{\frac{3}{2}}\psi^{(0,1)^2}(\frac{x}{N})e^{-\sqrt{2\pi}z}.$$

以上より，*(2.58)* はつぎの形で表せるだろう：

$$c_1c_2ze^{-\sqrt{2\pi}z}\frac{1}{N^2}\sum_{\frac{x}{N}\in A}\psi^{(0,1)^2}(\frac{x}{N}).$$

和の部分を *Riemann* 和とみれば *(2.56)* の形が出るだろうと予想される．

以下で出てくる z は (2.56) で現れる z と考えてください.

この証明では V_N の 2 段階の分解が必要となる. それらのスケールを

$$1 \ll \widetilde{L} \ll L \ll N \tag{2.61}$$

とする. ただし,

$$N = 2^n, L = 2^{\ell}, \widetilde{L} = 2^{\widetilde{\ell}},\ \widetilde{L} \geq 2^{z^4},\ h := \frac{L}{\widetilde{L}} \leq \log z,\ \ \lim_{z\to\infty} h = \infty \tag{2.62}$$

を満たすとする. 補題 2.4 でみたように, DGFF の「よい」共分散評価を得るには点が正方形の境界から十分離れている必要がある. その境界からの離れ具合を表すものを $\delta \in (0, \frac{1}{100})$ とする. 正方形 B が与えられたとき

境界から $\delta\times$ (1 辺の長さ) 以上離れた B の内部を δ-内部と呼び, B^{δ} と表記する.

以下では次のように V_N^{δ} を 2 段階で分解する：

<u>段階 1.</u> V_N^{δ} を $L \times L$-正方形に分解する.

<u>段階 2.</u> 各 $L \times L$-正方形の δ-内部を $\widetilde{L} \times \widetilde{L}$-正方形に分解し, さらにそれらの δ-内部を考える.

この V_N^{δ} の分解によりできる部分正方形などを次のように記号で表すことにする.

- $\mathcal{B}_N \cdots$ 段階 1 で得られる $L \times L$-正方形の族
- $\widetilde{\mathcal{B}}_B$ $(B \in \mathcal{B}_N) \cdots$ 段階 2 で B を分解して得る $\widetilde{L} \times \widetilde{L}$-正方形の δ-内部の族
- $\widetilde{\mathcal{B}}_N := \bigcup_{B\in\mathcal{B}_N} \widetilde{\mathcal{B}}_B$
- $c_{\widetilde{B}}\ \cdots\ \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}_N$ の中心
- $B_{v,N}\ \cdots\ v \in V_N$ を含む $\mathcal{B}_N -$ 正方形
- $\widetilde{B}_{v,N}\ \cdots\ v \in V_N$ を含む $\widetilde{\mathcal{B}}_N -$ 正方形
- $c_v := c_{\widetilde{B}_{v,N}}$
- $\widetilde{V}_N := \bigcup_{\widetilde{B}\in\widetilde{\mathcal{B}}_N} \widetilde{B}$

<u>ステップ 1：**DGFF が最大値をとる範囲を $\widetilde{V}_N$ 上に制限する.**</u>

命題 2.10 によって, $\delta \to 0$ とすれば最大値をとる範囲を $\widetilde{V}_N$ 上に制限してもよいことがわかる. よって命題 2.15 の証明はつぎの命題を示すことに帰着される：

命題 2.17 *(単純化 1, [38, Proposition 4.3])* ある正定数 α_{δ}^* が存在して, 任意の開集合 $A \subset [\delta, 1-\delta]^2$ に対して,

$$\lim_{z\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \left| z^{-1} e^{\sqrt{2\pi}z} \mathbb{P}\left[\max_{v\in NA\cap\widetilde{V}_N} h_v^{V_N} \geq m_N + z \right] - \alpha_{\delta}^* \int_A \psi^{(0,1)^2}(x)dx \right| = 0. \tag{2.63}$$

ただし, $\psi^{(0,1)^2}$ は *(2.57)* で定義したもの. またある α^* が存在して $\lim_{\delta\to 0} \alpha_{\delta}^* = \alpha^*$.

命題 2.17 の証明では DGFF を分解し一部を MBRW で近似する.

ステップ 2 : DGFF を $\mathcal{B}_N$-正方形上の DGFF と離散調和関数に分解する.

各 $v \in \widetilde{V}_N$ に対して

$$h_v^{V_N} = X_{v,N} + Y_{v,N} \tag{2.64}$$

と分解する. ただし, $X_{v,N} := \mathbb{E}\left[h_v^{V_N} | \sigma(h_u^{V_N} : u \in \partial B_{v,N})\right]$. Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) より, $X_{v,N}$ と $Y_{v,N}$ は独立で $Y_{v,N} \overset{\text{law}}{=} h_v^{B_{v,N}}$. この $X_{v,N}$ を $B_{v,N}$ の中心 c_v に対応するもの $X_{c_v,N}$ に置き換える :

$$\widetilde{h}_{v,N} := X_{c_v,N} + Y_{v,N}. \tag{2.65}$$

この置き換えによる大きな影響はないことがつぎの命題からわかる :

補題 2.18 *(単純化 2, [38, Lemma 4.5])* 任意の開集合 $A \subset [\delta, 1-\delta]^2$ に対して, ある δ_z, $\lim_{z\to\infty} \delta_z = 0$ が存在して,

$$\liminf_{z\to\infty} \liminf_{N\to\infty} \frac{\mathbb{P}[\max_{v\in\widetilde{V}_N\cap NA} h_v^{V_N} \geq m_N + z]}{\mathbb{P}[\max_{v\in\widetilde{V}_N\cap NA} \widetilde{h}_{v,N} \geq m_N + z + \delta_z]} \geq 1, \tag{2.66}$$

$$\limsup_{z\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{\mathbb{P}[\max_{v\in\widetilde{V}_N\cap NA} h_v^{V_N} \geq m_N + z]}{\mathbb{P}[\max_{v\in\widetilde{V}_N\cap NA} \widetilde{h}_{v,N} \geq m_N + z - \delta_z]} \leq 1. \tag{2.67}$$

補題 2.18 の証明は離散調和測度に対する Harnack 不等式および Slepian の補題 (補題 2.3) による. 詳細については [38, Lemmas 4.4, 4.5] の証明をご覧ください.

ステップ 3 : $X_{\widetilde{B}}$, $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}_N$ を MBRW で近似する.

$\widetilde{\mathcal{B}}_N$-正方形の中心の集まりを

$$\Xi_N := \{c_{\widetilde{B}} : \ \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}_N\} \tag{2.68}$$

とおく. MBRW の定義 (2.35) を思い出してください. MBRW が DGFF を近似することに基づいて $X_{v,N}$, $v \in \Xi_N$ を MBRW で置き換える : 各 $v \in \Xi_N$ に対して,

$$S_{v,N} := \sum_{j=\ell}^{n-1} \sum_{B\in\mathcal{B}_j(v)} \phi_{N,j,B} \tag{2.69}$$

とおく[22]. この $S_{\cdot,N}$ の共分散は $X_{\cdot,N}$ の共分散を近似する : ある正定数 C_δ が存在して,

$$|\mathrm{Cov}\,(S_{u,N}, S_{v,N}) - \mathrm{Cov}\,(X_{u,N}, X_{v,N})| \leq C_\delta, \ \forall u, v \in \Xi_N. \tag{2.70}$$

この直観的説明は以下の通り : $Y_{\cdot,N}$ は $L\times L$-正方形上の DGFF なので ($L = 2^\ell$ であったことを思い出すと) その共分散は MBRW $\sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{B\in\mathcal{B}_j(\cdot)} \phi_{N,j,B} = \xi_{\cdot,N} - S_{\cdot,N}$

[22] $N = 2^n$, $L = 2^\ell$ であることを思い出してください.

の共分散によって近似される．同様に $h_{\cdot}^{V_N}$ は V_N 上の DGFF なのでその共分散は MBRW$\xi_{\cdot,N}$ の共分散によって近似される．このことおよび $h_{\cdot}^{V_N} = X_{\cdot,N} + Y_{\cdot,N}$ かつ $X_{\cdot,N}$ と $Y_{\cdot,N}$ は独立より，$X_{\cdot,N}$ の共分散は ($\xi_{\cdot_N}$ の共分散) − ($\xi_{v,N} - S_{v.N}$ の共分散) = ($S_{v,N}$ の共分散) によって近似される．詳細は [38, (4.16)] をご覧ください．

ステップ 4：Slepian の補題を使うために MBRW を微調整する．
ステップ 3 の (2.70) の近似にもとづいて，(2.65) の $X_{c_v,N}$ を $S_{c_v,N}$ に置き換えて $\max_{v\in\widetilde{V}_N} \widetilde{h}_{v,N}$ を $\max_{v\in\widetilde{V}_N}(S_{c_v,N} + Y_{v,N})$ で近似したい．そのために Slepian の補題 (補題 2.3) を使いたいのだが，Slepian の補題では比較する 2 つのガウス場の分散が一致することを要求しているので $S_{\cdot,N}$ のままでは不十分であり，微調整が必要である．どのように微調整するかを以下で述べる．$r := C_\star \log h$ とおく[23]．($C_\star$ は δ のみに依存する正数で後で調整する．) 各 $v \in \Xi_N$ に対して，$S_{v,N}$ から r 個の項を取り除いてできるものを考える．そこに $X_{v,N}$ と同じ分散になるように独立なガウス確率変数を補ってつくられるものを $X^{\mathrm{up}}_{v,N,r}$, $X^{\mathrm{lw}}_{v,N,r}$ とする：

$$X^{\mathrm{up}}_{v,N,r} := \sum_{j=\ell}^{n-r} \sum_{B\in\mathcal{B}_j(v)} \phi_{N,j,B} + \phi_{v,N,r}, \tag{2.71}$$

$$X^{\mathrm{lw}}_{v,N,r} := \sum_{j=\ell+r}^{n-1} \sum_{B\in\mathcal{B}_j(v)} \phi_{N,j,B} + a_{v,N.r}\phi. \tag{2.72}$$

ただし，

- $(\phi_{v,N,r})_{v\in\Xi_N}$ $\cdots$ 独立な期待値 0 のガウス確率変数族で $(S_{v,N})_{v\in\Xi_N}$ と独立で $\mathrm{Var}(X^{\mathrm{up}}_{v,N,r}) = \mathrm{Var}(X_{v,N})$, $v \in \Xi_N$ なるもの．
- ϕ $\cdots$ 標準ガウス確率変数で $(S_{v,N})_{v\in\Xi_N}$ と独立．
- $(a_{v,N,r})_{v\in\Xi_N}$ $\cdots$ 正定数の族で $\mathrm{Var}(X^{\mathrm{lw}}_{v,N,r}) = \mathrm{Var}(X_{v,N})$, $v \in \Xi_N$ なるもの．

この $X^{\mathrm{up}}_{\cdot,N}$, $X^{\mathrm{lw}}_{\cdot,N}$ は $X_{\cdot,N}$ の共分散を近似する：$r = C_\star \log h$ でとったことを思い出す．この $C_\star$ が十分大きいとき，

$$\mathbb{E}\left[X^{\mathrm{up}}_{u,N,r} X^{\mathrm{up}}_{v,N,r}\right] \le \mathbb{E}\left[X_{u,N} X_{v,N}\right] \le \mathbb{E}\left[X^{\mathrm{lw}}_{u,N,r} X^{\mathrm{lw}}_{v,N,r}\right], \quad u, v \in \Xi_N. \tag{2.73}$$

この証明はステップ 2 の近似 (2.70) に基づいているがテクニカルなためここでは省略する．証明については [38, Lemma 4.6] をご覧ください．各 $v \in \widetilde{V}_N$ に対して，(2.65) で定義した $\widetilde{h}_{v,N}$ の $X_{c_v,N}$ を $X^{\mathrm{up}}_{c_v,N,r}$, $X^{\mathrm{lw}}_{c_v,N,r}$ に置き換えたものをそれぞれ $h^{\mathrm{up}}_{v,N}$, $h^{\mathrm{lw}}_{v,N}$ とおく：

$$h^{\mathrm{up}}_{v,N} := X^{\mathrm{up}}_{c_v,N,r} + Y_{v,N}, \tag{2.74}$$

[23] $h = \frac{L}{\widetilde{L}}$ と定義したことを思い出してください．このような形の r をとる理由は下の (2.73) を成立させるためである．これはテクニカルなので詳しくは述べない．詳細については [38, Lemma 4.6] の証明をご覧ください．

$$h^{\mathrm{lw}}_{v,N} := X^{\mathrm{lw}}_{c_v,N,r} + Y_{v,N}. \tag{2.75}$$

ステップ 5 : $\widetilde{h}_{\cdot,N}$ を $h^{\mathbf{up}}_{\cdot,N}$, $h^{\mathbf{lw}}_{\cdot,N}$ で近似する.

ステップ 4 の近似 (2.73) および Slepian の補題 (補題 2.3) より $\widetilde{h}_{\cdot,N}$ の最大値分布の右裾分布は $\widetilde{h}^{\mathrm{up}}_{\cdot,N}$, $\widetilde{h}^{\mathrm{lw}}_{\cdot,N}$ の最大値の右裾分布で近似できる :

補題 2.19 *(単純化 3, [38, (4.24)])* 任意の開集合 $A \subset [\delta, 1-\delta]^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in \widetilde{V}_N \cap NA} h^{lw}_{v,N} \geq \lambda\right] \leq \mathbb{P}\left[\max_{v \in \widetilde{V}_N \cap NA} \widetilde{h}_{v,N} \geq \lambda\right] \leq \mathbb{P}\left[\max_{v \in \widetilde{V}_N \cap NA} h^{up}_{v,N} \geq \lambda\right]. \tag{2.76}$$

補題 2.18, 2.19 より $h^{\mathrm{up}}_{\cdot,N}$, $h^{\mathrm{lw}}_{\cdot,N}$ の最大値の右裾分布は DGFF $h^{V_N}_{\cdot}$ の最大値の右裾分布をよく近似する. 以下ではこれらの右裾分布を詳細に解析していく.

ステップ 6 : $h^{\mathbf{up}}_{\cdot,N}$, $h^{\mathbf{lw}}_{\cdot,N}$ の最大値の右裾分布を数え上げ測度で近似する.

BRW および MBRW の最大値の右裾分布を評価するときによい近似を与えてくれたものは「障壁を超えずに最大値付近に達する点の数の期待値」であった. 具体的には (2.20) の第 1 項目, (2.49) の期待値がそれぞれ BRW, MBRW の最大値の右裾分布をよく近似した. これと同様の要領で $h^{\mathrm{up}}_{\cdot,N}$, $h^{\mathrm{lw}}_{\cdot,N}$ の最大値の右裾分布を近似していこう.

まず, BRW を BBM に拡張したときと同様な方法で $(X^{\mathrm{up}}_{v,N,r})_{v\in\Xi_N}$, $(X^{\mathrm{lw}}_{v,N,r})_{v\in\Xi_N}$ をそれぞれBBM $\{(X^{\mathrm{up}}_{v,N,r}(t))_{t\in[0,n_{v,N}]};\ v\in\Xi_N\}$, $\{(X^{\mathrm{lw}}_{v,N,r}(t))_{t\in[0,n_{v,N}]};\ v\in\Xi_N\}$ に拡張できる. ただし, 各 $v \in \Xi_N$ に対し,

$$n_{v,N} := \frac{\pi}{2\log 2}\mathrm{Var}(X_{v,N}) \tag{2.77}$$

と定めた. $n_{v,N} \approx n - \ell$ と近似できることに注意. また, 各 $(X^{\mathrm{up}}_{v,N,r}(t))_{t\in[0,n_{v,N}]}$ の分布は $(\sqrt{\frac{2\log 2}{\pi}}B_t)_{t\in[0,n_{v,N}]}$ と等しい. ただし $(B_t)_{t\geq 0}$ は 0 出発の標準 Brown 運動とする. これらの BBM の詳細な構成については [38, Section 4.2] をご覧ください.

BBM を構成したので各 $v \in \Xi_N$ に対して $X^{\mathrm{up}}_{v,N,r}(t)$ が障壁を超えずかつ $h^{\mathrm{up}}_{\cdot,N}$ が $\widetilde{B}_v$ 上で最大値付近に達する事象を定義できる :

$$E^{\mathrm{up}}_{v,N}(z) := \left\{X^{\mathrm{up}}_{v,N}(t) \leq \frac{m_N}{n}t + z,\ \forall t \in [0, n_{v,N}],\ \max_{u\in\widetilde{B}_v} h^{\mathrm{up}}_{u,N} \geq m_N + z\right\}. \tag{2.78}$$

全く同様に各 $v \in \Xi_N$ に対して $E^{\mathrm{lw}}_{v,N}(z)$ も定義できる. そこで事象 $E^{\mathrm{up}}_{v,N}(z)$, $E^{\mathrm{lw}}_{v,N}(z)$ が起こる $v \in \Xi_N$ の数を数え上げる (ランダム) 測度をつぎで定義する : 各 $A \subset [\delta, 1-\delta]^2$ に対して,

$$\Lambda^{\mathrm{up}}_{N,z}(A) := \sum_{v\in\Xi_N\cap NA} 1_{E^{\mathrm{up}}_{v,N}(z)}, \quad \Lambda^{\mathrm{lw}}_{N,z}(A) := \sum_{v\in\Xi_N\cap NA} 1_{E^{\mathrm{lw}}_{v,N}(z)}. \tag{2.79}$$

この数え上げ測度の期待値版が $h^{\mathrm{up}}_{\cdot,N}$, $h^{\mathrm{lw}}_{\cdot,N}$ の最大値の右裾分布をよく近似する：

命題 2.20 *([38, Proposition 4.8])* 任意の開正方形 $A \subset [\delta, 1-\delta]^2$ に対して,

$$\lim_{z\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}\left[\max_{v\in\widetilde{V}_N\cap NA} h^{up}_{v,N} \geq m_N + z\right]}{\mathbb{E}\left[\Lambda^{up}_{N,z}(A)\right]} = \lim_{z\to\infty}\liminf_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}\left[\max_{v\in\widetilde{V}_N\cap NA} h^{up}_{v,N} \geq m_N + z\right]}{\mathbb{E}\left[\Lambda^{up}_{N,z}(A)\right]} = 1, \tag{2.80}$$

$$\lim_{z\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}\left[\max_{v\in\widetilde{V}_N\cap NA} h^{lw}_{v,N} \geq m_N + z\right]}{\mathbb{E}\left[\Lambda^{lw}_{N,z}(A)\right]} = \lim_{z\to\infty}\liminf_{N\to\infty}\frac{\mathbb{P}\left[\max_{v\in\widetilde{V}_N\cap NA} h^{lw}_{v,N} \geq m_N + z\right]}{\mathbb{E}\left[\Lambda^{lw}_{N,z}(A)\right]} = 1. \tag{2.81}$$

この証明はいくつものステップを要すること, 基本方針は BRW および MBRW の最大値の右裾分布の解析方法と同様であることからここでは命題 2.20 の証明を省略する. 興味のある方は [38, Section 4.2] をご覧ください.

ステップ 6：数え上げ測度の期待値版を精密に計算する.

このステップでは数え上げ測度の期待値版の正確な漸近挙動を調べる. $\mathbb{E}[\Lambda^{\mathrm{up}}_{N,z}(\cdot)] = \mathbb{E}[\Lambda^{\mathrm{lw}}_{N,z}(\cdot)]$ なので $\mathbb{E}[\Lambda^{\mathrm{lw}}_{N,z}(z)]$ のみを考えればよい.

命題 2.21 *([38, Proposition 4.12])* ℓ, $\widetilde{\ell}$, δ のみに依存するある正数 $J_{\ell,\widetilde{\ell},\delta}$ が存在して, 任意の開正方形 $A \subset [1-\delta, \delta]^2$ に対して,

$$\lim_{z\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\Lambda^{lw}_{N,z}(A)\right]}{J_{\ell,\widetilde{\ell},\delta}ze^{-\sqrt{2\pi}z}} = \lim_{z\to\infty}\liminf_{N\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\Lambda^{lw}_{N,z}(A)\right]}{J_{\ell,\widetilde{\ell},\delta}ze^{-\sqrt{2\pi}z}} = \int_A \psi^{(0,1)^2}(x)dx. \tag{2.82}$$

ただし, $\psi^{(0,1)^2}$ は *(2.57)* で定義したもの.

証明の概略[24]

(第 1 段：障壁密度を使って数え上げ測度の期待値版を計算.) 命題 2.21 の証明で鍵となるのはつぎの「障壁密度」$\nu_{v,N}$ である：各 $v \in \Xi_N$ と任意の区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$\int_I \nu_{v,N}(y)dy := \mathbb{P}\begin{bmatrix} X^{\mathrm{lw}}_{v,N,r}(t) \leq \frac{m_N}{n}t + z,\ 0 \leq \forall t \leq n_{v,N}, \\ X^{\mathrm{lw}}_{v,N,r}(n_{v,N}) - \frac{m_N}{n}n_{v,N} \in I \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

[24]細部は述べず, 主要な部分のみを記述します. 証明概略の中では $\approx$ という記号を多用しますがこれは「左辺を右辺で近似できる」という意味です.

