エルゴード的な初期値をもつKdV方程式

小谷　眞一

確率論サマースクール2018

2018年8月

KdV方程式の解

1834年に英国のRusselは運河で，山の形をした波が形を崩さず遠くまで伝播していくことを観察した．その後1895年に，Korteweg-de Vries（2人）はこの波の方程式（KdV方程式)を導出した.(1877年にBoussinesqも導出)

$$\text{KdV方程式：}\quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

その進行波解$u(x,t) = f(x-ct)$はODE:

$$-cf' = -f''' + 6ff'$$

の解で与えられ，その有界な解は次の２種類になる．

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{e^{\sqrt{c}/2(x-a)} + e^{-\sqrt{c}/2(x-a)}} \equiv s(x-a;c) & \text{（孤立波解）} \\ -u_0 - 2\kappa^2 k^2 \mathrm{cn}^2\left(\kappa(x-a); k^2\right) \quad \left(c = 6u_0 + 4\left(k^2-1\right)\kappa^2\right) & \text{（周期解）} \\ \quad 0 < k^2 < 1 \text{ で } k^2 \to 1 \text{ とすると周期解は孤立波に収束する} & \end{cases}$$

1965年の計算機実験

Zabusky, Kruskal は1965年に計算機実験により，初期値が急減少しているとき，KdV方程式の解は有限個の山（または谷）がそれぞれの速度で移動していき，２つの山が衝突すると，そののち２つの山は衝突前の形に戻り，あたかも衝突がなかったように進行していくことを発見した．そしてこの波を

“soliton” ＝ solitary wave

と名付けた．この計算機実験が口火となり，一気にKdV方程式の理論的研究が活性化した．

1967年のBreakthrough

- Gardner, Greene, Kruskal, Miura(GGKM)は1967年にKdV方程式とSchrödinger作用素の固有値との関係を発見:

$$L_u = -\partial_x^2 + u \quad (u\text{ を potential にもつ Schrödinger op.})$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_0(x)\ :\text{初期値}, & u_t(x)\ :\text{KdV 方程式の解} \\ \Longrightarrow\quad \mathrm{sp} L_{u_0} = \mathrm{sp} L_{u_t} & (\text{無限個の保存量}) \end{array}}$$

1967年のBreakthrough

- Gardner, Greene, Kruskal, Miura(GGKM)は1967年にKdV方程式とSchrödinger作用素の固有値との関係を発見:

$$L_u = -\partial_x^2 + u \quad (u\text{をpotentialにもつSchrödinger op.})$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_0(x)\ :\text{初期値}, & u_t(x)\ :\text{KdV方程式の解} \\ \Longrightarrow \quad \mathrm{sp} L_{u_0} = \mathrm{sp} L_{u_t} & (\text{無限個の保存量}) \end{array}}$$

- 孤立波解の拡張として，m_j，$\eta_j > 0$に対して

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \log\det\left(I + \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}}{\eta_i + \eta_j} e^{4(\eta_i^3+\eta_j^3)t-(\eta_i+\eta_j)x} \right)_{1\le i,j\le n} \right)$$

が解になることを示した．($-\eta_j^2$がSchrödinger作用素の固有値) $\Longrightarrow$ $n-$**solitons**

計算機実験の理論的実証

$n-$soliton 解は初期値が

$$u_0(x) = -2\partial_x^2 \log\det\left(I + \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}}{\eta_i + \eta_j} e^{-(\eta_i+\eta_j)x} \right)_{1\le i,j\le n} \right)$$

であるときの特殊な解であったが，1975 年に田中俊一は，急減少する一般の初期値から解いた KdV 方程式の解 $u(x,t)$ は，
$s(x;c) \equiv -2\mathrm{sech}\sqrt{c}x/2$ とおくと，$t \to \pm\infty$ で

$$\sup_{\pm x > \pm\epsilon t} \left| u(x,t) - \sum_{j=1}^{n} s\left(x - 4\eta_j^2 t - \delta_j^{\pm}; 4\eta_j^2 \right) \right| \to 0 \qquad (1)$$

を満たすことを示した．これは 1965 年の Zabusky, Kruskal の計算機実験を理論的に実証するものである．ここで，$\left\{ -\eta_j^2, j = 1, 2, \cdots, n \right\}$ は，初期値 $u_0(x)$ をポテンシャルにもつ Schrödinger 作用素の負の固有値である．
(1) は時間に比例する空間領域での漸近的性質であるが，他の時空領域では全く異なる漸近的性質が示されている．

周期的ないしは減少する初期値に関する今までの結果

1. J. Colliander - M. Keel - G. Staffilani - H. Takaoka - T. Tao（2003）KdV**方程式は**$H^s(\mathbb{R})$ **（**$s > -\frac{3}{4}$**）** **および** $H^s(\mathbb{T})$ **（**$s \geq -\frac{1}{2}$**）で一意的に可解である．**