と定義する．この障壁密度を使うと, 任意の $v \in \Xi_N$ に対して,

$$\mathbb{P}[E^{\mathrm{lw}}_{v,N}(z)] \approx \int_{-\infty}^{z} \nu_{v,N}(y)\mathbb{P}\left[\max_{u\in\widetilde{B}_v} Y_{u,N} \geq \frac{m_N}{n}\ell + z - x_{v,N} - y\right] dy. \qquad (2.84)$$

ただし,

$$x_{v,N} := \frac{m_N}{n} n_{v,N} - \frac{m_N}{n}(n-\ell). \qquad (2.85)$$

これより数え上げ測度の期待値版は (2.84) の右辺の $v \in \Xi_N$ に関する和で表せる．ここで, $\mathcal{B}_N$-正方形の中心からその正方形に含まれる $\widetilde{\mathcal{B}}_N$-正方形の中心までのベクトルを指定することで和を取り換える．そのために記号を導入しておく．ベクトル $\widehat{v} \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^2$ に対して, $\mathcal{B}_N$-正方形の中心から $\widehat{v}$ だけずれた位置にある Ξ_N の点たちをつぎで定義する[25]：

$$\Xi_{\widehat{v},N} := \{w \in \Xi_N : \ w = c_{B_{w,N}} + \widehat{v}\}. \qquad (2.86)$$

$\widehat{v}$ のとり方によっては $\Xi_{\widehat{v},N} = \emptyset$ となるのでそのようなものを排除するために

$$\mathcal{V}_L := \{\widehat{v} \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]^2 \mid \Xi_{\widehat{v},N} \neq \emptyset\} \qquad (2.87)$$

とおき, $\mathcal{V}_L$ のベクトルのみを考えることにする． さらに (2.84) の積分範囲を $[z-\ell-x_{v,N}, z-\ell^{\frac{2}{5}}-x_{v,N}]$ に制限しても大差ないことを示せる ([38, Lemma 4.13])．これらから, $\mathbb{E}[\Lambda^{\mathrm{lw}}_{N,z}(A)]$ を次のように表現できる：

$$\sum_{\widehat{v}\in\mathcal{V}_L} \sum_{w\in\Xi_{\widehat{v},N}\cap NA} \int_{-\ell}^{-\ell^{\frac{2}{5}}} \nu_{w,N}(y+z-x_{w,N})\mathbb{P}\left[\max_{u\in\widetilde{B}_{w,N}} Y_{u,N} \geq \frac{m_N}{n}\ell - y\right] dy. \qquad (2.88)$$

しばらくベクトル $\widehat{v} \in \mathcal{V}_L$ および $\mathcal{B}_N$-正方形の中心から $\widehat{v}$ だけずれた場所にある Ξ_N の点 $w \in \Xi_{\widehat{v},N} \cap NA$ を固定しておく．障壁密度 $\nu_{w,N}(y+z-x_{w,N})$ を計算する．BRW の最大値の右裾分布の解析で行ったように測度変換した後, 障壁評価をすれば障壁密度を計算できる．そこでまず新しい確率測度を

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left\{\frac{\pi}{2\log 2}\frac{m_N}{n} X^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}(n_{w,N}) - \frac{\pi}{4\log 2}\frac{m_N^2}{n^2} n_{w,N}\right\}$$

で定義すると $\nu_{w,N}(y+z-x_{w,N})$ をつぎで表せる：

$$\mathbb{Q}\left[\begin{matrix}\exp\left\{-\frac{\pi}{2\log 2}\frac{m_N}{n}\overline{X}^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}(n_{w,N}) - \frac{\pi}{4\log 2}\frac{m_N^2}{n^2}n_{w,N}\right\} \\ \times 1_{\left\{\overline{X}^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}(t)\leq z,\ \forall t\in[0,n_{w,N}],\ \overline{X}^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}(n_{w,N})=y+z-x_{w,N}\right\}}\end{matrix}\right]. \qquad (2.89)$$

ただし, $\overline{X}^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}(t) := X^{\mathrm{lw}}_{w,N,r} - \frac{m_N}{n}t$, $t \in [0, n_{w,N}]$．ここで m_N の定義 (1.9) を思い出すと

$$\frac{\pi}{2\log 2}\frac{m_N}{n} \approx \sqrt{2\pi}, \quad \frac{\pi}{4\log 2}\frac{m_N^2}{n^2}n_{w,N} \approx (2\log 2)n_{w,N} - \frac{3}{2}\log n.$$

[25] $c_{B_{w,N}}$ は w を含む $\mathcal{B}_N$-正方形であることを思い出してください．

よって, (2.89) をつぎで近似できる：

$$e^{-\sqrt{2\pi}(y+z-x_{w,N})}4^{-n_{w,N}}n^{\frac{3}{2}}$$
$$\times \mathbb{Q}\left[\overline{X}^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}(t) \le z,\ \forall t \in [0, n_{w,N}],\ \overline{X}^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}(n_{w,N}) = y+z-x_{w,N}\right]. \quad (2.90)$$

$\mathbb{Q}$ のもとでは $\overline{X}^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}(t)$ は $\sqrt{\frac{2\log 2}{\pi}}\times$ (標準 Brown 運動) なので Brown 運動の反射原理を使うと (2.90) の 2 行目の確率をつぎのように近似できる：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{2\log 2}{\pi}(n-\ell)}}\left(e^{-\frac{(y+z-x_{w,N})^2}{2\frac{2\log 2}{\pi}(n-\ell)}} - e^{-\frac{(z-y+x_{w,N})^2}{2\frac{2\log 2}{\pi}(n-\ell)}}\right)\\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{2\log 2}{\pi}(n-\ell)}}\frac{4z(-y+x_{w,N})}{2\frac{2\log 2}{\pi}(n-\ell)}.
\end{aligned} \quad (2.91)$$

よって, (2.90) をつぎで近似できる：

$$\frac{\pi}{2(\log 2)^{\frac{3}{2}}}e^{-\sqrt{2\pi}(y-x_{w,N})}4^{-n_{w,N}}ze^{-\sqrt{2\pi}z}(-y+x_{w,N}). \quad (2.92)$$

ここで $n_{w,N}$ の定義 (2.77) および $X^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}$ の定義 (2.72) を思い出すと,

$$n_{w,N} = (n-\ell-r) + \frac{\pi}{2\log 2}a^2_{w,N,r}. \quad (2.93)$$

いまいちど $\widehat{v}$ は $\widehat{v} \in \mathcal{V}_L$ のベクトルで w は $w \in \Xi_{\widehat{v},N}$ であることを思い出そう. ここでつぎを示す：

$$\limsup_{N\to\infty}\left|a^2_{w,N,r} - \left(\frac{2}{\pi}g_1\left(\frac{w}{N}\right) - \frac{2}{\pi}g_2\left(\frac{\widehat{v}}{L}\right) + \frac{2\log 2}{\pi}r\right)\right| = 0. \quad (2.94)$$

ただし,

$$g_1(x) := \int_{\partial(0,1)^2}\Pi^{(0,1)^2}(x,du)\log|u-x|, g_2(x) := \int_{\partial(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2}\Pi^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^2}(x,du)\log|u-x|.$$

離散 Green 関数を連続 Green 関数で近似できることを用いて (2.94) を以下のように示す：まず $X^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}$ の定義 (2.72) および $\mathrm{Var}(X^{\mathrm{lw}}_{w,N,r}) = \mathrm{Var}(X_{w,N})$ より

$$a^2_{w,N} = \mathrm{Var}(X_{w,N}) - \frac{2\log 2}{\pi}(n-\ell-r). \quad (2.95)$$

$X_{w,N}$ の定義 (2.64) より, $X_{w,N}$ は $\partial B_{w,N}$ [26] 上で境界値 h^{V_N} をもつ $B_{w,N}$ 上の (ランダム) 離散調和関数なので

$$X_{w,N} = \sum_{z'\in\partial B_{w,N}} P_w[X_{\tau_{\partial B_{w,N}}} = z']h^{V_N}_{z'}$$

[26] $B_{w,N}$ は w を含む $\mathcal{B}_N$-正方形であることを思い出してください.

と表せる．ただし，$(X_i)_{i\geq 0}$ は $B_{w,N}$ 上の SRW．よって，(2.95) をつぎのように Green 関数 (1.1) をつかって表せる：

$$\sum_{z'\in\partial B_{w,N}} P_w\left[X_{\tau_{\partial B_{w,N}}}=z'\right]G^{V_N}(w,z')-\frac{2\log 2}{\pi}(n-\ell-r). \tag{2.96}$$

補題 1.7 により (2.96) の離散 Green 関数を連続 Green 関数で近似できるので (2.96) をつぎで近似できる：

$$\frac{2}{\pi}E_w\left[\int_{\partial(0,1)^2}\Pi^{(0,1)^2}(x,dz)\log\left|z-\frac{X_{\tau_{\partial B_{w,N}}}}{N}\right|\right]-\frac{2}{\pi}E_w\left[\log\left|\frac{w}{L}-\frac{X_{\tau_{\partial B_{w,N}}}}{L}\right|\right]+\frac{2\log 2}{\pi}r. \tag{2.97}$$

さらに $w=c_{B_{w,N}}+\widehat{v}$ であることおよび SRW の平行移動不変性より $O(\frac{L}{N})$ の誤差を無視すれば (2.97) はつぎで近似される：

$$\frac{2}{\pi}\int_{\partial(0,1)^2}\Pi^{(0,1)^2}\left(\frac{w}{N},dz\right)\log\left|z-\frac{w}{N}\right|-\frac{2}{\pi}E_{\widehat{v}}\left[\log\left|\frac{\widehat{v}}{L}-\frac{X_{\tau_{\partial(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})^2}}}{L}\right|\right]+\frac{2\log 2}{\pi}r. \tag{2.98}$$

離散調和測度が連続調和測度で近似できること (補題 1.6) を (2.98) の第 2 項に対して使うと，(2.98) は $\frac{2}{\pi}g_1(\frac{w}{N})-\frac{2}{\pi}g_2(\frac{\widehat{v}}{L})+\frac{2\log 2}{\pi}r$ で近似できる．したがって，(2.94) が成り立つ．(2.93), (2.94) より，(2.92) はつぎで近似される：

$$\frac{\pi}{2(\log 2)^{\frac{3}{2}}}e^{\sqrt{2\pi}x_{w,N}}ze^{-\sqrt{2\pi}z}(-y)e^{-\sqrt{2\pi}y}4^{-(n-\ell)}e^{-2g_1(\frac{w}{N})}e^{2g_2(\frac{\widehat{v}}{L})}. \tag{2.99}$$

ここで $x_{w,N}$ の定義 (2.85) および (2.93), (2.94) より，

$$x_{w,N}\approx 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(g_1(\frac{w}{N})-g_2(\frac{\widehat{v}}{L})\right). \tag{2.100}$$

これより (2.99) を $w\in\Xi_{\widehat{v},N}\cap NA$ について足したものはつぎで近似される[27]：

$$\frac{\pi}{2(\log 2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\left(\frac{L}{N}\right)^2\sum_{w\in\Xi_{\widehat{v},N}\cap NA}e^{2g_1(\frac{w}{N})}\right\}e^{-2g_2(\frac{\widehat{v}}{L})}(-y)e^{-\sqrt{2\pi}y}ze^{-\sqrt{2\pi}z}. \tag{2.101}$$

(2.101) の和の部分は $[\delta,1-\delta]^2$ を $\frac{N}{L}$ 等分して各小部分正方形から代表点 $\frac{w}{N}$ ($w\in\Xi_{\widehat{v},N}\cap NA$) をとったときの Riemann 和なので (2.101) は $N\to\infty$ のときつぎで近似される：

$$\frac{\pi}{2(\log 2)^{\frac{3}{2}}}\int_A e^{2g_1(x)}dx\cdot e^{-2g_2(\frac{\widehat{v}}{L})}(-y)e^{-\sqrt{2\pi}y}ze^{-\sqrt{2\pi}z}. \tag{2.102}$$

[27] $L=2^\ell$, $N=2^n$ を思い出してください．

(2.102) より (2.88) をつぎで近似できる[28]：

$$ze^{-\sqrt{2\pi}z}\int_A e^{2g_1(x)}dx$$
$$\times\frac{\pi}{2(\log 2)^{\frac{3}{2}}}\sum_{\widehat{v}\in\mathcal{V}_L}e^{-2g_2(\frac{\widehat{v}}{L})}\int_{\ell^{\frac{2}{5}}}^{\ell}ye^{\sqrt{2\pi}y}\mathbb{P}\left[\max_{u\in\widehat{v}+(-\frac{\widetilde{L}}{2},\frac{\widetilde{L}}{2})^2}h_u^{(-\frac{L}{2},\frac{L}{2})^2}\geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log L+y\right]dy. \tag{2.103}$$

したがって, $J_{\ell,\widetilde{\ell},\delta}$ を (2.103) の第 2 行目で定義すれば欲しかった (2.82) を得る. □

ステップ 7：仕上げ.
命題 2.17 の証明概略　命題 (2.18)-(2.21) より次を得る：

$$\frac{\mathbb{P}\left[\max_{v\in NA\cap\widetilde{V}_N}h_v^{V_N}\geq m_N+z\right]}{ze^{-\sqrt{2\pi}z}}\approx J_{\ell,\widetilde{\ell},\delta}\int_A\psi^{(0,1)^2}(x)dx. \tag{2.104}$$

(2.104) の左辺を $I_{N,z}(A)$ とおく. 大雑把にいうと, $I_{N,z}(A)$ は N に依存するが $J_{\ell,\widetilde{\ell},\delta}$ は N に依存しないので $I_z(A):=\lim_{N\to\infty}I_{N,z}(A)=J_{\ell,\widetilde{\ell},\delta}\int_A\psi^{(0,1)^2}(x)dx$. さらに $\ell\gg z$ よりあたかも z は ℓ に依存しないものとみなすと, $\lim_{\ell,\widetilde{\ell}\to\infty}J_{\ell,\widetilde{\ell},\delta}=m_\delta^{-1}I_z([\delta,1-\delta]^2)$. ただし, $m_\delta:=\int_{[\delta,1-\delta]^2}\psi_\delta(x)dx$. この極限を α_δ^* とおくと目標であった (2.63) を得る. また m_δ, $I_z([\delta,1-\delta]^2)$ は δ に関して単調なので $\alpha^*:=\lim_{\delta\to 0}\alpha_\delta^*$ が存在する. □

2.6　DGFF の最大値分布の収束：主定理の証明

本節では 2 章の主定理である定理 2.1 の証明を与える. 証明はいくつかの近似ステップを経た後, 命題 2.15 をつかって具体的に極限確率変数を構成する.

証明に入る前に離散正方形 V_N および連続正方形 $[0,1]^2$ の分割に関する記号を導入する.

- $N=2^n,\ \ K=2^k$
- $V_N^{K,i}$, $1\leq i\leq K^2$ $\cdots$ V_N を K 等分割したときできる $\frac{N}{K}\times\frac{N}{K}$-正方形
- $\mathcal{F}_{N,K}:=\sigma\left\{h_v^{V_N}:\ v\in\bigcup_{i=1}^{K^2}\partial V_N^{K,i}\right\}$
- (Coarse field) $X_{v,N,K}^c:=\mathbb{E}\left[h_v^{V_N}|\mathcal{F}_{N,K}\right]$, $v\in V_N$
- (Fine field) $X_{v,N,K}^f:=h_v^{V_N}-X_{v,N,K}^c$, $v\in V_N$
- $\delta\cdots\delta^{-1}$ は 2 のべき乗
- ($V_N^{K,i}$ の δ-内部) $V_N^{K,\delta,i}:=\left\{v\in V_N^{K,i}:\ d_\infty(v,\partial V_N^{K,\delta})\geq\frac{\delta N}{K}\right\}$, $1\leq i\leq K^2$

[28] $\mathcal{V}_L$ の定義を (2.87) から思い出してください. また Y は $L\times L$ 正方形上の DGFF であることに注意.

- $V_N^{K,\delta} := \bigcup_{i=1}^{K^2} V_N^{K,\delta,i}$
- $W^{K,i}$, $1 \le i \le K^2$ $\cdots$ $[0,1]^2$ を K 等分したときできる $\frac{1}{K} \times \frac{1}{K}$-正方形
- ($W^{K,i}$ の δ-内部) $W^{K,\delta,i} := \left\{x \in W^{K,i} :\ d_\infty(x, \partial W^{K,i}) \ge \frac{\delta}{K}\right\}$, $1 \le i \le K^2$
- $W^{K,\delta} := \bigcup_{i=1}^{K^2} W^{K,\delta,i}$

定理 2.1 の証明.

ステップ 1：DGFF は最大値を $V_N^{K,\delta}$ 上でとる.

補題 2.22 *([38, Proposition 5.1])*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{K \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N} h_v^{V_N} \ne \max_{v \in V_N^{K,\delta}} h_v^{V_N}\right] = 0. \tag{2.105}$$

証明概略 $(\max_{v \in V_N} h_v^{V_N} - m_N)_{N \ge 1}$ が緊密であること (定理 1.10) および DGFF の最大値の右裾分布評価 (命題 2.10) による. まずつぎに注意する：任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\max_{v \in V_N \setminus V_N^{K,\delta}} h_v^{V_N} \le m_N - \lambda \text{かつ} \max_{v \in V_N} h_v^{V_N} > m_N - \lambda \Rightarrow \max_{v \in V_N \setminus V_N^{K,\delta}} h_v^{V_N} \ne \max_{v \in V_N} h_v^{V_N}. \tag{2.106}$$

(2.106) より, $\mathbb{P}[\max_{v \in V_N \setminus V_N^{K,\delta}} h_v^{V_N} = \max_{v \in V_N} h_v^{V_N}]$ は上から次で評価できる：

$$\mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N \setminus V_N^{K,\delta}} h_v^{V_N} > m_N - \lambda\right] + \mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N} h_v^{V_N} \le m_N - \lambda\right]. \tag{2.107}$$

命題 2.10 より (2.107) の第 1 項目は上から $c\sqrt{\frac{|V_N \setminus V_N^{K,\delta}|}{|V_N|}} e^{\sqrt{2\pi}\lambda}$ で評価できるので $N \to \infty$, $K \to \infty$, $\delta \downarrow 0$ とすると 0 に収束する. また $(\max_{v \in V_N} h_v^{V_N} - m_N)_{N \ge 1}$ が緊密であることより, (2.107) の第 2 項目は $N \to \infty$, $\lambda \to \infty$ とすると 0 に収束する. □

ステップ 2：DGFF の最大値は fine field がとる. $z_\star \in V_N^{K,\delta}$ をつぎを満たす点とする：

$$X_{z_\star,N,K}^f = \max_{1 \le i \le K^2} \max_{v \in V_N^{K,\delta,i}} X_{v,N,K}^f.$$

補題 2.23 *([38, Proposition 5.2])* 任意の $\varepsilon > 0$, 十分小さい $\delta > 0$ に対して,

$$\lim_{K \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \mathbb{P}\left[\max_{v \in V_N^{K,\delta}} h_v^{V_N} \ge h_{z_\star}^{V_N} + \varepsilon\right] = 0. \tag{2.108}$$

さらにある正定数 α が存在して,

$$g(K) := \alpha \log\log K \tag{2.109}$$

とおくと,

$$\lim_{K \to \infty} \limsup_{N \to \infty} \mathbb{P}\left[X_{z_\star,N,K}^f \le m_{\frac{N}{K}} + g(K)\right] = 0. \tag{2.110}$$

証明のアイディア. 証明の方針のみ述べる. $V_N^{K,\delta}=\bigcup_{i=1}^{K^2}V_N^{K,\delta,i}$ なので, (2.108) の左辺の事象はつぎの事象に含まれる：

$$\bigcup_{i=1}^{K^2}\{h_{v_i}^{V_N}\ge h_{z_i}^{V_N}+\varepsilon\}\cap\{h_{v_i}^{V_N}=\max_{v\in V_N^{K,\delta}}h_v^{V_N}\}. \tag{2.111}$$

ただし, 各 $i\in\{1,\dots,K^2\}$ に対して, v_i は DGFF が $V_N^{K,\delta,i}$ 上で最大値をとる点 $v_i:=\mathrm{argmax}_{V_N^{K,\delta,i}}h^{V_N}$ であり, z_i は fine field が $V_N^{K,\delta,i}$ 上で最大値をとる点 $z_i:=\mathrm{argmax}_{V_N^{K,\delta,i}}X^f_{\cdot,N,K}$ とする. いま $1\le i\le K^2$ を固定し, この i に対して (2.111) の事象が成り立つとする. ここで $f(k)$ を $\lim_{k\to\infty}f(k)=\infty$ なるものとする[29]. $|v_i-z_i|\le f(k)$ ならば $h_{v_i}^{V_N}-h_{z_i}^{V_N}\ge\varepsilon\Rightarrow X^c_{v_i,N,K}-X^c_{z_i,N,K}\ge\varepsilon+(X^f_{z_i,N,K}-X^f_{v_i,N,K})\ge\varepsilon$ が成り立ってしまい[30], coarse field の「連続性」に反し矛盾. また, $|v_i-z_i|>f(k)$ ならば 2 点間距離が「中間」($f(k)\le|v_i-z_i|\le\frac{N}{K}$) なのにも関わらず, $h_{v_i}^{V_N}$, $h_{z_i}^{V_N}$ は大きい値をとってしまい, 定理 1.12 に反し矛盾. よって, $h_{v_i}^{V_N}-h_{z_i}^{V_N}\ge\varepsilon$ となる確率は非常に小さい.

実際の証明は DGFF の最大値の緊密性, DGFF の最大値の右裾分布評価, coarse field の共分散評価, 最大値付近をとる点の配置の幾何などの事実を総動員して示す. 証明は長く, テクニカルなのでここでは詳細は省略する. 興味のある方は [38, Section 5] をご覧ください.

ステップ 3：**Coarse field の収束.**

このステップでは coarse field$(X^c_{v,N,K})_{v\in V_N^{K,\delta}}$ が $N\to\infty$ のときあるガウス場に収束することをみる. Coarse field の共分散を

$$C^c_{N,K}(u,v):=\mathbb{E}\left[X^c_{u,N,K}X^c_{v,N,K}\right],\quad u,v\in V_N^{K,\delta}$$

とおく.

補題 2.24 *([38, Lemma 2.1])* [31]

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{u,v\in V_N^{K,\delta}\times V_N^{K,\delta}}|C^c_{N,K}(u,v)-C^c_K(\frac{u}{N},\frac{v}{N})|=0. \tag{2.112}$$

ただし, 各 $i=1,\dots,K^2$, $x,y\in W^{K,\delta,i}$ に対して[32],

$$C^c_K(x,y):=\frac{2}{\pi}\int_{\partial[0,1]^2}\Pi^{[0,1]^2}(x,dz)\log|y-z|-\frac{2}{\pi}\int_{\partial W^{K,i}}\Pi^{W^{K,i}}(x,dz)\log|y-z| \tag{2.113}$$

[29] k は $K=2^k$ の k のことである.

[30] 最初の不等式では DGFF の fine field および coarse field への分解を使っており, 最後の不等式では $X^f_{z_i,N,K}$ の最大性を使っている.

[31] [27, Lemmas 4.1, 4.3] もご覧ください.

[32] 本節の初めに定義した通り, $W^{K,\delta,i}$, $1\le i\le K^2$ は $[0,1]^2$ を K 等分してできる各部分正方形の δ-内部達です.

と定義し, $x \in W^{K,\delta,i}, y \in W^{K,\delta,j},\ i \neq j$ に対して,

$$C_K^c(x,y) := \frac{2}{\pi} \int_{\partial[0,1]^2} \Pi^{[0,1]^2}(x,z) \log\left(\frac{|y-z|}{|x-y|}\right) dz \tag{2.114}$$

と定義する. 特に $C_K^c(\cdot,\cdot)$ を共分散としてもつ期待値0のガウス場を $(Z_{K,\delta}^c(x))_{x\in W^{K,\delta}}$ と表記すると $N \to \infty$ のとき, 有限次元分布の意味で $(X^c_{\lfloor xN \rfloor,N,K})_{x\in W^{K,\delta}}$ は $(Z_{K,\delta}^c(x))_{x\in W^{K,\delta}}$ に収束する.

証明概略.
Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) より, fine field $X^f_{\cdot,N,K}$ と coarse field $X^c_{\cdot,N,K}$ は独立である. よって, $\mathbb{E}[h_u^{V_N} h_v^{V_N}]$ は

$$\mathbb{E}\left[(X^f_{u,N,K} + X^c_{u,N,K})(X^f_{v,N,K} + X^c_{v,N,K})\right] = \mathbb{E}\left[X^f_{u,N,K} X^f_{v,N,K}\right] + C^c_{N,K}(u,v) \tag{2.115}$$

と等しい. 各 $(X^f_{v,N,K})_{v\in V_N^{K,i}}$ が $V_N^{K,i}$ 上の DGFF であること, DGFF の共分散は Green 関数で与えられること, および (2.115) より, 各 $i=1,\ldots,K^2$, $u,v \in V_N^{K,i}$ に対して,

$$C^c_{N,K}(u,v) = G^{V_N}(u,v) - G^{V_N^{K,i}}(u,v). \tag{2.116}$$

ここで Green 関数のポテンシャル核による表現 (補題 1.5) を使うと, ある $i = 1,\ldots,K^2$ が存在して $u,v \in V_N^{K,\delta,i}$ のとき,

$$C^c_{N,K}(u,v) = \sum_{z\in\partial V_N} P_u[X_{\tau_{\partial V_N}} = z]\mathfrak{a}(z-v) - \sum_{z\in\partial V_N} P_u[X_{\tau_{\partial V_N^{K,i}}} = z]\mathfrak{a}(z-v) \tag{2.117}$$

と表せ,[33] $u \in V_N^{K,\delta,i}, y \in V_N^{K,\delta,j},\ i \neq j$ のとき, $\mathbb{E}[X^f_{u,N,K} X^f_{v,N,K}] = 0$ より, 再び補題 1.5 を使うと

$$C^c_{N,K}(u,v) = G^{V_N}(u,v) = \sum_{z\in\partial V_N} P_u[X_{\tau_{\partial V_N}} = z](\mathfrak{a}(z-v) - \mathfrak{a}(u-v)). \tag{2.118}$$

離散調和測度が連続調和測度に収束すること (補題 1.6) およびポテンシャル核の評価 (1.4) より (2.117), (2.118) の右辺はそれぞれ (2.113), (2.114) で近似できる.
□

ステップ 4：極限確率変数の構成.
このステップでは DGFF の最大値の右裾分布の極限定理 (命題 2.15) に基づいて DGFF の最大値の極限確率変数にあたるものを具体的に構成する.