周期的ないしは減少する初期値に関する今までの結果

1. J. Colliander - M. Keel - G. Staffilani - H. Takaoka - T. Tao（2003）KdV**方程式は** $H^s(\mathbb{R})$ （$s > -\frac{3}{4}$） **および** $H^s(\mathbb{T})$ （$s \geq -\frac{1}{2}$） **で一意的に可解である.**
2. T. Kappeler - P. Topalov（2006） KdV**方程式は** $H^s(\mathbb{T})$ （$s \geq -1$） **で一意的に可解である.**

周期的ないしは減少する初期値に関する今までの結果

1. J. Colliander - M. Keel - G. Staffilani - H. Takaoka - T. Tao（2003） KdV **方程式は** $H^s(\mathbb{R})$ （$s > -\frac{3}{4}$） **および** $H^s(\mathbb{T})$ （$s \geq -\frac{1}{2}$） **で一意的に可解である．**
2. T. Kappeler - P. Topalov（2006） KdV **方程式は** $H^s(\mathbb{T})$ （$s \geq -1$） **で一意的に可解である．**
3. N. Kishimoto (2009) KdV **方程式は** $H^s(\mathbb{R})$ （$s \geq -\frac{3}{4}$） **および** $H^s(\mathbb{T})$ （$s \geq -\frac{3}{4}$） **で一意的に可解である．**

Soliton gas 1

- 1971年に物理学者のZakharovはsolitonがdenseになっていったとき，(1)を利用し，solitonが非常に希薄な場合にsolitonの密度の時間発展の方程式を導出した．これは2006年に，G.A. El - A.M. Kamchatonovにより希薄でない場合に次のように拡張された．

Soliton gas 1

- 1971年に物理学者のZakharovはsolitonがdenseになっていったとき，(1)を利用し，solitonが非常に希薄な場合にsolitonの密度の時間発展の方程式を導出した．これは2006年に，G.A. El - A.M. Kamchatonovにより希薄でない場合に次のように拡張された．
- $f(x,t;\lambda)$を，時刻tでの，空間$(x, x+dx)$，スペクトル$(\lambda, \lambda+d\lambda)$の範囲にあるsolitonの密度とすると

$$f_t + (sf)_x = 0 \tag{2}$$

ここでsはsolitonの速度で，密度がfのとき積分方程式

$$s(\lambda) = 4\lambda^2 + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \log\left|\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right| f(\mu)\,(s(\lambda)-s(\mu))\,d\mu \tag{3}$$

から求まる．したがってsはfのfunctionalであり，それを(2)に代入し，fを解くことになる．

Soliton gas 2

- soliton 密度の方程式(2),(3) は有限個の soliton が生じる場合の急減少初期値に対する解 $u(x, t)$ の漸近的性質(1) を用いて，物理的な考察を加えて導出されたものである．(2) は KdV 方程式が Schrödinger 作用素のスペクトルを保存することから出る，保存則の方程式である．ここで理論的に問題になるのは，このように soliton が稠密になった極限の関数を初期値にもつ KdV 方程式の解が存在しているかということである．

Soliton gas 2

- soliton 密度の方程式(2),(3) は有限個の soliton が生じる場合の急減少初期値に対する解 $u(x,t)$ の漸近的性質(1) を用いて，物理的な考察を加えて導出されたものである．(2) は KdV 方程式が Schrödinger 作用素のスペクトルを保存することから出る，保存則の方程式である．ここで理論的に問題になるのは，このように soliton が稠密になった極限の関数を初期値にもつ KdV 方程式の解が存在しているかということである．
- soliton は Schrödinger 作用素の固有値に対応しているので，Schrödinger 作用素のスペクトルが稠密な固有値からなる potential を初期値とする KdV 方程式に解があるかということが問題になる．

Zakharovの数学者への要請

“In spite of all these brilliant achievements, the theory of the KdV equation is not yet developed to a level which would satisfy a pragmatic physicist, who may ask the following question: What happens if the initial data in the KdV equation is neither decaying at infinity nor periodic? Suppose that the initial data is a bounded function

$$u(x) = u(x,0), \qquad |u(x)| < c.$$

Can we extend the IST(inverse scattering transform) to this case, which has great practical importance ? ”

非周期的，非減少な初期値

1. I.E. Egorova (1994) periodic**な関数により非常に早く近似できる**limit periodic**な**almost periodic**初期値に対して**KdV**方程式の一意可解性を証明**

非周期的，非減少な初期値

1. I.E. Egorova (1994) periodic **な関数により非常に早く近似できる** limit periodic **な** almost periodic **初期値に対して** KdV **方程式の一意可解性を証明**
2. K. Tsugawa (2012) quasi-periodic **な場合の一意可解性を時間局所的に証明**