まず, Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) より, $(X^f_{v,N,K})_{v\in V_N^{K,\delta,i}},\ i = 1,\ldots,K^2$ は i.i.d. ガウス場であり,

$$(X^f_{v,N,K})_{v\in V_N^{K,\delta,i}} \overset{\text{law}}{=} (h_v^{V_N^{K,i}})_{v\in V_N^{K,i}}, \quad i=1,\ldots,K^2$$

[33] $(X)_{i\geq 0}$ は V_N 上の SRW.

であることに注意する．つぎに,

$$X_i^{f,*} := \max_{v \in V_N^{K,\delta,i}} X_{v,N,K}^f$$

とおき, 3 種の確率変数列

$$\left(\overline{\wp}_i := 1_{\{X_i^{f,*} - m_{\frac{N}{K}} \geq g(K)\}}\right)_{i=1}^{K^2},$$

$$\left(X_i^{f,*} - m_{\frac{N}{K}}\right)_{i=1}^{K^2},$$

$$\left(z_i := \mathrm{argmax}_{V_N^{K,\delta,i}} X_{\cdot,N,K}^f\right)_{i=1}^{K^2}$$

に着目する[34]．考えたいのは $\max_{1 \leq i \leq K^2} X_i^{f,*}$ なので (2.110) より, $X_i^{f,*} - m_{\frac{N}{K}} \geq g(K)$ となる i だけに着目すればよい．命題 2.15 より i がそのように「成功」する確率は

$$\mathbb{P}[\overline{\wp}_i = 1] \approx \alpha^* m_\delta g(K) e^{-\sqrt{2\pi} g(K)} \tag{2.119}$$

である．ただし, $m_\delta := \int_{[\delta,1-\delta]^2} \psi^{(0,1)^2}(x)dx$ とおく．そのように「成功」した i に対して $X_i^{f,*} - m_{\frac{N}{K}}$ と z_i の同次分布は命題 2.15 よりつぎのような条件付き確率で与えられる：任意の $x \geq 0$ と任意の開集合 $A \subset [\delta, 1-\delta]^2$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[X_i^{f,*} - m_{\frac{N}{K}} \geq g(K) + x,\ \ \frac{K}{N}(z_i - p_i) \in A \,\middle|\, X_i^{f,*} - m_{\frac{N}{K}} \geq g(K)\right] \\
&\approx \frac{g(K)+x}{g(K)} e^{-\sqrt{2\pi}x} \int_A \frac{\psi^{(0,1)^2}(z)}{m_\delta} dz.
\end{aligned} \tag{2.120}$$

ただし, p_i は $W^{K,i}$ の左下頂点．以上の観察から $(\overline{\wp}_i)_{i=1}^{K^2}$, $(X_i^{f,*} - m_{\frac{N}{K}})_{i=1}^{K^2}$, $(z_i)_{i=1}^{K^2}$ は以下の 3 種の独立な確率変数列 $(\wp_i^{K,\delta})_{i=1}^{K^2}$, $(g(K) + Y_i^K)_{i=1}^{K^2}$, $(z_i^{K,\delta})_{i=1}^{K^2}$ によって近似できる (厳密な近似の意味については [38, Proposition 6.3] をご参照ください)：

- $(\wp_i^{K,\delta})_{i=1}^{K^2}$ $\cdots$ i.i.d. Bernoulli 確率変数列で

$$\mathbb{P}[\wp_1^{K,\delta} = 1] = \alpha^* m_\delta g(K) e^{-\sqrt{2\pi} g(K)}.$$

- $(Y_i^K)_{i=1}^{K^2}$ $\cdots$ i.i.d. 非負値確率変数列で任意の $x \geq 0$ に対して,

$$\mathbb{P}[Y_i^K \geq x] = \frac{g(K)+x}{g(K)} e^{-\sqrt{2\pi}x}.$$

ただし, $g(K)$ は (2.109) で定義したものである．

[34] $g(K)$ は (2.109) で定義したものです．

- $(z_i^{K,\delta})_{i=1}^{K^2}$ ・・・ 独立な確率変数列で各 $i = 1, \ldots, K^2$ および各 Borel 集合 $A \subset [\delta, 1-\delta]^2$ に対して,
$$\mathbb{P}[K(z_i^{K,\delta} - p_i) \in A] = m_\delta^{-1} \int_A \psi^{(0,1)^2}(x)dx.$$

ステップ 5：**DGFF の最大値分布の収束.**
以下で使う $\approx$ は「左辺の分布は右辺の分布で近似できる」ことを意味する．まずステップ 1, 2 より
$$\max_{v\in V_N} h_v^{V_N} \approx \max_{v\in V_N^{K,\delta}} h_v^{V_N} \approx \max_{1\le i\le K^2} (\overline{\wp}_i X_i^{f,*} + X_{z_i,N,K}^c). \tag{2.121}$$
つぎにステップ 3, 4 および $m_N \approx m_{\frac{N}{K}} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log K$ より[35],
$$\begin{aligned}&\max_{1\le i\le K^2} (\overline{\wp}_i X_i^{f,*} + X_{z_i,N,K}^c) - m_N \\ &\approx \max_{1\le i\le K^2} \left(\wp_i^{K,\delta}(g(K) + Y_i^K) + Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta}) - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log K\right). \end{aligned}\tag{2.122}$$
大雑把にいって (2.122) の右辺は N に依存しないので $\max_{v\in V_N} h_v^{V_N} - m_N$ は $N \to \infty$ のとき法則収束する[36].

ステップ 6：極限分布関数の積分表示
任意の $x \in \mathbb{R}$ をとる．(2.121), (2.122) より, $\mathbb{P}[\max_{v\in V_N} h_v^{V_N} - m_N \le x]$ はつぎで近似できる：
$$\mathbb{P}\left[\max_{1\le i\le K^2} \wp_i^{K,\delta}(g(K) + Y_i^K) - \overline{Z}_{K,\delta}^c(i) \le x\right]. \tag{2.123}$$
ただし, $\overline{Z}_{K,\delta}^c(i) := 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log K - Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta})$ とおいた．ここで極限 coarse field が生成する σ-加法族を $\mathcal{F}^c := \sigma(Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta}) : 1 \le i \le K^2)$ とおくと, $\mathcal{F}^c$ の条件付けのもとでは $\wp_i^{K,\delta}(g(K) + Y_i^K)$, $i = 1, \ldots, K^2$ は独立なので (2.123) をつぎで表せる：
$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{K^2}\left(1 - \mathbb{P}\left[\wp_i^{K,\delta}(g(K) + Y_i^K) > x + \overline{Z}_{K,\delta}^c(i) \mid \mathcal{F}^c\right]\right)\right]. \tag{2.124}$$
さらに $\mathcal{F}^c$ の条件付けのもとでは $\wp_i^{K,\delta}$ と Y_i^K は独立なので各 $i = 1, \ldots, K^2$ に対して, $\mathbb{P}[\wp_i^{K,\delta}(g(K) + Y_i^K) > x + \overline{Z}_{K,\delta}^c(i) \mid \mathcal{F}^c]$ はつぎと等しい：
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\wp_i^{K,\delta} = 1]\mathbb{P}\left[Y_i^K > x + \overline{Z}_{K,\delta}^c(i) - g(K) \mid \mathcal{F}^c\right] \\ &= \alpha^* m_\delta g(K) e^{-\sqrt{2\pi}g(K)} \frac{g(K) + x + \overline{Z}_{K,\delta}^c(i) - g(K)}{g(K)} e^{-\sqrt{2\pi}(x + \overline{Z}_{K,\delta}^c(i) - g(K))} \\ &\approx \alpha^* m_\delta \overline{Z}_{K,\delta}^c(i) e^{-\sqrt{2\pi}\ \overline{Z}_{K,\delta}^c(i)} e^{-\sqrt{2\pi}x}. \end{aligned}\tag{2.125}$$

[35] $Z_{K,\delta}^c$ は補題 2.112 で定義した $C_K^c(\cdot,\cdot)$ を共分散にもつ期待値 0 のガウス場.

[36] 実際の証明では $\max_{v\in V_N} h_v^{V_N} - m_N$ の分布が Lévy 距離に関して Cauchy 列であることを示す.

よって, (2.123)-(2.125) より,

$$\mathbb{P}\left[\max_{v\in V_N} h_v^{V_N} - m_N \le x\right]$$
$$\approx \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha^* m_\delta e^{-\sqrt{2\pi}x}\sum_{i=1}^{K^2}\overline{Z}^c_{K,\delta}(i)e^{-\sqrt{2\pi}\ \overline{Z}^c_{K,\delta}(i)}\right\}\right]. \tag{2.126}$$

大雑把にいうと左辺は N に依存するが右辺は N に依存しない. よって, DGFF の極限分布は右辺で表せる. さらに右辺は $\sum_{i=1}^{K^2}\overline{Z}^c_{K,\delta}(i)e^{-\sqrt{2\pi}\ \overline{Z}^c_{K,\delta}(i)}$ の Laplace 変換とみなせるので $K\to\infty$ のときこの確率変数はある確率変数に法則収束する. その極限確率変数を Z とおき, 最後に $\delta\downarrow 0$ とすると (2.1) を得る. □

3 DGFF の極大値過程の収束

Biskup 氏と Louidor 氏は一連の論文 [28, 29, 30] で DGFF の極大値統計がランダムな強さ測度をもつ Poisson 点過程にクラスターを付け加えたものに収束することを示した. 本章ではその内容を概観する. なお, Biskup 氏ご本人による講義録 [27] があるので本格的に DGFF を勉強したい方はそちらもご覧ください.

定理 1.12 が示唆しているように DGFF が最大値付近の値をとる点たちは互いに十分離れた小さなクラスターを形成すると考えられる. 2 章では最大値のみを扱ったが, そのようなクラスターを調べるには他の極大値をとる点たちも同時に扱う必要がある. どうしたらよいだろうか? Biskup 氏と Louidor 氏は DGFF の極大値過程 (点過程) を考えることによって「クラスターを解析する」ということの定式化を行い, クラスターの配置および法則を厳密に求めることに成功した. いまからこのことを具体化していく.

注：以下で断りなしに D や D_N が出てきた場合, 定義 1.1 で定義した $\mathfrak{D}$ から許容可能な開集合 D を任意にとり, 定義 1.2 で定義した D の許容可能な離散近似 $(D_N)_{N\ge1}$ を任意にとってきたと考えてください.

まず DGFF の極大値過程はいくつかの種類を考えることができるが, 本節で考える中で最も多くの情報量を持っているものはつぎで定義される点過程 (ランダム点測度) である：

$$\eta^D_{N,r} := \sum_{x\in D_N} 1_{\{h_x^{D_N}=\max_{z\in\Lambda_r(x)} h_z^{D_N}\}}\delta_{\frac{x}{N}}\otimes\delta_{h_x^{D_N}-m_N}\otimes\delta_{\{h_x^{D_N}-h_{x+z}^{D_N}\ :\ z\in\mathbb{Z}^2\}}. \tag{3.1}$$

ただし, 各 $x\in\mathbb{Z}^2$, $r>0$ に対して,

$$\Lambda_r(x) := \{y\in\mathbb{Z}^2 \mid |y-x|\le r\}. \tag{3.2}$$

定義関数からわかるようにこの点過程では極大値をとる点のみに着目しており, そのような点の「位置」,「極大値の揺らぎ」,「極大値とのギャップ」という 3 つの情報を持っている. 最初の 2 つの情報はクラスターの代表点に関するもの (クラスターの大域的な情報) であり, 最後の情報はクラスター内部に関するもの (クラ

スターの局所的な情報) である．点過程 (3.1) はクラスターについて欲しい情報をすべて持っているのでこれについて詳しく調べればよいのだが, クラスター内では DGFF の相関が強すぎるため, いきなり (3.1) を解析するのは困難である．そこで Biskup 氏と Louidor 氏はまず (3.1) の最初の 2 つの情報だけに制限したもの

$$\widetilde{\eta}^D_{N,r} := \sum_{x \in D_N} 1_{\{h^{D_N}_x = \max_{z \in \Lambda_r(x)} h^{D_N}_z\}} \delta_{\frac{x}{N}} \otimes \delta_{h^{D_N}_x - m_N} \tag{3.3}$$

を解析してクラスターの大域的な性質を調べた [28, 29]. その後, クラスターの局所的な性質に焦点を絞りクラスターの法則を求め, クラスターの大域的な結果と局所的な結果をあわせて (3.1) の収束を示した [30].

定理を紹介する前にランダム測度が収束するとはどういう意味かを述べておく．複数の空間上のランダム測度を後で考えるので一般的な定義を与える．完備可分距離空間 $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の非負値 Radon 測度全体を $M(E)$ とおく．$M(E)$-値確率変数列 $(\mu_N)_{N\geq 1}$ が $N \to \infty$ のとき $M(E)$-値確率変数 μ に法則収束するとは任意の $f \in C_c^+(E)$ [37]に対して, $\mathbb{R}$-値確率変数 $\langle \mu_N, f\rangle$ が $N \to \infty$ のとき $\mathbb{R}$-値確率変数 $\langle \mu, f\rangle$ に法則収束することである．ただし, $\nu \in M(E)$, $f \in C_c^+(E)$ に対して, $\langle \nu, f\rangle := \int_E f d\nu$. また収束定理ではランダム測度をもつ Poisson 点過程もでてくるのでその定義も与えておく．Deterministic な測度 $\nu \in M(E)$ が与えられたとき, 以下の (i), (ii) を満たす $M(E)$-値のランダム点測度 ξ を強さ測度 ν をもつ Poisson 点過程と呼び, PPP(ν) と表記する：

(i) 任意の $A \in \mathcal{B}(E)$ と任意の $k \geq 0$ に対して,

$$P[\xi(A) = k] = e^{-\nu(A)} \frac{\nu(A)^k}{k!}.$$

(ii) $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{B}(E)$, $i = 1, \ldots, n$ が互いに素ならば $\xi(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$ は独立.

ランダム測度 μ が与えられたとき, μ に関する条件付けのもとで PPP(μ) の分布をもつランダム測度も同様に μ を強さ測度にもつ Poisson 点過程 (あるいは Cox 過程) と呼び PPP(μ) と表記する．すなわち, PPP(μ) の分布を計算するとき, まず μ について条件づけて Poisson 点過程として計算して最後に μ に関して積分する.

まず点過程 (3.3) [38] の収束定理を紹介する．Biskup 氏と Louidor 氏は点過程 (3.3) がランダムな強さ測度をもつ Poisson 点過程に法則収束することを示した：

定理 3.1 *([28, Theorem 1.1], [29, Theorem 2.1], [27, Theorem 10.28])* $D \in \mathfrak{D}$ を任意にとる[39]．このとき D 上のあるランダム測度 $Z^D(dx)$ が存在して, つぎが成り立つ：D の任意の許容可能な離散近似列 $(D_N)_{N\geq 1}$ と $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$ かつ $\lim_{N\to\infty} \frac{r_N}{N} = 0$ なる任意の正数列 $(r_N)_{N\geq 1}$ に対して, $N \to \infty$ のとき,

$$\widetilde{\eta}^D_{N,r_N} \xrightarrow{law} PPP\left(Z^D(dx) \otimes e^{-\sqrt{2\pi}h} dh\right). \tag{3.4}$$

ただし, $\xrightarrow{law}$ は $N \to \infty$ のとき左辺のランダム測度が右辺のランダム測度に法則収束することを表す．さらに Z^D は臨界的 *Liouville* 量子重力測度である[40].

[37] $C_c^+(E)$ は E から $[0, \infty)$ への連続関数でコンパクト台をもつもの全体

[38] この点過程は $D \times \mathbb{R}$ 上のランダム測度である.

[39] 定義 1.1, 1.2 を思い出してください.

[40] 臨界的 Liouville 量子重力測度の定義については [27, Section10.5] をご覧ください.

注 3.2 *(Update)* 臨界的 *Liouville* 量子重力測度 *(LQG)* は *Duplantier-Rhodes-Sheffield-Vargas* 氏らにより構成された *[59]*. それを μ' とおく. μ' の複数の構成法が知られている. h を D 上の連続ガウス自由場とし, $h_\varepsilon(x)$ を x を中心とする半径 ε の円上における h の平均とする.

$$\mu_\varepsilon^\gamma(dx) := R(x;D)^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma h_\varepsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[h_\varepsilon^2(x)]} dx$$

とおく. ただし,

$$R(x;D) := \exp\left\{ \int_{\partial D} \Pi^D(x,dz) \log|x-z| \right\}.$$

Duplantier-Sheffield 氏らにより $\gamma < 2$ のとき $\mu_{2^{-k}}^\gamma$ は D 上のあるランダム測度 μ_γ に確率 1 で弱収束することが示された *[60] (Berestycki* 氏によるより一般のガウス乗法カオスの構成法 *[25]* もご覧ください*)*. 一方, $\gamma \geq 2$ のとき極限測度は 0 である *[69, 88]*. この意味で $\gamma < 2$ のとき μ_γ を劣臨界的 *LQG*, と呼ぶ. そこで $\gamma = 2$ では適切な正規化が必要である. 正規化の仕方は大きく 2 通りあり, *Seneta-Heyde* 正規化と微分による正規化がある. *Junnila-Saksman* 氏らは *Seneta-Heyde* 正規化により臨界 *LQG* を構成できることを示した *[68]*:

$$R(x;D)^2 \sqrt{\log(\varepsilon^{-1})} e^{2h_\varepsilon - 2\mathbb{E}[h_\varepsilon^2]} dx \overset{\varepsilon \to 0}{\to} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu' \quad (\text{確率収束}).$$

Powell 氏は微分正規化[41] により臨界 *LQG* を構成できることを示した *[86]*:

$$R(x;D)^2 (2\mathbb{E}[h_\varepsilon(x)^2] - h_\varepsilon(x)) e^{2h_\varepsilon - 2\mathbb{E}[h_\varepsilon^2]} dx \overset{\varepsilon \to 0}{\to} \mu' \quad (\text{確率収束}).$$

なお上では h_ε を円平均でとったが, もっと一般の軟化子で同じ結果が *[68, 86]* において示されている. さらに *Aru-Powell-Sepúlveda* 氏らは劣臨界的 *LQG* のパラメータ γ を 2 に近づけたときの極限として μ' が得られることを示した *[17]*:

$$\lim_{\gamma \uparrow 2} \frac{\mu_\gamma}{2-\gamma} = 2\mu' \quad (\text{確率収束}).$$

つぎに点過程 (3.1) [42] の収束定理を紹介する.

定理 3.3 *([30, Theorems 2.1, 2.3])* $D \in \mathfrak{D}$ を任意にとる. $Z^D(dx)$ を定理 *3.1* で現れたものとする. このとき $[0,\infty)^{\mathbb{Z}^2}$ 上の確率測度 $\nu_\infty(d\phi)$ が存在してつぎが成り立つ: D の任意の許容可能な離散近似列 $(D_N)_{N\geq 1}$ と $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$ かつ $\lim_{N\to\infty} \frac{r_N}{N} = 0$ なる任意の正数列 $(r_N)_{N\geq 1}$ に対して, $N \to \infty$ のとき,

$$\eta_{N,r_N}^D \xrightarrow{law} PPP\left(Z^D(dx) \otimes e^{-\sqrt{2\pi}h} dh \otimes \nu_\infty(d\phi) \right). \tag{3.5}$$

---

[41]「微分」という理由は正規化の形がつぎのように γ に関して微分した形をしていることからくる:

$$-\frac{d}{d\gamma} e^{\gamma h_\varepsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[h_\varepsilon^2(x)]} dx|_{\gamma=2} = (2\mathbb{E}[h_\varepsilon(x)^2] - h_\varepsilon(x)) e^{2h_\varepsilon - 2\mathbb{E}[h_\varepsilon^2]} dx.$$

[42] この点過程は $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$ 上のランダム測度である.

さらに, クラスター法則 $\nu_\infty(d\phi)$ はつぎの法則収束極限として与えられる：

$$\nu_\infty(d\phi) = w - \lim_{r\to\infty} \nu^0 \left(\phi_\cdot + \sqrt{2\pi}\ \mathfrak{a}(\cdot) \in \cdot \mid \phi_x + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a}(x) \geq 0,\ \forall |x| \leq r \right). \tag{3.6}$$

ただし, $\nu^0(d\phi)$ は $\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ 上の *DGFF* の法則であり, $\mathfrak{a}(\cdot)$ はポテンシャル核 *(1.3)* とする.

定理 3.1, 3.3 の証明手法は異なる. 定理 3.1 の証明ではまず点過程 (3.3) の任意の収束する部分列の極限が $\mathrm{PPP}(Z^D(dx) \otimes e^{-\sqrt{2\pi}h}dh)$ の形になることを示し[43], つぎに $Z^D(dx)$ の法則は部分列の取り方によらず一意的であることを示す. 前半部分 (部分列極限の特徴づけ) で鍵となるものは点過程 (3.3) の任意の部分列極限が共通してもつある種の「分布不変性」[44] および Liggett 氏による相互作用をもたない粒子系に対する不変測度の一般論 [76] である[45]. 後半部分 (極限の一意性) で鍵となるのは最大値の極限定理 (定理 2.1) を拡張したものである.

定理 3.3 の証明ではまずクラスターの配置は定理 3.1 でわかっており, クラスター同士は互いに十分離れている (定理 1.10) のでひとつのクラスターに着目しその法則だけを考えればよいだろう. そこでクラスターの法則が (3.6) の形をしている理由の heuristics を述べておく. 簡単のため DGFF が原点で極大値 m_N をとる状況を考えよう. Gibbs-Markov 性より DGFF は $h_\cdot^{V_N} = h_\cdot^{V_N\backslash\{0\}} + \mathfrak{g}_N(\cdot)m_N$ と分解できる. ただし, $h^{V_N\backslash\{0\}}$ および $\mathfrak{g}_N$ の定義はつぎの通り：$h^{V_N\backslash\{0\}}$ は $V_N\backslash\{0\}$ 上の DGFF であり $N \to \infty$ のとき $\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ 上の DGFF で近似できるだろう. 一方, $\mathfrak{g}_N$ は $\mathfrak{g}_N(x) := P_x[X_{\tau_{\partial D_N \cup \{0\}}} = 0] = \frac{G^{D_N}(x,0)}{G^{D_N}(0,0)}$ であり, $N \to \infty$ のとき $m_N - \mathfrak{g}_N(\cdot)m_N = \frac{G^{D_N}(0,0) - G^{D_N}(0,\cdot)}{G^{D_N}(0,0)}m_N$ は $\sqrt{2\pi}\mathfrak{a}$ に収束する[46]. よって, $N \to \infty$ のとき, 原点付近では $h_0^{D_N} - h^{D_N}$ は $\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ 上の DGFF と $\sqrt{2\pi}\mathfrak{a}$ の和であり, さらに原点で極大値をとるという条件があるので (3.6) のような条件付き測度の極限がクラスター法則として現れる.

3.1 定理 3.1 の証明概略

証明は「部分列極限の特徴づけ」および「極限の一意性の証明」から成る.

<u>ステップ 1：部分列極限の存在.</u> DGFF が最大値付近の値をとる点の集合を

$$\Gamma_N^D(t) := \{x \in D_N \mid h_x^{D_N} \geq m_N - t\}, \quad t > 0 \tag{3.7}$$

と定義する. $\widetilde{\eta}_{N,r_N}^D$ が緊密であることはつぎの先行研究からわかる：

[43] この段階では $Z^D(dx)$ は部分列の取り方に依存する可能性を排除できない

[44] 大雑把にいうと部分列極限 $\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{x_i} \otimes \delta_{h_i}$ の第 2 成分に独立なドリフトつき Brown 運動 $B_t^{(i)} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}t$ を付け加えても分布は不変というもの. Biskup 氏と Louidor 氏はこの不変性を”invariance under Dysonization” と呼んでいる.

[45] 分布不変性により部分列極限を Liggett 氏の一般論の枠組みにのせることが可能になり, Liggett 氏の一般論により部分列極限が $PPP(Z^D(dx) \otimes e^{-\sqrt{2\pi}h}dh)$ の形になることを示せる.