非周期的，非減少な初期値

1. I.E. Egorova (1994) periodic **な関数により非常に早く近似できる** limit periodic **な** almost periodic **初期値に対して** KdV **方程式の一意可解性を証明**
2. K. Tsugawa (2012) quasi-periodic **な場合の一意可解性を時間局所的に証明**
3. I.Binder - D.Damanik - M.Goldstein - M.Lukic (2017) **解析的な** quasi-periodic **初期値で非常に小さい場合に一意可解性を証明．時間についての準周期性も証明**

非周期的，非減少な初期値

1. I.E. Egorova (1994) periodic **な関数により非常に早く近似できる** limit periodic **な** almost periodic **初期値に対して** KdV **方程式の一意可解性を証明**
2. K. Tsugawa (2012) quasi-periodic **な場合の一意可解性を時間局所的に証明**
3. I.Binder - D.Damanik - M.Goldstein - M.Lukic (2017) **解析的な** quasi-periodic **初期値で非常に小さい場合に一意可解性を証明．時間についての準周期性も証明**
4. E. Eichinger - T.VandenBoom - P.Yuditskii (2018) **スペクトルが絶対連続で等質性がある** almost-periodic **な初期値に対して一意可解性を証明．時間についての** almost periodicity **も証明**

非周期的，非減少な初期値

1. I.E. Egorova (1994) periodic **な関数により非常に早く近似できる** limit periodic **な** almost periodic **初期値に対して** KdV **方程式の一意可解性を証明**
2. K. Tsugawa (2012) quasi-periodic **な場合の一意可解性を時間局所的に証明**
3. I.Binder - D.Damanik - M.Goldstein - M.Lukic (2017) **解析的な** quasi-periodic **初期値で非常に小さい場合に一意可解性を証明．時間についての準周期性も証明**
4. E. Eichinger - T.VandenBoom - P.Yuditskii (2018) **スペクトルが絶対連続で等質性がある** almost-periodic **な初期値に対して一意可解性を証明．時間についての** almost periodicity **も証明**
5. A. Rybkin (2011-2017) **片側で急減少し，もう一方の片側では減少しない階段状の初期値に対して一意可解性を証明（**Hirota **の** $\tau-$ **関数を用いる）**

非周期的，非減少な初期値

1. I.E. Egorova (1994) periodic な関数により非常に早く近似できる limit periodic な almost periodic 初期値に対して KdV 方程式の一意可解性を証明
2. K. Tsugawa (2012) quasi-periodic な場合の一意可解性を時間局所的に証明
3. I.Binder - D.Damanik - M.Goldstein - M.Lukic (2017) 解析的な quasi-periodic 初期値で非常に小さい場合に一意可解性を証明．時間についての準周期性も証明
4. E. Eichinger - T.VandenBoom - P.Yuditskii (2018) スペクトルが絶対連続で等質性がある almost-periodic な初期値に対して一意可解性を証明．時間についての almost periodicity も証明
5. A. Rybkin (2011-2017) 片側で急減少し，もう一方の片側では減少しない階段状の初期値に対して一意可解性を証明（Hirota の $\tau-$ 関数を用いる）
6. 稠密な固有値をもつ場合の KdV 方程式の解の構成の問題は一部を除いて未解決

KdV方程式の解法

KdV方程式は非常に豊富な数学的構造を持っている．

1. 逆散乱理論の利用（GGKMにより発見された方法）

KdV方程式の解法

KdV方程式は非常に豊富な数学的構造を持っている．

1. 逆散乱理論の利用（GGKMにより発見された方法）
2. 完全可積分性をもつ無限次元Hamilton力学系としてのKdV方程式を追及する方法（周期的な場合に有効）

KdV方程式の解法

KdV方程式は非常に豊富な数学的構造を持っている．

1. 逆散乱理論の利用（GGKMにより発見された方法）
2. 完全可積分性をもつ無限次元Hamilton力学系としてのKdV方程式を追及する方法（周期的な場合に有効）
3. Bourgainにより開発されたFourier制限法を適用する方法（他の非線形方程式にも適用できる汎用性がある）

KdV方程式の解法

KdV方程式は非常に豊富な数学的構造を持っている．

1. 逆散乱理論の利用（GGKMにより発見された方法）
2. 完全可積分性をもつ無限次元Hamilton力学系としてのKdV方程式を追及する方法（周期的な場合に有効）
3. Bourgainにより開発されたFourier制限法を適用する方法（他の非線形方程式にも適用できる汎用性がある）
4. 佐藤幹夫およびその学派により開発された無限次元Grassmann多様体上の力学系としてKdV方程式を解く方法．これは広田の双線形微分が含有する代数的構造を突き詰めた方法

KdV方程式の解法

KdV方程式は非常に豊富な数学的構造を持っている.

1. 逆散乱理論の利用（GGKMにより発見された方法）
2. 完全可積分性をもつ無限次元Hamilton力学系としてのKdV方程式を追及する方法（周期的な場合に有効）
3. Bourgainにより開発されたFourier制限法を適用する方法（他の非線形方程式にも適用できる汎用性がある）
4. 佐藤幹夫およびその学派により開発された無限次元Grassmann多様体上の力学系としてKdV方程式を解く方法．これは広田の双線形微分が含有する代数的構造を突き詰めた方法
5. V.A. MarchenkoのBanach空間値線形方程式を縮約して非線形KdV方程式を得る方法

Weyl関数　1

実数値をとる$u(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$に対して$u$をpotentialするSchrödinger作用素L_uを

$$L_u = -\partial_x^2 + u$$

とする．$z \in \mathbb{C}$に対して

$$W_z = \left\{\varphi \in L^2\left([0,\infty)\right) ; L_u\varphi = z\varphi\right\}.$$

Lemma (境界$+\infty$のWeylによる型分類)

$\mathrm{sp}\left(L_u\right)$は$L_u$のスペクトル集合（$\mathbb{R}$の閉集合）とする．
(i) 極限点型：．　この場合は$L^2(\mathbb{R})$上の*self-adjoint*作用素として一意的に実現され，$\dim W_z = 1$ *for* $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{sp}\left(L_u\right)$．が成り立つ．
(ii) 極限円型：$\dim W_z = 2$ *for* $\forall z \in \mathbb{C}$．この場合$\mathrm{sp}\left(L_u\right)$は離散的な固有値

極限点型の十分条件として

$$\exists c > 0 \ \text{ s.t. } \quad u(x) \geq -cx^2 \quad \text{for } \forall x \geq 1.$$

Weyl関数　2

- **境界$\pm\infty$は極限点型**$\Longrightarrow \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{sp}\left(L_u\right) \quad \exists f \neq 0$　s.t.

$$-\partial_x^2 f + uf = zf, \quad f \in L^2\left(\mathbb{R}_\pm\right)$$

Weyl関数　2

- **境界**$\pm\infty$**は極限点型**$\Longrightarrow \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{sp}\,(L_u) \quad \exists f \neq 0$　s.t.

$$-\partial_x^2 f + uf = zf, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}_\pm)$$

- **この解を** $f_\pm(x, z)$ **とし**

$$m_\pm(z) = \pm \frac{f'_\pm(0, z)}{f_\pm(0, z)}$$ Weyl**関数（**Weyl-Titchmarsh**関数）**

Weyl関数　2

- **境界** $\pm\infty$ **は極限点型** $\Longrightarrow \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}\left(L_u\right) \quad \exists f \neq 0 \quad \text{s.t.}$

$$-\partial_x^2 f + uf = zf, \qquad f \in L^2\left(\mathbb{R}_\pm\right)$$

- **この解を** $f_\pm\left(x, z\right)$ **とし**

$$m_\pm\left(z\right) = \pm \frac{f_\pm'\left(0, z\right)}{f_\pm\left(0, z\right)} \quad \text{Weyl}\textbf{関数（}\text{Weyl-Titchmarsh}\textbf{関数）}$$

- $m_\pm$ **は** $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}\left(L_u\right)$ **で** analytic **で以下を満たす．**

$$m_\pm\left(z\right) = \overline{m_\pm\left(\overline{z}\right)}, \qquad \mathrm{Im}\, m_\pm\left(z\right) > 0 \quad \text{if} \ \ \mathrm{Im}\, z > 0$$

$$\frac{\mathrm{Im}\, m_\pm\left(z\right)}{\mathrm{Im}\, z} = \int_{\mathbb{R}_\pm} \left|f_\pm\left(x, z\right)\right|^2 dx > 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}\, m_\pm\left(z\right) > 0$$

Weyl関数　2

- **境界**$\pm\infty$**は極限点型**$\Longrightarrow \forall z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{sp}\left(L_u\right) \quad \exists f \neq 0 \quad \text{s.t.}$

$$-\partial_x^2 f + uf = zf, \qquad f \in L^2\left(\mathbb{R}_\pm\right)$$

- **この解を**$f_\pm\left(x,z\right)$**とし**

$$m_\pm\left(z\right) = \pm\frac{f_\pm'\left(0,z\right)}{f_\pm\left(0,z\right)} \quad \text{Weyl関数（Weyl-Titchmarsh関数）}$$