[46] ポテンシャル核の定義 (1.3) より, $\lim_{N\to\infty}(G^{D_N}(0,0) - G^{D_N}(0,x)) = \mathfrak{a}(x)$. また, $\sqrt{2\pi}$ は $\frac{m_N}{G^{D_N}(0,0)} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N + O(\log\log N)}{\frac{2}{\pi}\log N + O(1)} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$ からくる.

定理 3.4 *([57, Theorem 1.2])* ある正定数 c_1, c_2 が存在して，

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left[e^{c_1 t}\le|\Gamma_N^D(t)|\le e^{c_2 t}\right]=1. \tag{3.8}$$

実際, 任意の $f\in C_c^+(D\times\mathbb{R})$ に対して, ある $t>0$ が存在して[47],

$$|\langle\widetilde{\eta}^D_{N,r_N},f\rangle|\le\|f\|_\infty|\Gamma_N^D(t)|$$

なのでこれと定理 3.4 より $\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}$ が緊密であるとわかる.

<u>**ステップ 2：部分列極限の分布不変性.**</u> ステップ 1 より $\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}$ は収束する部分列をもつ. それらの部分列極限が共通してもつ性質として分布不変性がある. インフォーマルにこの分布不変性がどのようなものかを述べた後, 正式な主張を述べる. まず $\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}$ の任意の部分列極限を η^D とおくと, η^D は点過程なので

$$\eta^D=\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_{x_i}\otimes\delta_{h_i}$$

の形でかける. 第 2 成分に独立なドリフトつき Brown 運動を付加した

$$\eta_t:=\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_{x_i}\otimes\delta_{h_i+B_t^{(i)}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}t}$$

を考える. 分布不変性とはインフォーマルには

$$\eta_t\overset{\text{law}}{=}\eta^D,\quad t\ge0 \tag{3.9}$$

となることである. 正確な主張は次の通り：

命題 3.5 *(分布不変性)* η^D を $\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}$ の任意の部分列極限とする. 任意の $f\in C_c^+(D\times\mathbb{R})$ に対して，

$$\mathbb{E}\left[e^{-\langle\eta^D,f\rangle}\right]=\mathbb{E}\left[e^{-\langle\eta^D,f_t\rangle}\right]. \tag{3.10}$$

ただし, $(B_t)_{t\ge0}$ を原点出発の標準 *Brown* 運動としたとき

$$f_t(x,h):=-\log E\left[e^{-f(x,h+B_t-\sqrt{\frac{\pi}{2}}t)}\right]$$

とおいた.

この分布不変性は部分列極限が $\mathrm{PPP}(Z^D(dx)\otimes e^{-\sqrt{2\pi}h}dh)$ の形の Cox 過程として特徴づけられることを示す上で不可欠である.
<u>命題 3.5 の証明のアイディア.</u> ここでは heuristics のみを述べる. h', h'' を DGFF h^{D_N} の独立なコピーとする. このとき, 共分散を計算すればすぐわかるように任意の $t\ge0$ に対して

$$h^{D_N}\overset{\text{law}}{=}\sqrt{1-\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}\;h'+\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}\;h''. \tag{3.11}$$

[47] f はコンパクトな台をもつので, ある $t>0$ が存在して $D\times[-t,t]^c$ 上で $f\equiv0$.

ここで Taylor 展開より $\sqrt{1-\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}} = 1-\frac{\pi}{4}\frac{t}{\log N}+O(\frac{t^2}{(\log N)^2})$ であり, $h' = O(\log N)$ なので

$$h^{D_N} \approx h' - \frac{\pi}{4}\frac{t}{\log N}h' + \sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}\ h'' + o(1). \tag{3.12}$$

ここで h' と h'' が独立であることおよび $\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}h''$ の分散が $O(1)$ であることよりつぎが成り立つ (正確な主張については [28, Lemmas 4.6, 4.7] をご覧ください):

$$h_x^{D_N} = m_N + O(1) \text{ “}\Leftrightarrow\text{” } h'_x = m_N + O(1), \tag{3.13}$$

$$h'_x, h'_y = m_N + O(1) \text{ “}\Rightarrow\text{” } \sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}h''_x \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}h''_y. \tag{3.14}$$

これら (3.13), (3.14) より h^{D_N} が極大値をとる集合と h' が極大値をとる集合はほぼ一致する (正確な主張については [28, Lemma 4.8] をご覧ください) :

$$\Theta_{N,r_N} \approx \Theta'_{N,r_N}. \tag{3.15}$$

ただし[48],

$$\Theta_{N,r_N} := \{x \in D_N | h_x^{D_N} = \max_{y\in\Lambda_{r_N}(x)} h_y^{D_N}\},\ \Theta'_{N,r_N} := \{x \in D_N | h'_x = \max_{y\in\Lambda_{r_N}(x)} h'_y\}.$$

したがって, (3.12), (3.15) より

$$\widetilde{\eta}^D_{N,r_N} = \sum_{x\in\Theta_{N,r_N}} \delta_{\frac{x}{N}} \otimes \delta_{h_x^{D_N}-m_N} \approx \sum_{x\in\Theta'_{N,r_N}} \delta_{\frac{x}{N}} \otimes \delta_{h'_x-\sqrt{\frac{\pi}{2}}t+\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}h''_x}. \tag{3.16}$$

ここで $x \neq y$ なる $x, y \in \Theta'_{N,r_N}$ に対して, 定理 1.12 より, $|x-y| > \frac{N}{r_N}$ が成り立つ. このことおよび共分散評価 (補題 2.4) より,

$$\mathrm{Cov}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}\ h''_x, \sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}h''_y\right) = \frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}O(\log(r_N)) = o(1). \tag{3.17}$$

また, DGFF の分散評価 (補題 2.4) より,

$$\mathrm{Var}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}h''_x\right) = \frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}\left(\frac{2}{\pi}\log N + O(1)\right) = t + o(1). \tag{3.18}$$

よって, (3.17), (3.18) より h' に付加されている $\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{t}{\log N}}\ h''$ は独立な標準 Brown 運動とみなせる. したがって, (3.16) の両辺で部分列極限をとると分布不変性 (3.9) がいえる. □

<u>**ステップ 3 : 部分列極限は Cox 過程.**</u> 分布不変性 (命題 3.5) から $\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}$ の任意の部分列極限が $\mathrm{PPP}(Z^D(dx)\otimes e^{-\sqrt{2\pi}h}dh)$ の形で表せることを示す[49]. Liggett 氏の理論 [76] が鍵となる.

[48] $\Lambda_{r_N}(x)$ の定義を (3.2) から思い出してください.
[49] この段階では $Z^D(dx)$ が部分列の取り方に依存する可能性までは排除できない.

定理 3.6 *([76, Theorem 1.2, Corollary 3.8])* [50]
(1) 完備可分距離空間 $\mathcal{X}$ 上の推移確率 $P(x,dy)$ はつぎを満たすとする：任意のコンパクト集合 $C \subset \mathcal{X}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{X}} P^n(x,C) = 0.$$

さらに，$\mathcal{X}$ 上の点過程 $\eta = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{x_i}$ が $\eta \overset{law}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{X_1^{(i)}}$ をみたすとする．ただし，$\{X_n^{(i)} | n \geq 0\}$, $i \in \mathbb{N}$ は P を推移確率としてもつ独立な *Markov* 連鎖で任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $X_0^{(i)} = x_i$ *a.s.* であるとする．このとき，$\mathcal{X}$ 上のあるランダム測度 M であって $MP \overset{law}{=} M$ かつ $\eta \overset{law}{=} PPP(M)$ なるものが存在する[51]．
(2) $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ であり，任意の $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，$P(x,A) = P(0, A-x)$ を満たすとする．さらに $\mathbb{R}$ の任意の真閉部分群 G および $x \in \mathbb{R}$ に対して $x+G$ は $P(0,\cdot)$ の台ではないとする．このとき，つぎが成り立つ：

$$MP \overset{law}{=} M \Rightarrow MP = M a.s.$$

$\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}$ の任意の部分列極限 η^D に対してこの定理を適用しよう．$\mathcal{X} = D \times \mathbb{R}$ とおき，各 $t \geq 0$ に対して $P_t((x,h),A) := P\left[(x, h + B_t - \sqrt{\frac{\pi}{2}}t) \in A\right]$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ とおく．命題 3.5 により，η^D は定理 3.6(1) の仮定を満たす．よって，定理 3.6(1) より $D \times \mathbb{R}$ 上のあるランダム Radon 測度 M が存在して，$\eta^D \overset{\mathrm{law}}{=} \mathrm{PPP}(M)$ かつ $MP_t \overset{\mathrm{law}}{=} M$ が成り立つ．このランダム測度 M を具体化するために $A \in \mathcal{B}(D)$ を任意にひとつ固定し，

$$M_A(B) := M(A \times B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

とおく．また，各 $t \geq 0$ に対して $Q_t(\cdot) := P_0[B_t - \sqrt{\frac{\pi}{2}}t \in \cdot\ ]$ とおく．$\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $P(x,\cdot) := Q_t(\cdot - x)$ に対して定理 3.6(2) を適用すると[52]，

$$M_A * Q_t = M_A \text{ a.s.}$$

Deny の定理 [52]([75, Theorem] もご覧ください) より，ある正数 α, β が存在して

$$M_A(dh) = \alpha e^{-\kappa_1 h} dh + \beta e^{-\kappa_2 h} dh$$

と表せる．ただし，κ_1, κ_2 は $\int_{\mathbb{R}} e^{\kappa h} Q_t(dh) = 1$ を満たす実数である．つまり Brown 運動の密度関数を使うと κ は $\int_{\mathbb{R}} e^{\kappa h} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(h+\sqrt{\frac{\pi}{2}}t)^2}{2t}} dh = 1$ を満たすものであり，計算により $\kappa = 0, \sqrt{2\pi}$ とわかる．よって，

$$M_A(dh) = \alpha dh + \beta e^{-\sqrt{2\pi}h} dh$$

---

[50] [76] ではもっと一般の設定を考えている．
[51] $MP(A) := \int_{\mathcal{X}} M(dx)P(x,A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ と定義する．
[52] $M_A * Q_t(B) := \int_{\mathbb{R}} Q_t(B-y) M_A(dy)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と定義する．

と表せる．$M_A([0,\infty)) = M(A\times[0,\infty)) < \infty$ [53] より, $\alpha = 0$. よって,

$$M_A(dh) = \beta e^{-\sqrt{2\pi}h}dh.$$

特に $M_A([0,\infty)) = \beta\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ より, $\beta = \sqrt{2\pi}M_A([0,\infty))$ とわかる．そこで, $Z^D(A) := \sqrt{2\pi}M(A\times[0,\infty))$ とおくと,

$$M(A\times B) = \int_B M_A(dh) = Z^D(A)\int_B e^{-\sqrt{2\pi}h}dh \quad \text{a.s.}$$

よって, $M(dxdh) = Z^D(dx)e^{-\sqrt{2\pi}h}dh$ a.s. とわかり, つぎを得る：

$$\eta^D \overset{\text{law}}{=} \mathrm{PPP}\left(Z^D(dx)\otimes e^{-\sqrt{2\pi}h}dh\right). \tag{3.19}$$

<u>ステップ 4：Z^D の一意性.</u> ステップ 3 で得た Z^D は部分列の取り方に依存するかもしれない．Z^D の一意性を示すとき鍵となるのが DGFF の最大値の収束 (の拡張版) である．$A_1,\dots,A_k$ を互いに素な開集合, $t_1,\cdots,t_k$ を任意の実数とする．DGFF の最大値の収束定理 (定理 2.1) を拡張して, $N\to\infty$ のとき $(\max_{\frac{x}{N}\in A_i} h_x^{D_N})_{i=1}^k$ が弱収束することがいえる ([28, Theorem 3.4]). そこで

$$\mathbb{P}\left[\max_{\frac{x}{N}\in A_i} h_x^{D_N} < m_N + t_i,\ i=1,\cdots,k\right] = \mathbb{P}\left[\langle\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}, \sum_{i=1}^k 1_{A_i\times[t_i,\infty)}\rangle = 0\right] \tag{3.20}$$

について考えよう[54]. 右辺の部分列極限をとると

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\langle \mathrm{PPP}(Z^D(dx)\otimes e^{-\sqrt{2\pi}h}dh), \sum_{i=1}^k 1_{A_i\times[t_i,\infty)}\rangle = 0\right]\\ &= \mathbb{E}\left[e^{-\sum_{i=1}^k Z^D(A_i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sqrt{2\pi}t_i}}\right].\end{aligned} \tag{3.21}$$

ただし, Z^D は $\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}$ の部分列極限に現れる $Z^D(dx)$ である．(3.21) の右辺は $(Z^D(A_i))_{i=1}^k$ の Laplace 変換であることに注意する．一方, (3.20) の左辺は部分列をとらずとも<u>全列</u>が収束する．したがって, Z^D の有限次元分布は部分列の取り方によらず等しい．したがって, Z^D の分布は一意的に定まり, (3.4) が成り立つ □.

(Update) <u>**Z^D が臨界的 Liouville 量子重力測度であることの heuristics.**</u> 簡単のため $D=(0,1)^2$ の場合を考える．部分開集合 $A\subset(0,1)^2$ を固定しておく．本稿の 2.6 節の記号およびそこで考察したことを使う．まず 2.6 節の議論 (2.123) により,

$$\max_{\frac{x}{N}\in A} h_x^{V_N} - m_N \approx \max_{\substack{1\le i\le K^2\\ W^{K,i}\subset A}}\left(\wp_i^{K,\delta}(g(K)+Y_i^K) - \overline{Z}^c_{K,\delta}(i)\right).$$

---

[53] この理由は大雑把にいうと次の通り：まず $\eta^D \overset{\text{law}}{=} \mathrm{PPP}(M)$ より $\eta^D(A\times[0,\infty)) < \infty$ a.s. をいえばよいことに注意. η^D は $\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}$ の部分列極限であること, $\widetilde{\eta}^D_{N,r_N}(A\times[0,\infty)) = |\Gamma_N^D(0)\cap A|$ であること, および定理 3.4 より $\eta^D(A\times[0,\infty)) < \infty$ a.s. がいえる.

[54] (3.20) は左辺の事象を点過程の言葉で書き直しただけである.

これと (3.21), および (2.125) より,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\sqrt{2\pi}t}Z^{(0,1)^2}(A)}\right] &\approx \mathbb{P}\left[\max_{\frac{x}{N}\in A}(h_x^{V_N}-m_N)\le t\right] \\
&\approx \mathbb{P}\left[\max_{\substack{1\le i\le K^2\\ W^{K,i}\subset A}}\left(\wp_i^{K,\delta}(g(K)+Y_i^K)-\overline{Z}_{K,\delta}^c(i)\right)\le t\right] \\
&\approx \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha^* m_\delta\left(\sum_{\substack{1\le i\le K^2\\ W^{K,i}\subset A}}\overline{Z}_{K,\delta}^c(i)e^{-\sqrt{2\pi}\ \overline{Z}_{K,\delta}^c(i)}\right)e^{-\sqrt{2\pi}t}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
Z^{(0,1)^2}(A)\approx\sqrt{2\pi}\alpha^* m_\delta\sum_{\substack{1\le i\le K^2\\ W^{K,i}\subset A}}\overline{Z}_{K,\delta}^c(i)e^{-\sqrt{2\pi}\ \overline{Z}_{K,\delta}^c(i)}. \tag{3.22}
$$

ここで $\overline{Z}_{K,\delta}^c(i)=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log K-Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta})$ であることを思い出そう．さらに $Z_{K,\delta}^c(x)$ の分散は補題 2.24 で現れる $C_K^c(x,x)$ で与えられることも思い出そう．これらおよび $z_i^{K,\delta}$ が $\partial W^{K,i}$ から $\frac{\delta}{K}$ 以上離れていることより

$$
\mathrm{Var}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta})\right)\approx\int_{\partial(0,1)^2}\Pi^{(0,1)^2}(z_i^{K,\delta},dz)\log|z_i^{K,\delta}-z|+\log K.
$$

これと $\psi^{(0,1)^2}$ の定義 (2.57) より, (3.22) の右辺はつぎで近似される：

$$
\begin{aligned}
&2\alpha^* m_\delta\frac{1}{K^2}\sum_{\substack{1\le i\le K^2\\ W^{K,i}\subset A}}\psi^{(0,1)^2}(z_i^{K,\delta})\left\{2\mathrm{Var}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta})\right)-\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta})\right\} \\
&\qquad\qquad\times e^{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta})-2\mathrm{Var}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z_{K,\delta}^c(z_i^{K,\delta})\right)}.
\end{aligned}
$$

この形は注 3.2 で紹介した微分正規化による臨界的 Liouville 量子重力測度の形に似ている.

3.2 定理 3.3 の証明概略

定理 3.3 の証明ではまずクラスターの分布の収束を示し, それと定理 3.1 をあわせて (3.5) を示す.

3.2.1 クラスターの分布の収束

ここではひとつのクラスターに着目し, その収束をみる．つぎを証明することがここでの目的である：

命題 3.7 *([27, Theorem 11.1])* 任意の $t \in \mathbb{R}$ と任意の有限個の成分にのみ依存する任意の $f \in C_c^+(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[f(h_0^{D_N} - h^{D_N}) \mid h_0^{D_N} = m_N + t, h^{D_N} \le h_0^{D_N}\right] \\
&= \lim_{r\to\infty} E_{\nu^0}\left[f(\phi + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a}) \mid \Lambda_r(0) \text{ 上で } \phi + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a} \ge 0\right].
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

ただし，ν^0 は $\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ 上の *DGFF* の法則であり，E_{ν^0} は ν^0 に関する期待値である．

筆者の個人的な印象だが Biskup-Louidor [30] による命題 3.7 の証明法は分枝 Brown 運動 (BBM) の極大値統計に関して同様の研究を先駆的に行った Aïdékon-Berestycki-Brunet-Shi [8] の手法に類似しているようだ．BBM の場合は木の構造がはっきりしているので極大値をとる粒子の軌跡 (backbone) とそこからの枝分かれ構造に自然に分解でき，それに基づいてクラスターの法則を解析できる．しかし，DGFF の場合は木の構造が明確ではなく BBM の解析手法を援用するにも DGFF をどのように分解すればよいかは全く非自明である．Biskup-Louidor [30] の大きな成果はクラスターを解析するために必要な DGFF の新しい分解を提示したことにある[55]．氏らはその分解を “concentric decomposition” と呼んでいるが本稿では Biskup-Louidor 分解と呼ぶことにする．

ステップ 1：**Biskup-Louidor 分解.** Biskup-Louidor 分解は各点まわりで DGFF を独立な小片に分解する手法である．ここでは原点まわりの分解を考える．原点を中心とする正方形列を

$$
\Delta^k := \begin{cases} \{x \in \mathbb{Z}^2 |\ |x|_\infty < 2^k\} & k = 0, 1, \dots, n-1, \\ D_N & k = n \end{cases} \tag{3.24}
$$

とおく．

命題 3.8 *(Biskup-Louidor 分解, [27, Proposition 8.9])*

$$
h^{D_N} \overset{law}{=} \sum_{k=0}^{n} \left[(1 + b_k(\cdot))\varphi_k(0) + \chi_k(\cdot) + h_k'(\cdot)\right]. \tag{3.25}
$$

ただし，$\{\varphi_k, \chi_k, h_k' |\ k = 0, 1, \cdots, n\}$ は以下を満たす独立な確率変数族である：

$$
\varphi_k \overset{law}{=} \begin{cases} \varphi^{\Delta^k, \Delta^k\backslash\partial\Delta^{k-1}} & k = 1, 2, \cdots, n, \\ h^{\{0\}} & k = 0, \end{cases} \tag{3.26}
$$

$$
h_k' \overset{law}{=} \begin{cases} h^{\Delta^k\backslash\overline{\Delta}^{k-1}} & k = 1, 2, \cdots, n, \\ 0 & k = 0, \end{cases} \tag{3.27}
$$

$$
\chi_k \overset{law}{=} \varphi_k - \mathbb{E}[\varphi_k | \sigma(\varphi_k(0))], \tag{3.28}
$$

$$
b_k(x) := \frac{\mathbb{E}\left[(\varphi_k(x) - \varphi_k(0))\,\varphi_k(0)\right]}{\mathbb{E}[\varphi_k^2(0)]}. \tag{3.29}
$$

[55] Biskup 氏は講義録 [27] においてその DGFF の分解を基本手法としてクラスターの解析だけでなく DGFF の極大値の様々な性質を示している．特に DGFF の最大値の収束定理 (定理 2.1) を MBRW による手法ではなくこの分解をもとに示している ([27, Section 12.2])．

証明
(第 1 段) Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) より,

$$h^{D_N} \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^n \setminus \partial \Delta^{n-1}} + \varphi^{\Delta^n, \Delta^n \setminus \partial \Delta^{n-1}}.$$

$\partial \Delta^{n-1}$ は Δ^{n-1} (内側) と $\Delta^n \setminus \overline{\Delta}^{n-1}$ (外側) に分断するので

$$h^{\Delta^n \setminus \partial \Delta^{n-1}} \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^{n-1}} + h^{\Delta^n \setminus \overline{\Delta}^{n-1}}.$$

ただし, 右辺は独立和である. よって,

$$h^{D_N} \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^{n-1}} + h^{\Delta^n \setminus \overline{\Delta}^{n-1}} + \varphi^{\Delta^n, \Delta^n \setminus \partial \Delta^{n-1}}.$$

つぎに $h^{\Delta^{n-1}}$ に対して Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) と使うと

$$h^{\Delta^{n-1}} \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^{n-1} \setminus \partial \Delta^{n-2}} + \varphi^{\Delta^{n-1}, \Delta^{n-1} \setminus \partial \Delta^{n-2}}.$$

$\partial \Delta^{n-2}$ は Δ^{n-2} (内側) と $\Delta^{n-1} \setminus \overline{\Delta}^{n-2}$ (外側) に分断するので

$$h^{\Delta^{n-1} \setminus \partial \Delta^{n-2}} \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^{n-2}} + h^{\Delta^{n-1} \setminus \overline{\Delta}^{n-2}}.$$

ただし, 右辺は独立和である. よって,

$$h^{D_N} \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^{n-2}} + h^{\Delta^{n-1} \setminus \overline{\Delta}^{n-2}} + \varphi^{\Delta^{n-1}, \Delta^{n-1} \setminus \partial \Delta^{n-2}} + h^{\Delta^n \setminus \overline{\Delta}^{n-1}} + \varphi^{\Delta^n, \Delta^n \setminus \partial \Delta^{n-1}}.$$

これを繰り返していくと

$$h^{D_N} \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^0} + \sum_{k=1}^{n} \left(h^{\Delta^k \setminus \overline{\Delta}^{k-1}} + \varphi^{\Delta^k, \Delta^k \setminus \partial \Delta^{k-1}} \right) \overset{\text{law}}{=} \sum_{k=0}^{n} (h'_k + \varphi_k).$$

(第 2 段) 各 k に対して,

$$\varphi_k = \chi_k + \mathbb{E}\left[\varphi_k | \sigma(\varphi_k(0))\right] = \chi_k + \mathfrak{f}_k(\cdot)\varphi_k(0)$$

なる $\mathfrak{f}_k$ が存在する. χ_k と $\varphi_k(0)$ は独立なので

$$\mathbb{E}\left[(\varphi_k(\cdot) - \varphi_k(0))\varphi_k(0)\right] = (\mathfrak{f}_k(\cdot) - 1)\mathbb{E}[\varphi_k(0)^2].$$

よって,

$$\mathfrak{f}_k(\cdot) - 1 = \frac{\mathbb{E}\left[(\varphi_k(\cdot) - \varphi_k(0))\varphi_k(0)\right]}{\mathbb{E}[\varphi_k(0)^2]} = b_k(\cdot).$$