- $m_\pm$**は**$\mathbb{C}\backslash \mathrm{sp}\left(L_u\right)$**で**analytic**で以下を満たす．**

$$m_\pm\left(z\right) = \overline{m_\pm\left(\overline{z}\right)}, \qquad \mathrm{Im}\, m_\pm\left(z\right) > 0 \quad \text{if } \mathrm{Im}\, z > 0$$

$$\frac{\mathrm{Im}\, m_\pm\left(z\right)}{\mathrm{Im}\, z} = \int_{\mathbb{R}_\pm}\left|f_\pm\left(x,z\right)\right|^2 dx > 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}\, m_\pm\left(z\right) > 0$$

- u**は**$m_\pm$**から一意的に決まる（**Borg-Marchenko**）．**$u=0$**なら** $f_\pm\left(x,z\right) = e^{\mp\sqrt{-z}x}$**より，**$m_\pm\left(z\right) = -\sqrt{-z}$**．**

反射係数の定義と無反射性

- A. Rybkin **は一般の** potential **に対して反射係数を定義：**

$$R(z) = \frac{\overline{m_+(z)} + m_-(z)}{m_+(z) + m_-(z)}, \ (\ |\textbf{古典的な反射係数}| = || \ ).$$

反射係数の定義と無反射性

- A. Rybkin は一般の potential に対して反射係数を定義：

$$R(z) = \frac{\overline{m_+(z)} + m_-(z)}{m_+(z) + m_-(z)}, \left(|\text{古典的な反射係数}| = || \right).$$

- 減少する potential u が無反射とは $R(\sqrt{k}) = 0$ となることであった．一般の potential u に対しても，ある Borel 集合 $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ で無反射 (reflectionless) ということを

$$R(\lambda + i0) = 0 \quad \text{for a.e. } \lambda \in F$$

で定義する．これは以下と同値．

$$\text{分子} = \overline{m_+(\lambda + i0)} + m_-(\lambda + i0) = 0 \quad \text{for a.e. } \lambda \in F$$

反射係数の定義と無反射性

- A. Rybkin **は一般の** potential **に対して反射係数を定義：**

$$R(z) = \frac{\overline{m_+(z)} + m_-(z)}{m_+(z) + m_-(z)}, \ (\ |\text{古典的な反射係数}| = || \ ).$$

- **減少する** potential u **が無反射とは** $R(\sqrt{k}) = 0$ **となることであった．一般の** potential u **に対しても，ある** Borel **集合** $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ **で** **無反射** (reflectionless) **ということを**

$$R(\lambda + i0) = 0 \quad \text{for a.e. } \lambda \in F$$

で定義する．これは以下と同値．

$$\text{分子} = \overline{m_+(\lambda + i0)} + m_-(\lambda + i0) = 0 \quad \text{for a.e. } \lambda \in F$$

- $F = I$ **なら**

$$\mathrm{Im}\,(m_+(\lambda + i0) + m_-(\lambda + i0)) = 0 \quad \text{for a.e. } \lambda \in I$$

なので， Schwarz **の** reflection principle **により** $m_+(z) + m_-(z)$ **は** I **を通じて** $\mathbb{C}_-$ **に解析接続可能．** $\Longrightarrow$ $m_\pm(z)$ **も解析接続可能**

Sato-Segal-Wilson 理論 1

$r > 0$ に対して $H = L^2(|z| = r)$，直交分解 $H = H_+ \oplus H_-$，ただし

$$H_+ = \langle z^n; \quad n \geq 0 \rangle, \qquad H_- = \langle z^n; \quad n \leq -1 \rangle.$$

$\mathfrak{p}_\pm$ を $H_\pm$ への直交射影．H の閉部分空間 W が以下の条件を満たすとする．
(i) $f \in W \Longrightarrow z^2 f \in W$
(ii) $\mathfrak{p}_+ : W \to H_+$ は１対１かつ全射
このような W 全体を $Gr^{(2)}$ とする．ここで一般に

$$f_e(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2}, \quad f_o(z) = \frac{f(\sqrt{z}) - f(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}}$$

Example

$m(z)$ を $\{|z| = r\}$ で連続で以下の条件を満たすとする．

$$m(z) - z \in H_- \ \ \& \ \ m_o(z) \neq 0 \ \ \text{for} \ \ \forall z \in \{|z| \geq r^2\}$$

このとき $W_m \equiv \{\varphi(z^2) + m(z)\psi(z^2); \ \varphi, \psi \in H_+\} \in Gr^{(2)}$

Sato-Segal-Wilson理論 2 （Groupの作用）

- Group $\quad \Gamma = \left\{ g = e^h ;\ \ h \text{は} \{|z| \le r\} \text{の近傍で analytic} \right\}.$