したがって,

$$\varphi_k = \chi_k + (1 + b_k(\cdot))\varphi_k(0). \quad \square$$

ステップ 2 : **DGFF を RW で近似する.**

BBM の解析法と結びつけるために RW

$$S_k := \sum_{\ell=0}^{k-1} \varphi_\ell(0) \tag{3.30}$$

を Biskup-Louidor 分解の主要項と考えるとよい．非常に大雑把にいうと, $\Delta^k\backslash\Delta^{k-1}$ $(k=1,\cdots,n)$ 上では

$$h^{\Delta^n}-m_{2^n}(1-\mathfrak{g}^{\Delta^n})\approx S_{n+1}-S_k+(\text{誤差項}) \tag{3.31}$$

と近似できる (正確な主張は [30, Lemma 4.3] をご覧ください[56])．このことについてもう少し見ておこう．$k=1,\cdots,n$ および $x\in\Delta^k\backslash\Delta^{k-1}$ を任意にとる．このとき, 任意の $\ell=0,1,\cdots,k-1$ に対して $1+b_\ell(x)=0$, $\chi_\ell(x)=0$, $h'_\ell(x)=0$ に注意すると, ステップ 1 の Biskup-Louidor 分解より, (3.31) の左辺はつぎで表せる：

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=k}^{n}\varphi_\ell(0)+\sum_{\ell=k}^{n}b_\ell(x)\varphi_\ell(0)+\sum_{\ell=k+2}^{n}\chi_\ell(x)\\&+\left(\chi_{k-1}(x)+\chi_k(x)+\chi_{k+1}(x)+h'_k(x)-m_{2^k}\right)-\left(m_{2^n}(1-\mathfrak{g}^{\Delta^n}(x))-m_{2^k}\right).\end{aligned} \tag{3.32}$$

大雑把にいうと (3.32) の第 1 項以外は誤差項とみなせる [30, Section 4.1]．(3.32) の第 1 項は $S_{n+1}-S_k$ であることに注意すると, (3.31) の近似が成り立つ．

ステップ 3：ピン止め **DGFF** に帰着. Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) より

$$h^{D_N}\overset{\text{law}}{=}h^{D_N\backslash\{0\}}+\varphi^{D_N,D_N\backslash\{0\}}=h^{D_N\backslash\{0\}}+\mathfrak{g}^{D_N}(\cdot)h_0^{D_N}. \tag{3.33}$$

ただし, $(X_i)_{i\geq 0}$ を $\mathbb{Z}^2$ 上の SRW としたとき, $\mathfrak{g}^{D_N}(x):=P_x[X_{\tau_{\partial D_N\cup\{0\}}}=0]$．よって, (3.33) および $\{h_0^{D_N}=0\}$ のもとでの h^{D_N} の分布は $h^{D_N\backslash\{0\}}$ の分布と等しいことより (3.23) の左辺はつぎと等しい：

$$\frac{\mathbb{E}\left[f\left((1-\mathfrak{g}^{D_N})(m_N+t)-h^{D_N}\right)1_{\left\{h^{D_N}\leq(1-\mathfrak{g}^{D_N})(m_N+t)\right\}}\,\middle|\,h_0^{D_N}=0\right]}{\mathbb{E}\left[1_{\left\{h^{D_N}\leq(1-\mathfrak{g}^{D_N})(m_N+t)\right\}}\,\middle|\,h_0^{D_N}=0\right]}. \tag{3.34}$$

ステップ 4：**(3.34)** を内層・中間層・外層に分けて計算. (3.34) の分母は分子の f を定数関数 1 にしたものとみれるので, 分子を計算すればよい．k を十分大きくとる．このステップでは (3.34) の分子が

$$\mathbb{E}\left[\begin{matrix}f(\sqrt{2\pi}\mathfrak{a}+\phi_k)1_{\left\{\Delta^k\text{ 上で }\phi_k+\sqrt{2\pi}\mathfrak{a}\geq 0\right\}}1_{\{S_k,S_{n-k}\in[k^{\frac{1}{6}},k^2]\}}\\ \times\left(\prod_{\ell=k}^{n-k}1_{\{S_\ell\geq 0\}}\right)1_{\left\{D_N\backslash\Delta^{n-k}\text{ 上で }h^{D_N}\leq(1-\mathfrak{g}^{D_N})(m_N+t)\right\}}\end{matrix}\,\middle|\,h_0^{D_N}=0\right]+\frac{o(1)}{n} \tag{3.35}$$

で近似できることをみる[57]．ただし, $\phi_k(x):=h_0^{\Delta^k}-h_x^{\Delta^k}$ とおく．(3.34) の中身を内層 Δ^k, 中間層 $\Delta^{n-k}\backslash\Delta^k$, 外層 $D_N\backslash\Delta^{n-k}$ に分けて考える．

[56] 正確な主張を述べるには "control variable" [30, Definition 4.1] を定義する必要があるが, この定義を書き出すと煩雑になるのでここでは論文の該当箇所を引用するにとどめる．大雑把にいうと control variable とは (3.32) の第 1 項以外の誤差項の大きさを測るものである．

[57] Biskup 氏の講義録の [27, Proposition 11.8].

中間層における DGFF 障壁事象を RW の障壁事象に置き換える. (3.31) および $S_{n+1} = h_0^{D_N}$ より, $\{h_0^{D_N} = 0\}$ のもとでは DGFF の障壁事象

$$\left\{\Delta^{n-k}\backslash\Delta^k \text{ 上で } h^{D_N} \le (1-\mathfrak{g}^{\Delta^n})(m_N+t)\right\}$$

を RW の障壁事象

$$\bigcap_{\ell=k}^{n-k}\{S_\ell \ge 0\}$$

に置き換えることができる[58].
f の連続性を使うことで f の中身を $\phi_k + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a}$ に置き換える. 内層 Δ^k において $(1-\mathfrak{g}^{\Delta^n}(x))(m_N+t)$ と h^{Δ^n} をつぎのように近似できる：$\mathfrak{g}^{\Delta^n}(x) = \frac{G^{D_N}(x,0)}{G^{D_N}(0,0)}$ と表せることおよびポテンシャル核の定義 (1.3) より,

$$(1-\mathfrak{g}^{\Delta^n}(x))(m_N+t) \approx \frac{G^{D_N}(0,0) - G^{D_N}(x,0)}{\frac{2}{\pi}\log N} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N \approx \sqrt{2\pi}\mathfrak{a}(x). \quad (3.36)$$

近似 (3.31) より, $h_o^{\Delta^n} = 0$ のもとでは任意の $\ell = 1, \ldots, k$ と任意の $x \in \Delta^\ell\backslash\Delta^{\ell-1}$ に対して,

$$h_x^{\Delta^n} \approx -S_\ell = S_{k+1} - S_\ell - S_{k+1} \approx h_x^{\Delta^k} - h_0^{\Delta^k} = -\phi_k(x). \quad (3.37)$$

これらの近似と f の連続性より, (3.34) の f の中身を $\phi_k + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a}$ で置き換えることができる.
内層の障壁事象を $\phi_k + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a}$ の障壁事象に置き換える. このとき鍵となるのはエントロピー的反発により生じる正のギャップ δ である[59]. 大雑把にいうとこのギャップは次のようなものである：$h^{\Delta^n} \le (m_{2^n}+t)(1-\mathfrak{g}^{\Delta^n})$ のもとでは高確率で $\Delta^k\backslash\{0\}$ 上で $h^{\Delta^n} \le (m_{2^n}+t)(1-\mathfrak{g}^{\Delta^n}) - \delta$ が成り立つ. 同様に $\phi_k + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a} \ge 0$ のもとでは高確率で $\Delta^k\backslash\{0\}$ 上で $\phi_k + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a} \ge \delta$ が成り立つ. このギャップ δ に近似 (3.36), (3.37) の誤差項を押し付けることができる. よって, $\{h_0^{\Delta^n} = 0\}$ のもとでは障壁事象

$$\{\Delta^k \text{ 上で } h^{\Delta^n} \le (1-\mathfrak{g}^{D_N})(m_N+t)\}$$

を $\phi_k + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a}$ の障壁事象

$$\{\Delta^k \text{ 上で } \phi_k + \sqrt{2\pi}\mathfrak{a} \ge 0\}$$

に置き換えることができる. 以上より, (3.35) を得る.

ステップ 5：内層・中間層・外層は S_k と S_{n-k} の条件付けのもとで独立. 理由は以下の通り：内層のランダム場 ϕ_k は $\sigma(\varphi_\ell(0), \chi_\ell, h'_\ell : 0 \le \ell \le k)$-可測であり, 中間層の RW $S_k, S_{k+1}, \cdots, S_{n-k}$ は $\sigma(S_k, \varphi_{k+1}(0), \cdots, \varphi_{n-k-1}(0))$-可測であり, 外

[58] 障壁をこのように「0 以上」と単純化できる理由はエントロピー的反発による. 実際の障壁は (3.31) の近似誤差で与えられるが, それは定数関数 0 の小さな揺らぎ程度であり, 障壁を定数関数 0 にかえても確率は大差ない [27, Lemma 11.7].

[59] 詳細は [30, Lemma 4.22] をご覧ください.

層 $D^N\backslash\Delta^{n-k}$ 上の DGFF h^{D_N} は $\sigma(S_{n-k},\varphi_\ell(0),\chi_\ell(0),h'_\ell : n-k\le \ell\le n)$-可測である．後は $\varphi_\ell,\chi_\ell,h'_\ell$ 達の独立性を使えばよい．([27, Lemma 11.10] もご覧ください.) (Update) 正確にはもう少し議論が必要です．[30] の 640 ページの議論をご覧ください.

ステップ 6：中間層 RW の障壁評価. 論文からの引用にとどめる：

補題 3.9 *([30, Lemma 5.6])* 任意のある $c>0$ が存在して，事象 $\{S_k, S_{n-k}\in[k^{\frac{1}{6}},k^2]\}$ のもとでは

$$\left|P\left[\bigcap_{\ell=k}^{n-k}\{S_\ell\ge 0|\ \sigma(S_k,S_{n-k})\}\right]-\frac{\pi}{\log 2}\frac{S_kS_{n-k}}{n}\right|\le c\frac{k^4}{n}\frac{S_kS_{n-k}}{n}. \tag{3.38}$$

証明は Brown 橋の障壁評価に帰着される．詳しくは [30, Lemma 5.6] の証明をご覧ください[60].

ステップ 7：ひとつの帰結. ステップ 5, 6 より, (3.35) はつぎで近似できる：

$$\frac{\pi}{\log 2}\frac{1}{n}\Xi_k^{\mathrm{in}}(f)\cdot\Xi_{N,k}^{\mathrm{out}}(t)+\frac{o(1)}{n}. \tag{3.39}$$

ただし, Ξ_k^{in} は

$$\mathbb{E}\left[f(\phi_k+\sqrt{2\pi}\mathfrak{a})1_{\{\Delta^k\ \text{上で}\ \phi_k+\sqrt{2\pi}\mathfrak{a}\ge 0\}}1_{\{S_k\in[k^{\frac{1}{6}},k^2]\}}S_k\right], \tag{3.40}$$

$\Xi_{N,k}^{\mathrm{out}}(t)$ は

$$\mathbb{E}\left[1_{\{D_N\backslash\Delta^{n-k}\ \text{上で}\ h^{D_N}\le(1-\mathfrak{g}^{D_N})(m_N+t)\}}1_{\{S_{n-k}\in[k^{\frac{1}{6}},k^2]\}}S_{n-k}\middle|\ S_{n+1}=0\right]. \tag{3.41}$$

$\Xi_k^{\mathrm{in}}(f)\asymp 1$, $\Xi_{N,k}^{\mathrm{out}}\asymp 1$ がいえるので

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(h_0^{D_N}-h^{D_N})\mid h_0^{D_N}=m_N+t, h^{D_N}\le h_0^{D_N}\right]&\approx\frac{\frac{\pi}{\log 2}\Xi_{N,k}^{\mathrm{out}}(t)\cdot\frac{\Xi_k^{\mathrm{in}}(f)+o(1)}{n}}{\frac{\pi}{\log 2}\Xi_{N,k}^{\mathrm{out}}(t)\cdot\frac{\Xi_k^{\mathrm{in}}(1)+o(1)}{n}}\\&\approx\frac{\Xi_k^{\mathrm{in}}(f)}{\Xi_k^{\mathrm{in}}(1)}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

大雑把にいうと (3.42) の左辺は N に依存し k には依存せず, 右辺は N に依存せず k にのみ依存するのでつぎが成り立つ ([27, Corollary 11.14])：

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[f(h_0^{D_N}-h^{D_N})\mid h_0^{D_N}=m_N+t, h^{D_N}\le h_0^{D_N}\right]=\lim_{k\to\infty}\frac{\Xi_k^{\mathrm{in}}(f)}{\Xi_k^{\mathrm{in}}(1)}. \tag{3.43}$$

[60] [30] では Brown 運動および Brown 橋の精密な障壁評価が得られている．なお Bramson 氏は Brown 橋の障壁評価・エントロピー的反発の解析を [37] で詳しく行っている.

ステップ 8：$\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ 上の **DGFF** に対しても同じことを行う. Biskup-Louidor 分解 (定理 3.8) に出てくる φ_ℓ, χ_ℓ, h'_ℓ, b_ℓ を使って $\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ 上の DGFF ϕ をつぎのように表現できる [30, Proposition 3.12]：

$$\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty}(b_\ell\varphi_\ell(0) + \chi_\ell + h'_\ell). \tag{3.44}$$

ステップ 2-7 と同様の議論によりつぎを得る ([27, (11.38)])：

$$\lim_{r\to\infty} E_{\nu^0}\left[f(\phi+\sqrt{2\pi}\mathfrak{a})\middle|\Delta^r \text{ 上で } \phi+\sqrt{2\pi}\mathfrak{a}\geq 0\right] = \lim_{k\to\infty}\frac{\Xi_k^{\mathrm{in}}(f)}{\Xi_k^{\mathrm{in}}(1)}. \tag{3.45}$$

ステップ 9：結論. (3.43) と (3.45) より (3.23) を得る. □

3.2.2 DGFF の極大値統計の収束

定理 3.3 を示す.

ステップ 1：η_{N,r_N} を近似する. 極大値をとる「場所」と「値」で条件づけたとき, クラスター同士が独立になるようにするためにつぎの補助的な点測度を導入する：

$$\widehat{\eta}_{N,M}^D := \sum_{x\in D_N} 1_{\{x\in\widehat{\Theta}_{N,M}\}}\delta_{\frac{x}{N}}\otimes\delta_{h_x^{D_N}-m_N}\delta_{\{h_x^{D_N}-h_{x+z}^{D_N}+\Phi_{x+z}^{M,x}:z\in\mathbb{Z}^2\}}. \tag{3.46}$$

ただし, $M=M(N,r):=\max\{2^n|\ 2^n\leq\frac{N}{r}\}$, X を D_N 上の SRW とするとき

$$\Phi^{M,x}(z) := \sum_{y\in D_N\cap\partial\Lambda_M(x)} P_z[X_{\tau_{D_N\cap\partial\Lambda_M(x)\cup\{x\}}}=y]h_y^{D_N}, \tag{3.47}$$

$$\widehat{\Theta}_{N,M} := \{x\in D_N|\ \max_{z\in\Lambda_M(x)}(h_z^{D_N}-\Phi^{M,x}(z)) = h_x^{D_N}\}.$$

η_{N,r_N}^D は $\widehat{\eta}_{N,M(N,r)}^D$ でつぎの意味で近似できる：

命題 3.10 *([27, Lemma 11.18])* 任意の $f\in C_c^+(D\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2})$ に対して,

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\left|\mathbb{E}\left[e^{-\langle\eta_{N,r_N}^D,f\rangle}\right]-\mathbb{E}\left[e^{-\langle\widehat{\eta}_{N,M(N,r)}^D,f\rangle}\right]\right| = 0. \tag{3.48}$$

この命題の証明は大変なので省略する. 興味のある方は [30, Section 5.4] をご覧ください. この補助的な点過程 $\widehat{\eta}_{N,M}^D$ を考える利点はつぎのようにクラスター同士の独立性を与えるからである：

補題 3.11 *([30, Lemma 5.11])* $\Lambda_M(x)\subset D_N$ なる $x\in D_N$ を任意にとる. $n\in\mathbb{N}$ を $M=2^n$ なるものとする. このとき, 事象 $\{h_x^{D_N}=t\}$ のもとで

$$\mathbb{P}\left[h^{D_N}(x+\cdot)-\Phi^{M,x}(x+\cdot)\in\ \cdot\ \middle|\ \mathcal{F}_{M,x}\right] = \mathbb{P}\left[h^{\Delta^n}\in\ \cdot\ \middle|\ h^{\Delta^n}(0)=t\right]. \tag{3.49}$$

ただし, $\mathcal{F}_{M,x}=\sigma(h_z^{D_N}|\ z\in\{x\}\cup\Lambda_M(x)^c)$.

証明 SRW の平行移動不変性より各 $z \in \mathbb{Z}^2$ に対して $\mathfrak{g}^{\Delta^n}(z) = P_{x+z}[\tau_x < \tau_{\partial\Lambda_M(x)}]$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\Phi^{M,x}(x+z) + \mathfrak{g}^{\Delta^n}(z) h_x^{D_N} \\
&= \sum_{y\in\partial\Lambda_M(x)} P_{x+z}[X_{\tau_{\partial\Lambda_M(x)\cup\{x\}}} = y] h_y^{D_N} + P_{x+z}[\tau_x < \tau_{\partial\Lambda_M(x)}] h_x^{D_N} \\
&= \mathbb{E}\left[h^{D_N}(x+z)\middle|\ \sigma(h_y^{D_N} \mid y \in \{x\}\cup\Lambda_M(x)^c)\right].
\end{aligned} \tag{3.50}$$

よって, Gibbs-Markov 性 (補題 1.4) および (3.50) より,

$$\begin{aligned}
h^{D_N}(x+\cdot) &= h^{\Lambda_M(x)\setminus\{x\}}(x+\cdot) + \mathbb{E}\left[h^{D_N}(x+\cdot)\middle|\ \sigma(h_y^{D_N} \mid y \in \{x\}\cup\Lambda_M(x)^c)\right] \\
&= h^{\Lambda_M(x)\setminus\{x\}}(x+\cdot) + \Phi^{M,x}(x+\cdot) + \mathfrak{g}^{\Delta^n}(\cdot) h_x^{D_N}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

(3.51) および $h^{\Lambda_M(x)\setminus\{x\}}(x+\cdot) \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^n\setminus\{0\}}(\cdot)$ より,

$$h^{D_N}(x+\cdot) - \Phi^{M,x}(x+\cdot) \overset{\text{law}}{=} h^{\Delta^n\setminus\{0\}} + \mathfrak{g}^{\Delta^n}(\cdot) h_x^{D_N}. \tag{3.52}$$

$h^{\Lambda_M(x)\setminus\{x\}}(x+\cdot)$ は $\mathcal{F}_{M,x}$ と独立であることおよび (3.51) より $\{h_x^{D_N} = t\}$ 上では

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[h^{D_N}(x+\cdot) - \Phi^{M,x}(x+\cdot) \in \ \cdot \ \middle|\ \mathcal{F}_{M,x}\right] &= \mathbb{P}\left[h^{\Delta^n\setminus\{0\}} + \mathfrak{g}^{\Delta^n}(\cdot) t \in \ \cdot \ \right] \\
&= \mathbb{P}\left[h^{\Delta^n} \in \ \cdot \ \middle| h_0^{\Delta^n} = t\right]. \quad \square
\end{aligned} \tag{3.53}$$

ステップ 2：包除の公式

補題 3.12 *([27, (11.47)])*

$$e^{-\langle \widehat{\eta}_{N,M}^D, f\rangle} = \sum_{A\subset D_N} 1_{\{A\subset\widehat{\Theta}_{N,M}\}} \prod_{x\in A}\left(e^{-f(\frac{x}{N}, h_x^{D_N} - m_N, \{h_x^{D_N} - h_{x+z}^{D_N} - \Phi_{x+z}^{M,x} | z\in\mathbb{Z}^2\})} - 1\right). \tag{3.54}$$

証明 (3.54) の左辺はつぎと等しい：

$$\sum_{B\subset D_N} 1_{\{\widehat{\Theta}_{N,M} = B\}} e^{-\sum_{x\in B} f(\frac{x}{N}, h_x^{D_N} - m_N, \{h_x^{D_N} - h_{x+z}^{D_N} - \Phi_{x+z}^{M,x} | z\in\mathbb{Z}^2\})}. \tag{3.55}$$

ここで各 $B \subset D_N$ に対して,

$$\begin{aligned}
1_{\{\widehat{\Theta}_{N,M} = B\}} &= 1_{\{B\subset\widehat{\Theta}_{N,M}\}} 1_{\{D_N\setminus B\subset\widehat{\Theta}_{N,M}^c\}} \\
&= 1_{\{B\subset\widehat{\Theta}_{N,M}\}} - 1_{\{B\subset\widehat{\Theta}_{N,M}\}} 1_{\bigcup_{x\in D_N\setminus B}\{x\in\widehat{\Theta}_{N,M}\}}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

ここで包除の公式より

$$1_{\bigcup_{x\in D_N\setminus B}\{x\in\widehat{\Theta}_{N,M}\}} = \sum_{k=1}^{|D_N\setminus B|} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le|D_N\setminus B|} 1_{\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\in\widehat{\Theta}_{N,M}\}}. \tag{3.57}$$

ただし, $D_N \backslash B = \{x_1, \dots, x_{|D_N \backslash B|}\}$ とおいた．よって, (3.56), (3.57) より,

$$1_{\{\widehat{\Theta}_{N,M}=B\}} = \sum_{k=0}^{|D_N \backslash B|} (-1)^k \sum_{\substack{C \subset D_N \backslash B \\ |C|=k}} 1_{\{B \cup C \subset \widehat{\Theta}_{N,M}\}}. \tag{3.58}$$

よって, (3.58) より (3.55) の右辺はつぎと等しい：

$$\sum_{B \subset D_N} \sum_{k=0}^{|D_N \backslash B|} (-1)^k \sum_{\substack{C \subset D_N \backslash B \\ |C|=k}} 1_{\{B \cup C \subset \widehat{\Theta}_{N,M}\}} e^{-\sum_{x \in B} f(\frac{x}{N}, h_x^{D_N} - m_N, \{h_x^{D_N} - h_{x+z}^{D_N} - \Phi_{x+z}^{M,x} | z \in \mathbb{Z}^2\})}. \tag{3.59}$$

和の順序交換をすることにより (3.59) の第 2 項はつぎと等しい：

$$\sum_{A \subset D_N} \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \backslash B|} 1_{\{A \subset \widehat{\Theta}_{N,M}\}} e^{-\sum_{x \in B} f(\frac{x}{N}, h_x^{D_N} - m_N, \{h_x^{D_N} - h_{x+z}^{D_N} - \Phi_{x+z}^{M,x} | z \in \mathbb{Z}^2\})}. \tag{3.60}$$

ここで (3.54) の積は $\sum_{B \subset A} (-1)^{|A \backslash B|} e^{-\sum_{x \in B} f(\frac{x}{N}, h_x^{D_N} - m_N, \{h_x^{D_N} - h_{x+z}^{D_N} - \Phi_{x+z}^{M,x} | z \in \mathbb{Z}^2\})}$ で表せるので, (3.60) は (3.54) の右辺と等しい．□

ステップ 3：$\widetilde{\eta}_{N,r_N}$ の **Laplace 汎関数に帰着.** このステップではクラスター (第 3 成分) について積分することで $\widehat{\eta}_{N,M}^D$ の Laplace 汎関数を $\widetilde{\eta}_{N,r_N}$ の Laplace 汎関数に帰着できることをみる：

補題 3.13 *([27, (11.56)])*

$$\mathbb{E}\left[e^{-\langle \widehat{\eta}_{N,M}^D, f \rangle}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\langle \widetilde{\eta}_{N,r_N}^D, f_{\nu_\infty} \rangle}\right] + o(1). \tag{3.61}$$

ただし, $f_{\nu_\infty}(x,t)$ はつぎで定義される：

$$e^{-f_{\nu_\infty}(x,t)} := E_{\nu_\infty}[e^{-f(x,t,\phi)}]. \tag{3.62}$$

証明. (3.54) で寄与する A はつぎを満たすものである：

$$x, y \in A, x \neq y \Rightarrow \Lambda_M(x) \cap \Lambda_M(y) = \emptyset. \tag{3.63}$$

しばらく (3.63) を満たす A を固定する．A の点およびその M-近傍の外側における DGFF が生成する σ-加法族を $\mathcal{F}_{A,r}$ とおく：

$$\mathcal{F}_{A,r} := \sigma\left(h_y^{D_N} \mid y \in A \cup \bigcap_{x \in A} \Lambda_M(x)^c\right).$$

補題 3.11 および (3.63) より

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\prod_{x \in A} 1_{\{x \in \widehat{\Theta}_{N,M}\}} \left(e^{-f(\frac{x}{N}, h_x^{D_N} - m_N, \{h_x^{D_N} - h_{x+z}^{D_N} - \Phi_{x+z}^{M,x} | z \in \mathbb{Z}^2\})} - 1\right) \middle| \mathcal{F}_{A,r}\right] \\ &= \prod_{x \in A} \mathbb{E}\left[\begin{matrix} 1_{\{\max_{z \in \Lambda_M(0)} h_z^{\Delta^n} = h_x^{D_N}\}} \\ \times \left(e^{-f(\frac{x}{N}, h_x^{D_N} - m_N, \{h_0^{\Delta^n} - h_z^{\Delta^n} \mid z \in \mathbb{Z}^2\})} - 1\right) \end{matrix} \middle| h_0^{\Delta^n} = h_x^{D_N}\right]. \end{aligned} \tag{3.64}$$

(3.64) において $\{\max_{z\in\Lambda_M(0)} h_z^{\Delta^n} = h_x^{D_N}\}$ のもとでの条件付け期待値を考えてさらに補題 3.11 を使うことにより (3.64) の右辺はつぎで表せる：

$$\mathbb{E}\left[1_{\{A\subset\widehat{\Theta}_{N,M}\}}\prod_{x\in A}(e^{-f_{N,r}(\frac{x}{N},h_x^{D_N}-m_N)}-1)\middle|\,\mathcal{F}_{A,r}\right]. \tag{3.65}$$

ただし, $f_{N,r}(x,t)$ はつぎで定義されるものとする：

$$e^{-f_{N,r}(x,t)} = \mathbb{E}\left[e^{-f(x,t,\{h_0^{\Delta^n}-h_z^{\Delta^n}\mid z\in\mathbb{Z}^2\})}-1\middle|\, h^{\Delta^n}\le h_0^{\Delta^n}, h_0^{\Delta^n}=m_N+t\right]. \tag{3.66}$$

(3.65) および包除の公式 (補題 3.12) よりつぎを得る：

$$\mathbb{E}\left[e^{-\langle\widehat{\eta}_{N,M}^D,f\rangle}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\langle\widehat{\eta}_{N,M}^D,f_{N,r}\rangle}\right]. \tag{3.67}$$

命題 3.10 より (3.67) の右辺は

$$\mathbb{E}[e^{-\langle\widetilde{\eta}_{N,r_N}^D,f_{N,r}\rangle}] \tag{3.68}$$

で近似できる. さらに命題 3.7 より $\langle\widetilde{\eta}_{N,r_N}^D,f_{N,r}\rangle$ を $\langle\widetilde{\eta}_{N,r_N}^D,f_{\nu_\infty}\rangle$ で近似できる. 以上より (3.61) が成り立つ. □

ステップ 4：仕上げ. 定理 3.1 およびステップ 1, 3 の命題 3.10, 補題 3.13 より,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\langle\eta_{N,r_N}^D,f\rangle}\right] &= \lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\langle\widetilde{\eta}_{N,r_N}^D,f_{\nu_\infty}\rangle}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_{D\times\mathbb{R}}(1-e^{-f_{\nu_\infty}(x,h)})Z^D(dx)e^{-\sqrt{2\pi}h}dh\right\}\right].\end{aligned} \tag{3.69}$$

f_{ν_∞} の定義 (3.62) より, (3.69) の期待値の中身の積分は

$$\int_{D\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}}(1-e^{-f(x,t,\phi)})Z^D(dx)\otimes e^{-\sqrt{2\pi}h}dh\otimes\nu_\infty(d\phi)$$

で表せる. したがって, 目標であった (3.5) を示せた. □

3.3 λ-thick point

定理 1.9 でみた通り, Daviaud 氏は DGFF の λ-thick point の数を評価した. Biskup-Louidor 氏らはより強い結果を最近得た：

定理 3.14 *([31, Theorems 2.1, 2.5, Corollary 2.2])* $\lambda\in(0,1)$ を任意にとる. $(a_N)_{N\ge1}$ は $\lim_{N\to\infty}\frac{a_N}{\log N}=\lambda\cdot 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ を満たすものとする.

$$K_N := \frac{N^2}{\sqrt{\log N}}\exp\left\{-\frac{a_N^2}{\frac{4}{\pi}\log N}\right\}.$$

とおく．$D\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$ 上の点過程 η_N^D を

$$\eta_N^D := \frac{1}{K_N}\sum_{x\in D_N}\delta_{\frac{x}{N}}\otimes\delta_{h_x^{D_N}-a_N}\otimes\delta_{\{h_x^{D_N}-h_{x+z}^{D_N}|z\in\mathbb{Z}^2\}}$$

とおく．$N\to\infty$ のとき

$$\eta_N^D \xrightarrow{law} Z_\lambda^D(dx)\otimes e^{-\lambda\sqrt{2\pi}h}dh\otimes\nu_\lambda(d\phi).$$

ただし Z_λ^D は劣臨界的 *Liouville* 量子重力測度[61], $\nu_\lambda(\cdot):=\nu^0(\phi+\lambda\sqrt{2\pi}\mathfrak{a}\in\cdot)$ [62].
特に *Daviaud* 氏の結果 *(*定理 *1.9)* はつぎのように強められる：$N\to\infty$ のとき

$$\frac{1}{K_N}|\{x\in D_N|\ h_x^{D_N}\geq a_N\}| \xrightarrow{law} \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}Z_\lambda^D(D).$$

(Update) **劣臨界的 Liouville 量子重力測度が現れる heuristics.** 簡単のため $D=(0,1)^2$ の場合を考える．本稿の 2.6 節の記号を用いる．h^{V_N} の fine field および coarse field への分解より

$$h^{V_N}=\sum_{i=1}^{K^2}1_{V_N^{K,i}}(h^{V_N^{K,i}}+X_{N,K}^c). \tag{3.70}$$

この分解および $X_{\lfloor N\cdot\rfloor,N,K}^c$ が $Z_{K,\delta}^c(\cdot)$ で近似できることより, これを Z_λ-測度の言葉に焼き直すとつぎが成り立つ：

$$Z_\lambda^{(0,1)^2}(dx)\approx\sum_{i=1}^{K^2}1_{W^{K,i}}(x)e^{\lambda\sqrt{2\pi}Z_{K,\delta}^c(x)}Z_\lambda^{W^{K,i}}(dx). \tag{3.71}$$

実際, 定理 3.14 および (3.70) より各開集合 $A\subset(0,1)^2$ および実数 $b\in\mathbb{R}$ に対して,

$$Z_\lambda^{(0,1)^2}(A)\int_b^\infty e^{-\lambda\sqrt{2\pi}h}dh\approx\frac{1}{K_N}\sum_{x\in V_N}\delta_{\frac{x}{N}}\otimes\delta_{h_x^{V_N}-a_N}(A\times[b,\infty)) \tag{3.72}$$

$$\approx\frac{1}{K_N}\sum_{i=1}^{K^2}\sum_{x\in V_N^{K,i}}\delta_{\frac{x}{N}}\otimes\delta_{h_x^{V_N^{K,i}}-a_N+X_{x,N,K}^c}(A\times[b,\infty)) \tag{3.73}$$

$$\approx\sum_{i=1}^{K^2}\int_{A\cap W^{K,i}}Z_\lambda^{W^{K,i}}(dx)\int_{b-Z_{K,\delta}^c(x)}^\infty e^{-\lambda\sqrt{2\pi}h}dh \tag{3.74}$$

$$\approx\sum_{i=1}^{K^2}\int_{A\cap W^{K,i}}Z_\lambda^{W^{K,i}}(dx)\int_b^\infty e^{-\lambda\sqrt{2\pi}(h-Z_{K,\delta}^c(x))}dh. \tag{3.75}$$

[61]劣臨界的 Liouville 量子重力測度の定義については [27, Section 2.4] および角田氏のご講演スライドをご覧ください．(Update) 注 3.2 で現れた μ_γ を思い出してください．ある正定数 c が存在して $Z_\lambda^D(dx)\overset{\text{law}}{=}c\mu_{2\lambda}(dx)$ が成り立ちます．
[62]ν^0 は $\mathbb{Z}^2\backslash\{0\}$ 上の DGFF の法則であることを思い出してください．

これより (3.71) を得る.

ここでつぎの Z_λ-測度の期待値の表現を使う (後でなぜこのような表現が成り立つかをみる[63])：各 $D \in \mathfrak{D}$ に対して,

$$\mathbb{E}\left[Z_\lambda^D(dx)\right] = c_\star \psi_\lambda^D(x)dx. \tag{3.76}$$

ただし, $c_\star$ はある正定数で

$$\psi_\lambda^D(x) := \exp\left\{2\lambda^2 \int_{\partial D} \Pi^D(x,dz)\log|x-z|\right\}.$$

$Z_{K,\delta}^c(x)$ の分散が補題 2.24 で現れる $C_K^c(x,x)$ で与えられることを思い出すと $\mathrm{Var}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z_{K,\delta}^c(x)\right)$ はつぎで表せる：

$$\int_{\partial(0,1)^2} \Pi^{(0,1)^2}(x,dz)\log|x-z| - \int_{\partial W^{K,i}} \Pi^{W^{K,i}}(x,dz)\log|x-z|.$$

このことおよび (3.76) より, $Z_{K,\delta}^c$ の条件付けもとで (3.71) の両辺の条件付き期待値をとると $\mathbb{E}[Z_\lambda^{(0,1)^2}(dx)|\sigma(Z_{K,\delta}^c)]$ はつぎで近似される：

$$c_\star \psi_\lambda^{(0,1)^2}(x) e^{2\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z_{K,\delta}^c(x) - \frac{(2\lambda)^2}{2}\mathrm{Var}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}Z_{K,\delta}^c(x)\right)}dx.$$

この形は注 3.2 で記した $\mu_{2\lambda}$ に似ている.

(3.76) の説明. (3.72) の第 1 行目は $(0,1)^2$, V_N をそれぞれ D, D_N に置き換えても成立する (ただし $A \subset D$). その両辺を積分すると $\mathbb{E}[Z_\lambda^D(A)]\int_b^\infty e^{-\lambda\sqrt{2\pi}h}dh$ はつぎで近似される：

$$\frac{1}{K_N}\sum_{\frac{x}{N}\in A} \mathbb{P}\left[h_x^{D_N} \geq a_N + b\right]. \tag{3.77}$$

ガウス確率変数の裾分布の漸近挙動より, (3.77) の確率はつぎで近似される：

$$\frac{\sqrt{G^{D_N}(x,x)}}{\sqrt{2\pi}(a_N+b)} e^{-\frac{(a_N+b)^2}{2G^{D_N}(x,x)}}. \tag{3.78}$$

ポイントは Green 関数の漸近挙動 (補題 1.7) である：

$$G^{D_N}(x,x) \approx \frac{2}{\pi}\log N + c_0 + \frac{2}{\pi}\int_{\partial D} \Pi^D(\frac{x}{N},dz)\log|\frac{x}{N}-z|.$$

これを (3.78) に代入すると (3.78) はつぎで近似できる：ある正定数 c_1 が存在して

$$c_1 \frac{K_N}{N^2} e^{-\lambda\sqrt{2\pi}b}\psi_\lambda^D(\frac{x}{N}).$$

これより (3.77) はつぎで近似される：

$$c_1 \lambda\sqrt{2\pi}\frac{1}{N^2}\sum_{\frac{x}{N}\in A}\psi_\lambda^D(\frac{x}{N})\int_b^\infty e^{-\lambda\sqrt{2\pi}h}dh.$$

以上より, (3.76) が成立する.

[63] 一言でいえば Green 関数の漸近挙動 (補題 1.7) からくる.

4 SRW の被覆時間・局所時間の極大値

本章では DGFF と深いかかわりのある 2 分木あるいは 2 次元格子上の SRW の被覆時間および局所時間について 2, 3 章の内容と関連する研究を紹介する.

本章で扱うグラフは 2 分木および 2 次元格子に限定するが, まずは一般のグラフに対して被覆時間・局所時間を定義し, それらと DGFF の関係について述べておく.

$G = (V, E)$ を有限連結グラフとする[64]. G 上の連続時間 SRW を $X = (X_t)_{t \geq 0}$ と表記する. ただし, X の各点での待ち時間は独立な期待値 1 の指数分布に従う確率変数で与えられる. 時刻 t, 点 v における局所時間とは SRW が時刻 t まで走ったとき SRW が点 v に滞在する累積時間であり, つぎで定義される[65]:

$$L_t^V(v) := \frac{1}{\deg(v)} \int_0^t 1_{\{X_s = v\}} ds. \tag{4.1}$$

G の特別な点 v_0 を指定しておくと SRW を分解するとき都合がよい[66]. この v_0 における逆局所時間をつぎで定義する[67]:

$$\tau(t) := \inf\{s \geq 0 : L_s^V(v_0) > t\}, \quad t > 0. \tag{4.2}$$

興味があるのは SRW が最も頻繁に訪問する点の位置およびその訪問回数であり, それらを調べるために局所時間の場 $(L_{\tau(t)}^V(v))_{v \in V}$ の極大値統計を解析する.

つぎに被覆時間 (cover time) を定義する. 被覆時間とは SRW がグラフのすべての点を訪問し尽くすまでに要する時間のことであり, つぎで定義される:

$$\tau_{\mathrm{cov}}^V := \max_{v \in V} H_v. \tag{4.3}$$

ただし, H_v は SRW が点 v へ初めて到達する時刻であり, つぎで定義される:

$$H_v := \inf\{t \geq 0 : X_t = v\}. \tag{4.4}$$

被覆時間の定義 (4.3) から明らかだが, 被覆時間を解析することは到達時刻の場 $(H_v)_{v \in V}$ の最大値を解析することにあたる.

---

[64] V は G の頂点集合, E は G の辺集合である.

[65] $\deg(v)$ は点 v に隣り合う点の数であり次数と呼ばれる.

[66] 例えば SRW を v_0 まわりでの周遊に分解すると見通しがよくなることが多い.

[67] 局所時間が独立な期待値 $\frac{1}{\deg(v_0)}$ の指数分布に従う確率変数の和として表せることより, 時刻 $\tau(t)$ までに現れる v_0 まわりの周遊の数は期待値 $\deg(v_0)t$ の Poisson 分布に従う. 実は deterministic な個数でなく Poisson 個の周遊を考えるほうが分布計算がきれいになることが多い. その理由の一端は Poisson 分布, 指数分布, Gauss 分布の間のつぎの不思議な関係にあると考えられる (この関係は Dynkin 同型の最も単純な場合とみなせる. Laplace 変換を計算すれば示せます. [54, Lemma 2.4] をご覧ください):

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i + \frac{1}{2} Z^2 \overset{\text{law}}{=} \frac{1}{2}(Z + \sqrt{2t})^2.$$

ただし, $Y_i, i \geq 1$, Z, N は独立な確率変数であり, それぞれ期待値 1 の指数分布, 標準正規分布, 期待値 t の Poisson 分布に従う.

局所時間・被覆時間は純粋に SRW の言葉だけで定義されるものだが, 不思議なことに DGFF と密接な関係がある[68]. Eisenbaum-Kaspi-Marcus-Rosen-Shi 氏らにより局所時間と DGFF の分布に対してつぎの分布等式が成り立つことが示され, Dynkin 同型 (Dynkin isomorphism) あるいは一般化された第 2 Ray-Knight 定理 (generalized second Ray-Knight theorem) と呼ばれる[69]：

定理 4.1 *(Dynkin 同型 [62])* 任意の $t > 0$ に対して,

$$\left\{ L^V_{\tau(t)}(v) + \frac{1}{2}(h^V_v)^2 : v \in V \right\} \overset{law}{=} \left\{ \frac{1}{2}(h^V_v + \sqrt{2t})^2 : v \in V \right\}. \tag{4.5}$$

ただし, (4.5) の左辺では局所時間と DGFF は独立とする. また (4.5) の左辺では v_0 出発の SRW に対する局所時間を考えている.

Dynkin 同型 (定理 4.1) を援用することによって Ding-Lee-Peres 氏らと Zhai 氏は被覆時間と DGFF の最大値のつぎの関係を示した：

定理 4.2 *(被覆時間と DGFF の関係 [55, 96])* $G = (V, E)$ に依存しない正定数 $C > 0$ が存在して,

$$1 - C\sqrt{\frac{t^G_{hit}}{t^G_{cov}}} \le \frac{t^G_{cov}}{|E| \left(\mathbb{E}\left[\max_{v \in V} h^V_v\right]\right)^2} \le 1 + C\sqrt{\frac{t^G_{hit}}{t^G_{cov}}}. \tag{4.6}$$

ただし, $t^G_{cov} := \max_{u \in V} E_u[\tau^V_{cov}]$, $t^G_{hit} := \max_{u,v \in V} E_u[H_v]$.

任意のグラフに対して (4.6) が成り立つという被覆時間と DGFF の関係そのものが大変興味深いが, それだけでなく被覆時間の研究において DGFF およびそれと関連する BBM・BRW の解析手法を援用できることを気づかせる大きなきっかけになったということも非常に重要な点である. 実際, Ding-Lee-Peres 氏らにより被覆時間と DGFF の関係が見出されて以降, 従来では得られなかった被覆時間の精密な結果がつぎつぎと示された [56, 53, 54, 20, 21, 22].

特に G が 2 分木あるいは 2 次元格子の場合, 局所時間の場 $(L^V_{\tau(t)}(v))_{v \in V}$ および到達時刻の場 $(H_v)_{v \in V}$ は 2 次元 DGFF, BBM, BRW を含む「対数相関をもつランダム場」のクラスに属する[70]. 対数相関をもつランダム場の極大値の解析方

---

[68] 一般のグラフ上での DGFF も定義 1.3 と同様に定義される. G 上の DGFF$(h_v)^V_{v \in V}$ とは $\mathbb{R}^V$-値ガウス確率変数であり, 期待値は 0, 共分散は Green 関数 $G^V(x, y) := E_x[L^V_{H_{v_0}}(y)]$ で与えられるものである：

$$\mathbb{E}[h^V_x] = 0, \ \mathbb{E}[h^V_x h^V_y] = G^V(x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

定義 1.3 と異なる箇所は Green 関数の定義である：いま定義した DGFF では Green 関数は (次数)$^{-1}$ × (訪問回数の期待値) の形をしているが, 定義 1.3 では Green 関数は訪問回数の期待値として定義されている. あとで 2 次元 DGFF の結果を引用する際, 1, 2, 3 章で述べたものと定数分だけ違うかもしれませんがその理由はこの Green 関数の定義の違いに由来します. ややこしくてすみませんが混乱なさらないようにしてください.

[69] Dynkin 同型は [61] までさかのぼる. [62] ではもっと一般の強対称再帰的 Markov 過程に対して Dynkin 同型が示されている. 最近 Lupu 氏と Zhai 氏は (4.5) が分布の意味ではなく通常の等式として確率 1 で成り立つような局所時間と DGFF のカップリングの構成法を考え出した [78], [96].

[70] 対数相関をもつランダム場の正確な定義がある訳ではない. 大雑把にいえば共分散が 2 点の距離の対数程度で減衰するランダム場である.

法の大筋は非常に類似しており, 2 分木/2 次元格子上の局所時間・到達時刻の極大値を解析する際に 2, 3 章でみた手法を援用できる.

2 次元 DGFF を別の Gauss 場 (MBRW) で近似したように被覆時間・局所時間の極大値の研究においても BRW・BBM の研究手法を適用できるようにするために到達時刻・局所時間そのものを扱うのではなくそれを近似するような別のランダム場で近似する. そのランダム場は各点近傍をいくつかの層に分けたとき SRW が各層を通過する回数を測る量であり, 以下では「横断回数過程」と呼ぶことにする. 例えば被覆時間の研究の中心は SRW が訪れにくい点の解析であるが, 「訪れにくい事象」を「横断回数過程が 0 へと減少していく事象」[71]で近似して解析する. 局所時間の極大値の解析では逆に SRW が頻繁に訪問する点の解析が中心であるが, 「頻繁に訪問する事象」を「横断回数過程が最大値付近へと増加していく事象」[72]で近似して解析する. 実はこのように横断回数過程の解析に持ち込むことによって BRW・BBM の解析手法を援用できる. この横断回数過程の方法は Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni 氏らにより開発され [49, 50], 最近 Belius-Kistler 氏らによって横断回数過程は Galton-Watson 過程と同分布であり[73], 解析の鍵は Galton-Watson 過程の障壁評価であることが明らかになった [20].

以下の 2 つの節でこれらの内容を概説する.

4.1 2 分木上の被覆時間・局所時間の極大値

本節では 2 分木上の SRW の被覆時間および局所時間の極大値の研究を概観する.

2 分木とはどの点も 2 つの子どもをもつグラフ木である. まずは 2 分木に関する記号の準備をする. 2 分木の根 (root) を ρ と表記し, 0 世代目を $T_0 := \{\rho\}$ とおく. 2 分木の各点は 2 個の子どもをもつのでそれぞれを 0, 1 で区別する. このとき $k \geq 1$ に対して k 世代目の集合は

$$T_k := \{(v_1, v_2, \ldots, v_k) : v_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, k\}$$

と表せ, 各 $v = (v_1, \ldots, v_k) \in T_k$ $(k \geq 1)$ は 3 点 $(v_1, \ldots, v_{k-1})$, $(v_1, \ldots, v_k, 0)$, $(v_1, \ldots, v_k, 1)$ と辺で結ばれている[74]. 2 分木を有限なものに制限したいのでここでは深さ n の 2 分木

$$T_{\leq n} := \bigcup_{i=0}^{n} T_i$$

を考える. 以下では $T_{\leq n}$ 上の被覆時間および局所時間の極大値それぞれに分けてその研究概要をみる.

4.1.1 2 分木上の被覆時間

ここでは深さ n の 2 分木 $T_{\leq n}$ 上の被覆時間 $\tau_{\mathrm{cov}}^{T_{\leq n}}$ の研究を概観する.

まず Aldous 氏によって被覆時間の第 1 次オーダーはつぎで与えられることが知られている：

[71] 内側の層ほど横断回数は 0 に近づく, という意味です.
[72] 内側の層ほど横断回数は最大値に近づく, という意味です.
[73] より正確には出生分布が期待値 1 の幾何分布である Galton-Watson 過程と同分布.
[74] 根 ρ は 2 点 (0), (1) と辺で結ばれている.