Sato-Segal-Wilson理論 2 （Groupの作用）

- Group $\quad \Gamma = \left\{ g = e^h; \ \ h\text{は}\{|z| \leq r\}\text{の近傍で}\,\mathrm{analytic} \right\}.$
- $g \in \Gamma$に対して次を仮定 $\quad gW \in Gr^{(2)}$

Sato-Segal-Wilson理論 2 （Groupの作用）

- Group $\Gamma = \{g = e^h;\ h$ は $\{|z| \leq r\}$ の近傍で analytic$\}$.
- $g \in \Gamma$ に対して次を仮定 $gW \in Gr^{(2)}$
- このとき gW に対する性質 (ii) より

$$\mathfrak{p}_+ : gW \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+.$$

Sato-Segal-Wilson理論 2 （Groupの作用）

- Group $\Gamma = \{g = e^h;\ h$ は $\{|z| \le r\}$ の近傍で analytic$\}$.
- $g \in \Gamma$ に対して次を仮定 $gW \in Gr^{(2)}$
- このとき gW に対する性質(ii)より

$$\mathfrak{p}_+ : gW \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+ .$$

- $W \ni \exists f(z;g)$ s.t. $gf(z;g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exists c_k(g) z^{-k} \in H_+ \oplus H_-$.

Sato-Segal-Wilson 理論 2 （Group の作用）

- Group $\quad \Gamma = \left\{ g = e^h;\ \ h \text{は} \{|z| \le r\} \text{の近傍で analytic} \right\}$.
- $g \in \Gamma$ に対して次を仮定 $\quad gW \in Gr^{(2)}$
- このとき gW に対する性質 (ii) より

$$\mathfrak{p}_+ : gW \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+ .$$

- $W \ni \exists f\,(z;g)$ s.t. $gf\,(z;g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exists c_k(g) z^{-k} \in H_+ \oplus H_-$.
- $g = e^{xz+tz} \Longrightarrow u(x+t) \equiv -2\partial_x c_1(x+t)$

$$\boxed{-f''(x,z) + u(x)f(x,z) = -z^2 f(x,z) \quad \text{（Schrödinger 方程式）}}$$

Sato-Segal-Wilson 理論 2 （Group の作用）

- Group $\quad \Gamma = \{g = e^h;\ \ h$ は $\{|z| \le r\}$ の近傍で analytic$\}$.
- $g \in \Gamma$ に対して次を仮定 $\quad gW \in Gr^{(2)}$
- このとき gW に対する性質 (ii) より

$$\mathfrak{p}_+ : gW \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+ .$$

- $W \ni \exists f(z;g)$ s.t. $gf(z;g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exists c_k(g) z^{-k} \in H_+ \oplus H_-$.
- $g = e^{xz+tz} \Longrightarrow u(x+t) \equiv -2\partial_x c_1(x+t)$

$$\boxed{-f''(x,z) + u(x)f(x,z) = -z^2 f(x,z) \quad \text{（Schrödinger 方程式）}}$$

- $g = e^{xz-4tz^3} \Longrightarrow u(x,t) = -2\partial_x c_1(x,t)$

$$\boxed{\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\partial_x u \quad \text{(KdV 方程式)}}$$

Sato-Segal-Wilson理論 2 （Groupの作用）

- Group $\Gamma = \{g = e^h;\ h$**は**$\{|z| \le r\}$**の近傍で** analytic$\}$.
- $g \in \Gamma$**に対して次を仮定** $gW \in Gr^{(2)}$
- **このとき** gW **に対する性質** (ii) **より**

$$\mathfrak{p}_+ : gW \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+ .$$

- $W \ni \exists f(z;g)$ s.t. $gf(z;g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exists c_k(g) z^{-k} \in H_+ \oplus H_-$.
- $g = e^{xz+tz} \Longrightarrow u(x+t) \equiv -2\partial_x c_1(x+t)$

$$\boxed{-f''(x,z) + u(x)f(x,z) = -z^2 f(x,z) \quad \text{(Schrödinger方程式)}}$$

- $g = e^{xz-4tz^3} \Longrightarrow u(x,t) = -2\partial_x c_1(x,t)$

$$\boxed{\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\partial_x u \quad \text{(KdV方程式)}}$$

- $g = e^{xz+tz^{2n+1}} \Longrightarrow u(x,t) = -2\partial_x c_1(x,t)$

$$\boxed{\partial_t u = -\partial_x^{2n+1} u + \text{non-linear term} \quad \text{(高次KdV方程式)}}$$