定理 4.3 *(第 1 次オーダー [9])* $n \to \infty$ のとき

$$E_\rho\left[\tau_{cov}^{T_{\le n}}\right] = (1+o(1))2^{n+1}(2\log 2)n^2.$$

Ding-Zeitouni 氏らは BRW の解析手法を援用することによって被覆時間の第 2 次オーダーを求めた：

定理 4.4 *(第 2 次オーダー [56])* つぎの事象の確率は $n \to \infty$ のとき 1 に収束する：

$$\sqrt{\frac{\tau_{cov}^{T_{\le n}}}{2^{n+1}}} = \sqrt{2\log 2}\, n - \frac{1}{\sqrt{2\log 2}}\log n + O((\log\log n)^8). \tag{4.7}$$

被覆時間と DGFF の関係 (4.6) より $\sqrt{\frac{\tau_{cov}^{T_{\le n}}}{2^{n+1}}} \approx \max_{v\in T_{\le n}} h_v^{T_{\le n}}$ だろうと予想されるが, Ding-Zeitouni 氏らが [56] で指摘しているように確かに第 1 次項は一致するが第 2 次項は一致しないことが知られている[75]. 実際, Addario-Berry-Reed 氏らにより DGFF についてつぎが示されている[76]：

定理 4.5 *(DGFF の最大値 [5])*

$$\mathbb{E}\left[\max_{v\in T_{\le n}} h_v^{T_{\le n}}\right] = \sqrt{2\log 2}\, n - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2\log 2}}\log n + O(1). \tag{4.8}$$

(4.7) と (4.8) を比較すると第 2 事項の係数が $\frac{3}{2}$ だけ異なる. さらに Bramson-Zeitouni 氏らおよび Belius-Rosen-Zeitouni 氏らにより被覆時間から (4.7) の右辺の第 2 項までを差し引いたものが緊密であることが示されている[77]：

定理 4.6 *(緊密性 [40, 21])*

$$\sqrt{\frac{\tau_{cov}^{T_{\le n}}}{2^{n+1}}} - \left(\sqrt{2\log 2}\, n - \frac{1}{\sqrt{2\log 2}}\log n\right),\ n \ge 1 \text{ は緊密}. \tag{4.9}$$

(4.9) の確率変数列が法則収束するかどうかは (筆者の知る限り) 未解決である.

本章のはじめでも述べたが, (4.9) の証明で解析の鍵となるのは横断回数過程の障壁評価である[78]. 先に述べたように横断回数過程は Galton-Watson 過程なので [21, Theorem 1.1] では Galton-Watson 過程の精密な障壁評価を得ている.

4.1.2 2 分木上の局所時間の極大値統計

ここでは深さ n の 2 分木 $T_{\le n}$ 上の局所時間の極大値統計に関する筆者の研究を紹介する.

[75] この違いは Gauss 分布と指数分布の違いからくる (到達時刻の分布は指数分布に近い). この詳細については [20, Section 1.2] をご覧ください.

[76] 2 分木上の DGFF は 2 分木上の BRW であることに注意してください.

[77] [21, Theorem 1.3] では (4.9) の右裾分布, 左裾分布の評価を得ている. 特に右裾分布の評価は非常に精密である.

[78] いまの場合, 各葉 (leaf) $v \in T_n$ に対応する横断回数過程は根 ρ から v にいたるパス上の各辺を通過する回数である.

SRW が頻繁に訪問する点の位置およびその値に興味がある. SRW は「下側」へ動きたがるので[79], 葉 (leaf) の集合 T_n 上で局所時間が極大値をとる点の位置およびその値に制限してもよいだろう. では葉の「位置」をどのように定義すればよいだろうか. ここで BBM に対して同様な研究を先駆的におこなった Bovier-Hartung 氏らの [35] における定義法を参考にしてつぎのように定義する：まず 2 分木の各点は 0 か 1 の成分をもつ文字列で与えられることを思い出そう. その文字列に対応する 2 進小数をその点の「位置」と定義するのが自然であろう. すなわち, 各葉 $v \in T_n$ に対して $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ の位置 $\sigma(v)$ をつぎで定義する：

$$\sigma(v) := \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{2^i}.$$

つぎに局所時間の極大値を考えたいので葉の集合 T_n を細かく分解する必要がある. 例えば T_n を各小部分集合のサイズが 2^r になるように細分するにはまず $(n-r)$ 世代目の点 $u \in T_{n-r}$ をとり, u を根とする部分木の r 世代目の集合 T_r^u を考えればよい. すなわち, 各 $u \in T_{n-r}$ に対応する極大値 $\max_{v \in T_r^u} \sqrt{L_{\tau(t)}^{T_{\leq n}}(v)}$ および極大値をとる点 $\arg\max_{v \in T_r^u} \sqrt{L_{\tau(t)}^{T_{\leq n}}(v)}$ を考える. そこで局所時間の極大値統計としてつぎの点過程を調べればよい：

$$\Xi_{n,t}^{(r)} := \sum_{u \in T_{n-r}} \delta_{\sigma(\arg\max_{v \in T_r^u} L_{\tau(t)}^{T_{\leq n}}(v))} \otimes \delta_{\max_{v \in T_r^u} \sqrt{L_{\tau(t)}^{T_{\leq n}}(v)} - \sqrt{t} - a_n(t)}. \tag{4.10}$$

ただし,

$$a_n(t) := \sqrt{\log 2}\ n - \frac{3}{4\sqrt{\log 2}} \log n - \frac{1}{4\sqrt{\log 2}} \log\left(\frac{\sqrt{t} + n}{\sqrt{t}}\right).$$

筆者は点過程 $\Xi_{n,t}^{(r)}$ について定理 3.1 に対応するつぎの結果を得た[80]：

定理 4.7 *([2, Theorem 1.1])* 十分大きな正定数 c をとり, つぎを満たす正数列 $(t_n)_{n\geq 1}$, $(r_n)_{n\geq 1}$ を任意にとる：

$$t_n \geq cn\log n,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{t_n}}{n} = \theta \in [0, \infty],$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty,\ \ \limsup_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} < 1.$$

$n \to \infty$ のときつぎが成り立つ：

$$\Xi_{n,t_n}^{(r_n)} \overset{law}{\to} PPP\left(\alpha(\theta) Z_\infty(dx) \otimes e^{-2\sqrt{\log 2}y} dy\right). \tag{4.11}$$

ただし, $\alpha(\theta)$ は θ に依存する正定数, $Z_\infty(dx)$ は $[0,1]$ 上のランダム測度であり, 定数の差を除いて臨界的 *Mandelbrot* カスケード測度と同分布である.

[79] つまり T_k 上にいる SRW はつぎのステップで T_{k-1} へ行く確率よりも T_{k+1} へ行く確率のほうが大きい.

[80] 2 分木だけでなく b 分木 $(b \geq 2)$ でも同様な結果が成り立ちます.

ここでは Mandelbrot カスケード測度については詳しく述べず, 参考文献のみ挙げておく. 定義および諸性質については [18, 19, 43] 等をご覧ください. Mandelbrot カスケードは Liouville 量子重力測度の 1 次元版とみなせる. BBM・BRW の研究が 2 次元 DGFF の研究で重要な技術提供をしているように, Mandelbrot カスケード測度の研究手法が Liouville 量子重力測度の研究で援用されている.

定理 4.7 の証明でも被覆時間の場合と同様に横断回数過程の方法をとることも可能だろうが, 実は各葉 $v \in T_n$ に対して, ρ から v にいたるパス上の局所時間過程は 0 次元 2 乗 Bessel 過程と同分布であることがいえる[81]. このことから感覚的な言葉でいうと局所時間の場 $(\sqrt{L^{T_{\le n}}_{\tau(t_n)}(v)})_{v \in T_n}$ を「分枝 0 次元 Bessel 過程」とみなせる. 0 次元 Bessel 過程の分布を Brown 運動の分布と結びつけることが可能であり, BBM の解析手法を局所時間の極大値統計の解析でも援用可能となる.

筆者は現在, 定理 3.3 の 2 分木上の局所時間版にあたる研究を Biskup 氏と共同で研究している.

4.2 2 次元格子上の被覆時間・局所時間の極大値

本節では 2 次元格子上の SRW の被覆時間および局所時間の極大値の研究を概観する.

4.2.1 2 次元離散トーラス上の被覆時間

ここでは 1 辺 n の 2 次元離散トーラス $\mathbb{Z}_n^2 := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ 上の被覆時間 $\tau_{\mathrm{cov}}^{\mathbb{Z}_n^2}$ の研究を概観する.

Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni 氏らによって被覆時間の第 1 次オーダーはつぎで与えられることが示された：

定理 4.8 *(第 1 次オーダー [50])* $n \to \infty$ のとき

$$\frac{\tau_{cov}^{\mathbb{Z}_n^2}}{n^2(\log n)^2} \to \frac{4}{\pi}. \quad \text{(確率収束)}$$

Dembo 氏らは [51] において到達時刻が $\alpha \frac{4}{\pi} n^2 (\log n)^2$ 以上になる点 (α-late point) の集合

$$\mathcal{L}_n(\alpha) := \{x \in \mathbb{Z}_n^2 : H_x \ge \alpha \cdot \frac{4}{\pi} n^2 (\log n)^2\}$$

の構造を調べている. たとえば Dembo 氏らは late point のペアの個数を評価している：

定理 4.9 *(Late points [51])* 任意の $\alpha, \beta \in (0,1)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{(x,y) \in \mathcal{L}_n^2(\alpha) : d(x,y) \le n^\beta\}|}{\log n} = \rho(\alpha, \beta). \quad \text{(確率収束)} \tag{4.12}$$

[81] これは Dynkin 同型 (4.5) から従う. いまの場合パス上の DGFF は Brown 運動 (を離散時間に制限したもの) とみなせるので, Brown 運動の局所時間過程と 0 次元 Bessel 過程に関する古典的な結果である.

ただし $d(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{Z}_n^2$ 上の ℓ^2-距離であり,

$$\rho(\alpha,\beta) := \begin{cases} 2+2\beta-\frac{4\alpha}{2-\beta}, & (\beta \le 2(1-\sqrt{\alpha})), \\ 8(1-\sqrt{\alpha})-\frac{4(1-\sqrt{\alpha})^2}{\beta}, & (\beta \ge 2(1-\sqrt{\alpha})). \end{cases} \tag{4.13}$$

Dembo 氏らは [51] において全 α-late points の数は $\approx n^{2(1-\alpha)}$ であり, 一様ランダムにとった α-late point を中心とした半径 n^β の円板内の late points の数は $\approx n^{2\beta(1-\alpha)}$ であることを示している. よって, (4.12) の左辺の集合のサイズは $\approx n^{2(1-\alpha)} \cdot n^{2\beta(1-\alpha)} = n^{2+2\beta-2\alpha(\beta+1)}$ と予想される. しかし定理 4.9 の通り, β が小さいとき (4.12) の左辺の集合のサイズは予想される量よりもずっと大きい. このことから late points 達はクラスターを形成すると考えられる. さらに Brummelhuis-Hilhorst 氏らおよび岡田氏の結果より, (4.12) の左辺の集合のサイズの期待値は (4.13) とは異なる指数をもつことが知られている:

定理 4.10 *(Late points:* 期待値版 *[42] (k = 2), [84] (k ≥ 2))* 任意の $\alpha,\beta \in (0,1)$ と任意の $k \ge 2$ に対して,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{\log E\left[|\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{L}_n(\alpha)^k : d(x_i,x_j) \le n^\beta,\ 1 \le \forall i,j \le k\}|\right]}{\log n} \\ &= \begin{cases} 2+2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \le 1+\frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}) \\ 2(j+1-2\sqrt{j\alpha}) & (\beta \ge 1+\frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}). \end{cases} \end{aligned}$$

このように late points の集合はとらえがたい複雑な構造をしていると考えられる. 最近では random interlacement と呼ばれる模型をもとに late point 近傍の構造を調べる研究もある [46, 47, 89].

Ding 氏は [54] において一般の有限次数グラフ列の被覆時間を DGFF の最大値と関係づけて解析する手法を開発した. その手法および 2 次元 DGFF の最大値の緊密性 (定理 1.10) を援用して被覆時間の第 2 次オーダーを評価した[82]:

定理 4.11 *(*第 2 次オーダー:離散版 *I [53])* つぎの事象の確率は $n \to \infty$ のとき 1 に収束する:

$$\frac{\tau_{cov}^{\mathbb{Z}_n^2}}{\frac{2}{\pi}n^2\log n} = 2\log n + O(\log\log n).$$

4.1 節でみたように被覆時間と DGFF の最大値の第 2 次項は一般には一致しない. したがって, 被覆時間を DGFF の最大値で近似する方法には限界があり, [50] における Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni 氏らの解析手法をより洗練させる必要がある. Belius-Kistler 氏らはそれを実行し 2 次元連続トーラス $\mathbb{T}^2 := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ 上の Brown 運動の被覆時間の第 2 次項を精密に求めた:

定理 4.12 *(*第 2 次オーダー:連続版 *[20])* 次の事象の確率は $\varepsilon \to 0$ のとき 1 に収束する:

$$\frac{C^*_{\varepsilon,\mathbb{T}^2}}{\frac{1}{\pi}\log\varepsilon^{-1}} = 2\log\varepsilon^{-1} - (1+o(1))\log\log\varepsilon^{-1}.$$

ただし, $C^*_{\varepsilon,\mathbb{T}} := \sup_{x\in\mathbb{T}^2} C_{x,\varepsilon,\mathbb{T}^2}$, $C_{x,\varepsilon,\mathbb{T}^2}$ は $\mathbb{T}^2$ 上の *Brown* 運動が点 x を中心とした半径 ε の円板に初めて到達する時刻.

[82] ただし係数を特定していない.

筆者は [20] における Belius-Kistler 氏らの解析手法を援用して離散トーラス $\mathbb{Z}_n^2$ の被覆時間の第 2 次項を精密に評価した：

定理 4.13 *(第 2 次オーダー：離散版 II [3])* ある $\gamma \in (0,1)$ が存在してつぎの事象の確率は $n \to \infty$ のとき 1 に収束する：

$$\frac{\tau_{cov}^{\mathbb{Z}_n^2}}{\frac{2}{\pi} n^2 \log n} = 2\log n - \log\log n + O((\log\log n)^\gamma).$$

2 次元の被覆時間の緊密性は長らく未解決であったが, 連続の場合で最近 Belius-Rosen-Zeitouni 氏らが肯定的に解決した：

定理 4.14 *(緊密性 [22])* M を境界のない滑らかなコンパクト連結 2 次元 *Riemann* 多様体とする．$C_{x,\varepsilon,M}$ を M 上の *Brown* 運動が x の ε-近傍に初めて到達する時刻とする．M の ε-被覆時間を

$$C^*_{\varepsilon,M} := \sup_{x\in M} C_{x,\varepsilon,M}$$

で定義する．さらに M の面積を A_M とおく．このときつぎが成り立つ：

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} P\left[\left|\sqrt{C^*_{\varepsilon,M}} - \sqrt{\frac{2A_M}{\pi}}\left(\log\varepsilon^{-1} - \frac{1}{4}\log\log\varepsilon^{-1}\right)\right| > \lambda\right] = 0.$$

2 次元離散トーラスの場合も 2 分木の場合と同様に SRW の横断回数過程をもとに被覆時間を解析する．2 分木の場合は根から葉へのパス上の横断回数過程を自然に定義できたが, 2 次元離散トーラスの場合は横断回数過程をどのように定義すればよいか非自明である．Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni 氏らは [50] において各点を中心としたいくつかの円環の層を考え, SRW が各層を横断する回数を横断回数過程として採用した．[50] では横断回数過程の分布は明示されていなかったが Belius-Kistler 氏らは [20] においてその分布が Galton-Watson 過程の分布と一致することを示し, BRW・BBM の研究で開発された解析手法を用いて横断回数過程をより精密に解析する道を切り開いた[83].

連続の場合と離散の場合の大きな違いはつぎの通り：連続の場合では横断回数過程の分布は Galton-Watson 過程の分布と真に一致するが, 離散の場合では真の一致は望めず横断回数過程の分布を Galton-Watson 過程の分布で近似するしかない．筆者は [3] においてこの近似誤差が第 2 次項の評価に悪さをしないことを示した．

4.2.2　2 次元格子上の局所時間の極大値

ここでは 2 次元格子上の SRW の局所時間の極大値の研究を概観する．

Dembo-Peres-Rosen-Zeitouni 氏らは $\mathbb{Z}^2$ 上の離散時間 RW が原点中心の半径 n の円板 $B(0,n)$ から脱出するまでの最大訪問回数を精密に評価した：

[83] 感覚的な言葉でいえば横断回数過程の場は次のようなものである：$\mathbb{Z}_n^2$ の各点に Galton-Watson 過程が対応しており, それらは対数相関している．

定理 4.15 *(最大値 I [49, Theorem 5.1])* $\mathbb{Z}^2$ 上の $RW(S_i)_{i\geq 0}$ は非周期的で独立同分布な増分をもち, 増分の期待値は 0, 増分の任意のモーメントは有限であると仮定する. Γ を増分の共分散行列とする. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max_{x\in B(0,n)} \ell_{\tau_n}(x)}{(\log n)^2} = \frac{2}{\pi\sqrt{det\,\Gamma}} \quad a.s.$$

ただし, $\ell_k(x) := \sum_{i=0}^k 1_{\{S_i=x\}}$, τ_n は RW が $B(0,n)$ から脱出する時刻である.

(Update) なお増分が対称かつ有限な分散をもつという仮定だけでも定理 4.15 の主張が成り立つことを Jego 氏が示したようである [67].

Dembo 氏らは [51] において (lazy)SRW の訪問回数が $\alpha\frac{4}{\pi}(\log n)^2$ 以上になる点の集合

$$\Psi_n(\alpha) := \{x \in B(0,n) : \ell_{\tau_n}(x) \geq \alpha \cdot \frac{4}{\pi}(\log n)^2\}$$

上のペアの個数について予想をたて, 岡田氏は最近その予想を解決した：

定理 4.16 *(Thick points [83]) SRW* に対して次が成り立つ：任意の $\alpha, \beta \in (0,1)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|\{(x,y) \in \Psi_n(\alpha)^2 : d(x,y) \leq n^\beta\}|}{\log n} = \rho(\alpha,\beta) \quad a.s.$$

ただし, $\rho(\alpha,\beta)$ は *(4.13)* と同じもの.

筆者は $\mathbb{Z}_n^2$ 上の SRW を時刻 $\theta\times$ (被覆時間) まで走らせたときの局所時間の最大値の第 1 次オーダーを評価した：

定理 4.17 *(最大値 II [1])* $\theta > 0$ を任意にとる. つぎの事象の確率は $n \to \infty$ のとき 1 に収束する： 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\frac{\max_{v\in\mathbb{Z}_n^2} L^{\mathbb{Z}_n^2}_{\tau(t_\theta)}(v) - t_\theta}{\sqrt{2t_\theta}} = (1\pm\varepsilon)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log n. \tag{4.14}$$

ただし $t_\theta := \theta\cdot\frac{1}{\pi}(\log n)^2$.

Dynkin 同型 (定理 4.1) より (4.14) の左辺は $\frac{1}{2}\times$ (DGFF の最大値) で近似できると予想されるが, DGFF の最大値評価 (定理 1.8) と比較すると係数部分で両者に $\frac{1}{2\sqrt{\theta}}$ 分の差があることがわかる[84].

筆者は現在, 定理 3.14 の局所時間版にあたる研究を進めている.

[84] 定理 1.8 の係数は $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ であり定理 4.17 の係数は $(1+\frac{1}{2\sqrt{\theta}})\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ なので $\frac{1}{2\sqrt{\theta}}$ だけでなく 2 の違いもあるではないかと思われるかもしれませんが, この 2 の差は本章と 1 章の DGFF の定義の違いからきます. 本章のはじめの DGFF に関する注をご覧ください.

5 対数相関をもつランダム場の普遍性

<u>分枝 **Brown 運動 (BBM)**・分枝ランダムウォーク **(BRW)**</u>：(Update) BBM とはつぎで定義されるモデルである：時刻 0 で原点に 1 個粒子があり，その粒子は $\mathbb{R}$ 上を Brown 運動する．期待値 1 の指数分布に従うランダム時刻でその粒子は 2 個の粒子に分裂する．分裂してできた 2 個の粒子はその場所から独立に Brown 運動し，独立なランダム時刻で 2 個に分裂する．これを繰り返してできるのが BBM である[85]．粒子の運動を Brown 運動からランダムウォークに変えたものが BRW である．時刻 t に存在する粒子 i, j の位置 $x_i(t), x_j(t)$ の相関は分枝した時刻 $T(i,j)$ に依る．$T(i,j)$ が小さいとき，つまり i, j が早くに分枝したとき i, j の距離は遠く，$T(i,j)$ が大きいとき，つまり i, j が遅くに分枝したとき i, j の距離は近いと考えるのが自然である．そこで i, j の「距離」を $e^{-T(i,j)}$ で与えると BBM は対数相関をもつとわかる．

本稿でみたように 2 次元 DGFF の研究の大きな哲学の 1 つとして「BRW・BBM の議論に持ち込む」という考え方がある．2 次元 DGFF の論文を読んでいてどうしてそういった発想が出てくるのかと不思議に思う箇所が多くあるが，たいていの場合それらの源泉は BRW・BBM の研究の中にある．BRW・BBM は木の構造がはっきりしているので比較的扱いやすく，解析技術のアイディアを理解するには格好のお手本である．BRW・BBM の類似の研究を調べることでよりいっそう 2 次元 DGFF の理解を深めることができる．BRW・BBM の研究は多岐にわたりそれらを概観することは困難だが，本稿に関係する内容に絞っていくつか文献を挙げておく：

1. BRW・BBM の最大値[86]の期待値は第 2 次項までわかっており，最大値からその期待値を引いたものは Gumbel 分布のランダムシフトに収束する．[36, 74, 6, 39]

2. 極大値をとる BBM 粒子同士は非常に近いか非常に離れている．[13]

3. BBM・BRW の極大値統計は Cox 過程にクラスターを付加したものに収束する．[14, 15, 8, 79, 35]

<u>対数相関をもつランダム場</u>：本稿では主に 2 次元 DGFF を扱い，BRW, BBM, 2 次元 SRW の局所時間・到達時刻についても少し触れた．広い視野でみるとこれらは「対数相関をもつランダム場」と位置付けられる[87]．対数相関をもつランダム場の極大値の性質はある種の「普遍性」をもつだろうと信じられている．実際，広いクラスの対数相関をもつガウス場の最大値は Gumbel 分布のランダムシフトに収束することが Ding-Roy-Zeitouni 氏らによって示されている [58]．特に 2 次元のモデルでは極大値統計の極限として Liouville 量子重力測度が現れるだろうと信じられている．3 章で少し触れたように Biskup 氏と Louidor 氏により 2 次元 DGFF に対してその予想は解決されている．他の例としては Aïdékon 氏により共形不変なループ模型に関するある種の極大値統計の収束が示され [7]，極限に出てくるものが Liouville 量子重力測度だろうと予想されていたようだが，最近 Aru-Powell-Sepúlveda 氏らにより肯定的に解決された [16]．筆者の勉強不足のた

---

[85] もっと一般の出生分布を考える場合もある．

[86] 上記の記号を使うと最大値とは $\max_{1 \le i \le n(t)} x_i(t)$．ただし，$n(t)$ は時刻 t における粒子の個数．

[87] 筆者の知識が乏しいだけで対数相関をもつランダム場はもっとたくさんある．

め他の例があるかどうかは把握していないが Liouville 量子重力測度との関連が厳密に示されているモデルは数少ないはずであり, 研究課題はまだまだたくさんあるはずである.

(Update) 対数相関をもつランダム場の中でも研究が進められているモデルをいくつか紹介します.

(Update) <u>4 **次元 Gauss 膜モデル**</u>：
Gauss 膜モデルの定義については坂川氏のご講演ノートをご覧ください. 坂川氏のご講演ノートでも紹介されているが, 4 次元 Gauss 膜モデルの最大値の第 1 次オーダー (DGFF の定理 1.8 に相当) は Kurt 氏によって得られた [73]. Thick points の個数評価 (DGFF の定理 1.9 に相当) は Cipriani 氏によって得られた [45].