Sato-Segal-Wilson理論 3 （問題点）

- $W \in Gr^{(2)}$，$g \in \Gamma \Longrightarrow gW$ が性質 (ii) をみたすか？

Sato-Segal-Wilson 理論 3 （問題点）

- $W \in Gr^{(2)}$，$g \in \Gamma \Longrightarrow gW$ が性質 (ii) をみたすか？
- 一般にはこれは期待できず，$Gr^{(2)}$ より小さい $\exists Gr_0^{(2)} \subset Gr^{(2)}$ を見出し.

$$\forall W \in Gr_0^{(2)}, \ \ g \in \Gamma \Longrightarrow gW \in Gr_0^{(2)}$$

が成り立つようにする必要がある．

Sato-Segal-Wilson 理論 3 （問題点）

- $W \in Gr^{(2)}$，$g \in \Gamma \Longrightarrow gW$ が性質 (ii) をみたすか？
- 一般にはこれは期待できず，$Gr^{(2)}$ より小さい $\exists Gr_0^{(2)} \subset Gr^{(2)}$ を見出し.
$$\forall W \in Gr_0^{(2)},\ \ g \in \Gamma \Longrightarrow gW \in Gr_0^{(2)}$$
が成り立つようにする必要がある．
- それでも，この範疇に入る potential は $\mathbb{C}$ で有理型のものに限られるので，どのようにして解析的でない potential を枠組みに入れるかが最大の問題．

Tau-関数　1

- Γ の $Gr^{(2)}$ への作用を量的に記述するものとして非常に重要な $\tau-$ 関数がある．$W \in Gr^{(2)}$ に対して

$$\text{性質(ii)より}\quad \mathfrak{p}_+ : W \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+$$

$$\forall f_+ \in H_+ \longrightarrow \exists 1 f_- \in H_- \quad \text{s.t.} \quad f_+ + f_- \in W$$

$$f_- = A_W f_+ \ \text{とおくと}\ W = \{f_+ + A_W f_+;\ \ f_+ \in H_+\}$$

Tau-関数　1

- Γ の $Gr^{(2)}$ への作用を量的に記述するものとして非常に重要な $\tau-$ 関数がある．$W \in Gr^{(2)}$ に対して

$$\text{性質(ii)より}\quad \mathfrak{p}_+ : W \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+$$

$$\forall f_+ \in H_+ \longrightarrow \exists 1 f_- \in H_- \quad \text{s.t.} \quad f_+ + f_- \in W$$

$$f_- = A_W f_+ \ \text{とおくと}\ W = \{f_+ + A_W f_+ ;\ \ f_+ \in H_+\}$$

- $g \in \Gamma$ に対して $\tau-$ 関数を次のように定義する．

$$\begin{aligned} R_W(g) &\equiv g^{-1}\mathfrak{p}_+ g A_W :\ \ H_+ \mapsto H_+, \quad \text{trace class} \\ \tau_W(g) &\equiv \det(I + R_W(g)) \qquad\qquad \tau - \text{関数} \end{aligned}$$

Tau-関数　1

- Γ の $Gr^{(2)}$ への作用を量的に記述するものとして非常に重要な$\tau-$関数がある．$W \in Gr^{(2)}$ に対して

$$\text{性質(ii)より}\quad \mathfrak{p}_+ : W \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+$$

$$\forall f_+ \in H_+ \longrightarrow \exists 1 f_- \in H_- \quad \text{s.t.} \quad f_+ + f_- \in W$$

$$f_- = A_W f_+ \ \text{とおくと}\ W = \{f_+ + A_W f_+;\ \ f_+ \in H_+\}$$

- $g \in \Gamma$ に対して$\tau-$関数を次のように定義する．

$$\begin{aligned} R_W(g) &\equiv g^{-1}\mathfrak{p}_+ g A_W :\ \ H_+ \mapsto H_+, \quad \text{trace class} \\ \tau_W(g) &\equiv \det(I + R_W(g)) \qquad\qquad \tau-\text{関数} \end{aligned}$$

- $\tau_W(g)$ の性質

Tau-関数　1

- Γ の $Gr^{(2)}$ への作用を量的に記述するものとして非常に重要な $\tau-$ 関数がある．$W \in Gr^{(2)}$ に対して

$$\text{性質(ii)より}\quad \mathfrak{p}_+ : W \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+$$

$$\forall f_+ \in H_+ \longrightarrow \exists 1 f_- \in H_- \quad \text{s.t.} \quad f_+ + f_- \in W$$

$$f_- = A_W f_+ \ \text{とおくと}\ W = \{f_+ + A_W f_+;\ \ f_+ \in H_+\}$$

- $g \in \Gamma$ に対して $\tau-$ 関数を次のように定義する．

$$\begin{aligned} R_W(g) &\equiv g^{-1}\mathfrak{p}_+ g A_W :\ \ H_+ \mapsto H_+, \quad \text{trace class} \\ \tau_W(g) &\equiv \det(I + R_W(g)) \qquad\qquad \tau - \text{関数} \end{aligned}$$