(Update) <u>2 **次元 Ginzburg-Landau 勾配場**</u>：
$D_N := [-N,N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ とおく. ポテンシャル関数 $V \in C^2(\mathbb{R})$ はつぎを満たすとする：ある正定数 c_-, c_+ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$V(x) = V(-x), \quad 0 < c_- \le V''(x) \le c_+ < \infty.$$

D_N 上のゼロ境界条件をもつ Ginzburg-Landau 勾配場 $(\phi_v^{D_N,0})_{v\in D_N}$ とはつぎの分布をもつ $\mathbb{R}^{D_N}$-値確率変数である：

$$d\mu_N := \frac{1}{Z_N}\exp\left\{-\sum_{v\in D_N}\sum_{i=1}^{2} V(\nabla_i\phi(v))\right\}\prod_{v\in D_N\setminus\partial D_N} d\phi(v)\prod_{v\in\partial D_N}\delta_0(\phi(v)).$$

ただし, Z_N は規格化定数, $\nabla_i\phi(v) := \phi(v+e_i) - \phi(v)$, $e_1 := (1,0)$, $e_2 := (0,1)$.

Belius-Wu 氏らが Ginzburg-Landau 勾配場の最大値の第 1 次オーダーおよび thick points の数を評価した. これらの評価は 2 次元 DGFF の定理 1.8, 1.9 の拡張にあたる：

定理 5.1 *(第 1 次オーダー, thick points [23])*
(1) ある正定数 $g = g(c_+, c_-)$ が存在して,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\max_{v\in D_N}\phi_v^{D_N,0}}{\log N} = 2\sqrt{g} \quad (\text{確率収束}).$$

(2) g は *(1)* と同じものとする. このとき,

$$\frac{\log|\{v\in D_N : \phi_v^{D_N,0} \ge \lambda\cdot 2\sqrt{g}\log N\}|}{\log N} = 2(1-\lambda^2) \quad (\text{確率収束}).$$

最近, Wu-Zeitouni 氏らは最大値のある部分列が緊密であることを示した.：

定理 5.2 *(最大値の部分列の緊密性 [94])*
$N_k \uparrow \infty$ なるある $(N_k)_{k\ge1}$ が存在して, つぎが成り立つ：

$$\left(\max_{v\in D_{N_k}}\phi_v^{D_{N_k},0} - \mathbb{E}\left[\max_{v\in D_{N_k}}\phi_v^{D_{N_k},0}\right]\right)_{k\ge1} \text{ は緊密.}$$

(Update) **CUE の固有多項式・臨界線上のゼータ関数**：
U_N を $N \times N$ の CUE (circular unitary ensemble) とする．つまり, U_N はユニタリ群 $U(N)$ 上の Haar 確率測度に従うランダム行列とする．U_N の固有多項式を $X_N(\theta)$ とおく：

$$X_N(\theta) := \det(I - e^{-i\theta} U_N), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

ただし, I は単位行列. Keating-Snaith 氏らおよび Hughes-Keating-O'Connell 氏らにより, $X_N(\theta)$ の対数は対数相関をもつガウス場に収束することが示された [71, 66]．このことから $\log |X_N(\theta)|$ の最大値に対して 2 次元 DGFF の最大値の収束 (定理 2.1) と同様な結果が成り立つのではと予想される．実際, Fyodorov-Hiary-Keating 氏らおよび Fyodorov-Keating 氏らによりつぎが予想されている [63, 64]：

予想 5.3 ある独立な *Gumbel* 確率変数 K_1, K_2 が存在して, $N \to \infty$ のとき

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi)} \log |X_N(\theta)| - \left(\log N - \frac{3}{4} \log \log N \right) \overset{law}{\to} K_1 + K_2 \text{ が成り立つだろう.}$$

この方向の研究は最近進んでおり, 筆者が知る限り最新の結果は Chhaibi-Madaule-Najnudel 氏らにより得られている (それ以前に Arguin-Belius-Bourgade 氏らおよび Paquette-Zeitouni 氏らの結果もある [11, 85])：

定理 5.4 *(*緊密性 *[44])*

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi)} \log |X_N(\theta)| - \left(\log N - \frac{3}{4} \log \log N \right), \ N \geq 1 \text{ は緊密.}$$

重要な注意として, Chhaibi-Madaule-Najnudel 氏らは [44] において CUE だけでなく CβE (circular β ensemble) に対して緊密性を示している．また, 予想 5.3 の解決に向けて Remy 氏の論文 [87, Section 1.1.2] も参考になるだろう．

関連する結果として $X_N(\theta)$ の対数から定まる単位円周上の測度があるガウス乗法カオスに収束することが Webb 氏および Nikula-Saksman-Webb 氏らにより示された：

定理 5.5 *(*ガウス乗法カオスへの収束 *[93]* $(-\frac{1}{2} < \gamma < \sqrt{2})$*, [82]* $(\sqrt{2} \leq \gamma < 2)$*)*
任意の $\gamma \in (-\frac{1}{2}, 2)$ に対して, $N \to \infty$ のとき

$$\frac{e^{\gamma \log |X_N(\theta)|}}{\mathbb{E}\left[e^{\gamma \log |X_N(\theta)|}\right]} \frac{d\theta}{2\pi} \overset{law}{\to} \mu_\gamma(d\theta).$$

ただし, 単位円周上のランダム測度 $\mu_\gamma(d\theta)$ は形式的につぎのように与えられる：$(X(\theta))_{\theta \in [0,2\pi)}$ を期待値 0, 共分散 $\mathbb{E}[X(\theta)X(\theta')] = -\frac{1}{2} \log |e^{i\theta} - e^{i\theta'}|$ をもつガウス場とするとき,

$$\text{“}\mu_\gamma(d\theta) = e^{\gamma X(\theta) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[X(\theta)^2]} \frac{d\theta}{2\pi}\text{”}.$$

Berestycki-Webb-Wong 氏らにより定理 5.5 に類似の結果が広いクラスのランダムエルミート行列に対して成り立つことが示されている ([26] ただし $\gamma < \sqrt{2}$ の場合のみ). 他のランダム行列でも同様なことがいえるかどうかは筆者が知る限り未解決問題である.

Keating-Snaith 氏らにより CUE と ζ 関数が密接に関係していることが指摘されている [71]. Fyodorov-Hiary-Keating 氏らはつぎを予想している：

予想 5.6 *([63])* U は $[0,1]$ 上の一様分布にしたがう確率変数とする. このとき

$$\left(\sup_{h\in[0,1]} \log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i(UT+h)\right)\right| - \log\log T + \frac{3}{4}\log\log\log T\right)_{T\geq 3} \quad \text{は緊密だろう.}$$

この方向の研究も進んでおり, Najnudel 氏および Arguin-Belius-Bourgade-Raziwiłł-Soundararajan 氏らにより第 1 次オーダーの評価が得られている：

定理 5.7 *(第 1 次オーダー [81, 12])*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\log\log T} \sup_{h\in[0,1]} \log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i(UT+h)\right)\right| = 1 \quad (\text{確率収束}).$$

ランダムオイラー積から定まる $[0,1]$ 上のランダム測度があるガウス乗法カオスに収束することも Saksman-Webb 氏らにより示されている [90, Theorems 1.8, 1.9].

(Update) 文献案内

1. 第 2 章に関する文献. Zeitouni 氏の講義録 [95] をおすすめします. タイトル通り BRW と DGFF の関連がわかりやすく書かれています. アイディアをつかむのに最適です.

2. 第 3 章に関する文献. Biskup 氏の講義録 [27] および Louidor 氏の講義録 [77] をおすすめします. [27] では DGFF だけでなくガウス場の一般論, 連続 GFF, ガウス乗法カオスのことも書かれています. 最後の章には多くの open problem が挙げられています.

3. 第 4 章に関する文献. 被覆時間と DGFF の関係については [55, 96], 局所時間と対応するガウス過程の関係については [80, 92], 被覆時間と BBM の関係については [20] の第 1 章がおすすめです.

4. 第 5 章に関する文献. BBM に関しては Bovier 氏の講義録 [34], BRW に関しては Shi 氏の講義録 [91] がおすすめです. 対数相関をもつランダム場については Kistler 氏の講義録 [72], Arguin 氏の講義録 [10] がおすすめです.

5. その他. Liouville 量子重力測度 (LQG) の背景については Garban 氏の解説 [65] がおすすめです. LQG の構成等については Berestycki 氏の講義録 [24] および論文 [25] がおすすめです. LQG に関連する Liouville Brown 運動については梶野氏の解説 [70] をご覧ください. LQG に関連する話題の研究の進展のスピードは非常に速く, どんな研究があるのかを把握することすら難しい状況です. おそらく

最もよい方法は講演を聴くことです．最近では講演のビデオを公開する場合が多く, 例えば 2018 年 7 月に Newton 研究所で開かれた研究集会”RGM follow up”の全講演をつぎの web ページで視聴できます：

`https://www.newton.ac.uk/event/rgmw06/timetable`

関連する過去の研究集会の講演もつぎの web ページで視聴できます：

`https://www.newton.ac.uk/event/rgm/seminars`

謝辞
確率論サマースクール 2018 において離散ガウス自由場に関する講演をする貴重な機会をいただき, 主催してくださった先生方に御礼申し上げます.

References

[1] Y. Abe. Maximum and minimum of local times for two-dimensional random walk. *Electron. Commun. Probab.* **20** (2015), paper no. 22.

[2] Y. Abe. Extremes of local times for simple random walks on symmetric trees. *Electron. J. Probab.* **23** (2018), paper no. 40.

[3] Y. Abe. Second order term of cover time for planar simple random walk. arXiv:1709.08151

[4] L. Addario-Berry and B. Reed. Ballot theorems for random walks with finite variance. arXiv:0802.2491

[5] L. Addario-Berry and B. Reed. Minima in branching random walks. *Ann. Probab.* **37** (2009), 1044-1079.

[6] E. Aïdékon. Convergence in law of the minimum of a branching random walk. *Ann. Probab.* **41** (2013), 1362-1426.

[7] E. Aïdékon. The extremal process in nested conformal loops. Available at `https://www.lpsm.paris//dw/doku.php?id=users:%5baidekon%5d:index`

[8] E. Aïdékon, J. Berestycki, É. Brunet and Z. Shi. Branching Brownian motion seen from its tip. *Probab. Theory Relat. Fields.* **157** (2013), 405-451.

[9] D. J. Aldous. Random walk covering of some special trees. *J. Math. Anal. Appl.* **157** (1991), 271-283.

[10] L.-P. Arguin. Extrema of log-correlated random variables: Principles and Examples. arXiv:1601.00582

[11] L.-P. Arguin, D. Belius, and P. Bourgade. Maximum of the characteristic polynomial of random unitary matrices. *Comm. Math. Phys.* **349** (2017), 703-751.

[12] L.-P. Arguin, D. Belius, P. Bourgade, M. Raziwiłł, and K. Soundararajan. Maximum of the Riemann zeta function on a short interval of the critical line. *Comm. Pure. Appl. Math.* to appear

[13] L.-P. Arguin, A. Bovier, and N. Kistler. Genealogy of extremal particles of branching Brownian motion. *Commun. Pure Appl. Math.* **64** (2011), 1647-1676.

[14] L.-P. Arguin, A. Bovier, and N. Kistler. Poissonian statistics in the extremal process of branching Brownian motion. *Ann. Appl. Probab.* **22** (2012), 1693-1711.

[15] L.-P. Arguin, A. Bovier, and N. Kistler. The extremal process of branching Brownian motion. *Probab. Theory Relat. Fields.* **157** (2013), 535-574.

[16] J. Aru, E. Powell, and A. Sepúlveda. Liouville measure as a multiplicative cascade via level sets of the Gaussian free field. arXiv:1701.05872

[17] J. Aru, E. Powell, and A. Sepúlveda. Critical Liouville measure as a limit of subcritical measures. arXiv:1802.08433

[18] J. Barral, R. Rhodes, and V. Vargas. Limiting laws of supercritical branching random walks. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.* **350** (2012), 535-538.

[19] J. Barral, A. Kupiainen, M. Nikula, E. Saksman, and C. Webb. Critical Mandelbrot cascades. *Commun. Math. Phys.* **325** (2014), 685-711.

[20] D. Belius and N. Kistler. The subleading order of two dimensional cover times. *Probab. Theory Relat. Fields.* **167** 461-552 (2017).

[21] D. Belius, J. Rosen, and O. Zeitouni. Barrier estimates for a critical Galton-Watson process and the cover time of the binary tree. arXiv:1702.03189

[22] D. Belius, J. Rosen, and O. Zeitouni. Tightness for the cover time of compact two dimensional manifolds. arXiv:1711.02845

[23] D. Belius and W. Wu. Maximum of the Ginzburg-Landau fileds. arXiv:1610.04195

[24] N. Berestycki. Introduction to the Gaussian Free Field and Liouville Quantum Gravity. Available at `http://www.statslab.cam.ac.uk/~beresty/Articles/oxford4.pdf`

[25] N. Berestycki. An elementary approach to Gaussian multiplicative chaos. *Electron. Commun. Probab.* **22** (2017) no.27

[26] N. Berestycki, C. Webb, M.-D. Wong. Random Hermitian matrices and Gaussian multiplicative chaos. *Probab. Theory Relat. Fields.* (2017) `https://doi.org/10.1007/s00440-017-0806-9`

[27] M. Biskup. Extrema of the two-dimensional Discrete Gaussian Free Field. arXiv:1712.09972

[28] M. Biskup and O. Louidor. Extreme local extrema of two-dimensional discrete Gaussian free field. *Commun. Math. Phys.* **345** (2016), 271-304.

[29] M. Biskup and O. Louidor. Conformal symmetries in the extremal process of two-dimensional discrete Gaussian Free Field. arXiv:1410.4676

[30] M. Biskup and O. Louidor. Full extremal process, cluster law and freezing for two-dimensional discrete Gaussian free field. *Advances in Mathematics.* **330** (2018), 589-687.

[31] M. Biskup and O. Louidor. On intermediate level sets of two-dimensional discrete Gaussian free field. arXiv:1612.01424

[32] E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, and G. Giacomin. Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic crystal. *Ann. Probab.* **29** (2001), 1670-1692.

[33] E. Bolthausen, J.-D. Deuschel, and O. Zeitouni. Recursions and tightness for the maximum of the discrete, two dimensional Gaussian free field. *Electron. Commun. Probab.* **16** (2011), 114-119.

[34] A. Bovier. *From spin glasses to branching Brownian motion – and back?* In: *Random Walks, Random Fields, and Disordered Systems*, M. Biskup, J. Černý, R. Kotecký, Eds., Lecture Notes in Mathematics **2144**, Springer, 2015.

[35] A. Bovier and L. Hartung. Extended convergence of the extremal process of branching Brownian motion. *Ann. Appl. Probab.* **27** (2017), 1756-1777.

[36] M. Bramson. Maximal displacement of branching Brownian motion. *Commun. Pure. Appl. Math.* **31** (1978)

[37] M. Bramson. Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves. *Mem. Amer. Math. Soc.* **44** (1983)

[38] M. Bramson, J. Ding, and O. Zeitouni. Convergence in law of the maximum of the two-dimensional discrete Gaussian free field. *Commun. Pure Appl. Math.* **69** (2016), 62-123.

[39] M. Bramson, J. Ding, and O. Zeitouni. Convergence in law of the maximum of nonlattice branching random walk. *Ann. Inst. Henri. Poincaré Probab. Stat.* **52**, (2016), 1897-1924.

[40] M. Bramson and O. Zeitouni. Tightness for a family of recursion equations. *Ann. Probab.* **37** (2009) 615-653.

[41] M. Bramson and O. Zeitouni. Tightness of the recentered maximum of the two-dimensional discrete Gaussian free field. *Commun. Pure Appl. Math.* **65** (2012), 1-20.

[42] M.J.A.M. Brummelhuis and H.J. Hilhorst. Covering of a finite lattice by a random walk. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* **176** (1991), 387-408.

[43] D. Buraczewski, P. Dyszewski, and K. Kolesko. Local fluctuations of critical Mandelbrot cascades. arXiv:1604.03328.

[44] R. Chhaibi, T. Madaule, and J. Najnudel. On the maximum of the CβE field. *Duke Math. J.* **167** (2018), 2243-2345.

[45] A. Cipriani. High points for the membrane model in the critical dimension. *Electron. J. Probab.* **18** (2013) paper no. 86.

[46] F. Comets, S. Popov, and M. Vachkovskaia. Two-dimensional random interlacements and late points for random walks. *Commun. Math. Phys.* **343** 129-164 (2016).

[47] F. Comets and S. Popov. The vacant set of two-dimensional critical random interlacement is infinite. *Ann. Probab.* **45** 4752-4785 (2017).

[48] O. Daviaud. Extremes of the discrete two-dimensional Gaussian free field. *Ann. Probab.* **34** (2006) 962-986.

[49] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, and O. Zeitouni. Thick points for planar Brownian motion and Erdős-Taylor conjecture on random walk. *Acta Math.* **186** (2001), 239-270.

[50] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, and O. Zeitouni. Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. *Ann. Math.* **160** 433-464 (2004).

[51] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, and O. Zeitouni. Late points for random walks in two dimensions. *Ann. Probab.* **34** 219-263 (2006).

[52] J. Deny. Sur l' équation de convolution $\mu = \mu{\star}\sigma$. *Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel.* **4** (1960), 1-11.

[53] J. Ding. On cover times for 2D lattices. *Electron. J. Probab.* **17** no. 45 (2012).

[54] J. Ding. Asymptotics of cover times via Gaussian free fields: Bounded-degree graphs and general trees. *Ann. Probab.* **42** (2014), 464-496.

[55] J. Ding, J. R. Lee, and Y. Peres. Cover times, blanket times, and majorizing measures. *Ann. of Math.* **175** (2012), 1409-1471.

[56] J. Ding and O. Zeitouni. A sharp estimate for cover times on binary trees. *Stochastic Processes and their Applications.* **122** (2012), 2117-2133.

[57] J. Ding and O. Zeitouni. Extreme values for two-dimensional discrete Gaussian free field. *Ann. Probab.* **42** (2014) 1480-1515.

[58] J. Ding, R. Roy, and O. Zeitouni. Convergence of the centered maximum of log-correlated Gaussian free fields. *Ann. Probab.* **45** (2017) 3886-3928.

[59] B. Duplantier, R. Rhodes, S. Sheffield, and V. Vargas. Renormalization of critical Gaussian multiplicative chaos and KPZ relation. *Comm. Math. Phys.* **330** (2014), 283-330.

[60] B. Duplantier and S. Sheffield. Liouville quantum gravity and KPZ. *Invent. Math.* **185** (2011), 333-393.

[61] E. B. Dynkin. Markov processes as a tool in field theory. *J. Funct. Anal.,* **50** (1983), 167-187.

[62] N. Eisenbaum, H. Kaspi, M. B. Marcus, J. Rosen, and Z. Shi. A Ray-Knight theorem for symmetric Markov processes. *Ann. Probab.* **28** (2000), 1781-1796.

[63] Y.-V. Fyodorov, G.-A. Hiary, and J.-P. Keating. Freezing transition, characteristic polynomials of random matrices, and the Riemann zeta function. *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012), no. 17, art.

[64] Y.-V. Fyodorov and J.-P. Keating. Freezing transitions and extreme values: random matrix theory and disordered landscapes. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **372** (2014), no. 20120503.

[65] C. Garban. Quantum gravity and the KPZ formula. arXiv:1206.0212

[66] C.-P. Hughes, J.-P. Keating, and N. O'Connell. On the characteristic polynomial of a random unitary matrix. *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), 429-451.

[67] A. Jego. Thick Points of Random Walk and the Gaussian Free Field. 2018 年 7 月 9 日-20 日まで Isaac Newton Institute で開かれた研究集会"RGM follow up"における講演ビデオ (2018 年 7 月 18 日). `https://www.newton.ac.uk/seminar/20180718093509551` にて視聴可能.

[68] J. Junnila and E. Saksman. Uniqueness of critical Gaussian chaos. *Electron. J. Probab.* **22** (2017) no.11

[69] J.-P. Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec.* **9** (1985) 105-150.

[70] N. Kajino. Continuity and estimates of the transition density of the Liouville Brownian motion (Symposium on Probability Theory). 数理解析研究所講究録 (2015), 1952: 38-45

[71] J.-P. Keating and N. C. Snaith. Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$. *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 57-89.

[72] N. Kistler. Derrida's random energy models from spin glasses to the extremes of correlated random fields, in *Correlated Random Systems: Five Different Methods,* V. Gayrard, N. Kistler, editors. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2143 (Springer, Berlin, 2015), pp. 71-120.

[73] N. Kurt. Maximum and entropic repulsion for a Gaussian membrane model in the critical dimension. *Ann. Probab.* **37** (2009), 687-725.

[74] S.P. Lalley and T. Sellke. A conditional limit theorem for the frontier of a branching Brownian motion. *Ann. Probab.* **15** (1987), 1052-1061.

[75] K.-S. Lau and C. R. Rao. Solution to the integrated Cauchy functional equation on the whole line. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics.* **A 46** (1984) 311-318.

[76] T. M. Liggett. Random invariant measures for Markov chains, and independent particle systems. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* **45** (1978) 297-313.

[77] O. Louidor. Large and Extreme Values of the Discrete Gaussian Free Field. Available at `https://ie.technion.ac.il/~olouidor/KAIST/KAIST_Notes.pdf`

[78] T. Lupu. From loop clusters and random interlacements to the free field. *Ann. Probab.* **44** (2016), 2117-2146.

[79] T. Madaule. Convergence in law for the branching random walk seen from its tip. *J. Theor. Probab.* **30** (2017), 27-63.

[80] M. B. Marcus and J. Rosen. *Markov processes, Gaussian processes, and local times.* Vol. 100. Cambridge University Press, 2006.

[81] J. Najnudel. On the extreme values of the Riemann zeta function on random intervals of the critical line. *Probab. Theory Relat. Fields.*, published electronically 4 November 2017. DOI 10.1007/s00440-017-0812-y

[82] M. Nikula, E. Saksman, and C. Webb. Multiplicative chaos and the characteristic polynomial of the CUE: the L^1-phase. arXiv:1806.01831

[83] I. Okada. Exponents for the number of pairs of nearly favorite points of simple random walk in $\mathbb{Z}^2$. arXiv:1602.05641

[84] I. Okada. Geometric structures of late points of a two-dimensional simple random walk. arXiv:1605.01158

[85] E. Paquette and O. Zeitouni. The maximum of the CUE field. *Int. Math. Res. Not. IMRN.*, published electronically 8 March 2017. DOI 10.1093/imrn/rnx033

[86] E. Powell. Critical Gaussian chaos: convergence and uniqueness in the derivative normalisation. *Electron. J. Probab.* **23** (2018) no.31.

[87] G. Remy. The Fyodorov-Bouchaud formula and Liouville conformal field theory. arXiv:1710.06897

[88] R. Robert and V. Vargas. Gaussian multiplicative chaos revisited. *Ann. Probab.* **38** (2010), 605-631.

[89] P.-F. Rodriguez. On pinned fields, interlacements, and random walk on $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. *Probab. Theory Rel. Fields.* to appear

[90] E. Saksman and C. Webb. The Riemann zeta function and Gaussian multiplicative chaos: statistics on the critical line. arXiv:1609.00027

[91] Z. Shi. *Branching Random Walks.* École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLII 2012. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2151. Springer, Cham, 2016.

[92] A.-S. Sznitman. *Topics in occupation times and Gaussian free fields.* Vol. 16. European Mathematical Society, 2012.

[93] C. Webb. The characteristic polynomial of a random unitary matrix and Gaussian multiplicative chaos–the L^2-phase. *Electron. J. Probab.* **20** (2015) no.104.

[94] W. Wu and O. Zeitouni. Subsequential tightness of the maximum of two dimensional Ginzburg-Landau fields. arXiv:1802.0960

[95] O. Zeitouni. Branching random walks and Gaussian free fields. Available at `http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~zeitouni/pdf/notesBRW.pdf`

[96] A. Zhai. Exponential concentration of cover times. *Electron. J. Probab.* **23** no. 32 (2018)