- $\tau_W(g)$ の性質
  1. $gW \in Gr^{(2)} \Longleftrightarrow \tau_W(g) \neq 0$

Tau-関数　1

- Γ の $Gr^{(2)}$ への作用を量的に記述するものとして非常に重要な $\tau-$ 関数がある．$W \in Gr^{(2)}$ に対して

$$\text{性質(ii)より}\quad \mathfrak{p}_+ : W \underset{1:1,\ onto}{\Longrightarrow} H_+$$

$$\forall f_+ \in H_+ \longrightarrow \exists 1 f_- \in H_- \quad \text{s.t.} \quad f_+ + f_- \in W$$

$$f_- = A_W f_+ \text{ とおくと } W = \{f_+ + A_W f_+;\ \ f_+ \in H_+\}$$

- $g \in \Gamma$ に対して $\tau-$ 関数を次のように定義する．

$$\begin{aligned} R_W(g) &\equiv g^{-1}\mathfrak{p}_+ g A_W : \quad H_+ \mapsto H_+, \quad \text{trace class} \\ \tau_W(g) &\equiv \det(I + R_W(g)) \qquad\qquad \tau - \text{関数} \end{aligned}$$

- $\tau_W(g)$ の性質
  1. $gW \in Gr^{(2)} \Longleftrightarrow \tau_W(g) \neq 0$
  2. Cocycle 性： $g_1, g_2 \in \Gamma,\ W \in Gr^{(2)}$
     $\Longrightarrow \tau_W(g_1 g_2) = \tau_W(g_1)\,\tau_{g_1 W}(g_1 g_2)$ if $\tau_W(g_1) \neq 0$

Tau-関数　2

ほとんどすべての重要な量は$\tau_W(g)$により表現できる．
$H_+ = \left\langle \{1, z\} z^{2n} \right\rangle_{n\geq 0}$なので

$$\varphi_W(z) = (A_W 1)(z), \psi_W(z) = (A_W z)(z), m_W(z) = \frac{z+\psi_W(z)}{1+\varphi_W(z)} + a_1$$

とおく．ただし$\varphi_W(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}$とした．性質(i),(ii)により
$W = \left\langle \{1+\varphi_W(z), z+\psi_W(z)\} z^{2n} \right\rangle_{n\geq 0}$がわかる．$\tau_W(1) = 1$は自明
で，$|\zeta| > r$のとき$q_\zeta(z) = \left(1 - z\zeta^{-1}\right)^{-1}$とおくと，$\tau_W(q_\zeta)$は，$f \in H_-$
に対して$\left(q_\zeta^{-1}\mathfrak{p}_+ q_\zeta f\right)(z) = f(\zeta)$に注意すると

$$\tau_W(q_\zeta) = \det\left(I + q_\zeta^{-1}\mathfrak{p}_+ q_\zeta A_W\right) = 1 + \varphi_W(\zeta)$$

となる．またq_ζのときと同様の計算で

$$\tau_W\left(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}\right) = (1+\varphi_W(\zeta_1))(1+\varphi_W(\zeta_2)) \frac{m_W(\zeta_1) - m_W(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2}$$

Tau-関数 3

さらに計算を続けていくと

$$\tau_W\left(q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}\cdots q_{\zeta_n}\right)=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\varphi_W(\zeta_k)\right)\right)\times\left(\{m_W(\zeta_k)\}_{k=1}^{n}\text{ の有理式}\right)$$

がわかる．第２項は帰納的に定義することが可能である．第１項は

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\varphi_W(\zeta_k)\right)=\prod_{k=1}^{n}\tau_W(q_{\zeta_k})=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\log\tau_W(q_z)}{\zeta_k-z}dz\right)$$

（$r<r'<|\zeta_k|$ とする）．そこで一般の $g=e^h\in\Gamma$ に対して

$$\rho_W\left(g\right)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r'}h'\left(z\right)\log\tau_W(q_z)dz\right)$$

とおく．これは $\Gamma\to\mathbb{C}^\times$ への準同型，つまり以下を満たす．

$$\rho_W\left(g_1g_2\right)=\rho_W\left(g_1\right)\rho_W\left(g_2\right)$$

Tau-関数　4

そこで新しくTau-関数を

$$\tau_{m_W}(g) = \tau_W(g)/\rho_W(g)$$

で定めると，$\tau_{m_W}(g)$はgとm_Wのみに依存する，つまり，
$W_1, W_2 \in Gr^{(2)}$に対して$m_{W_1} = m_{W_2}$なら$\tau_{m_{W_1}}(g) = \tau_{m_{W_2}}(g)$となる．
また$Gr^{(2)}$を定義したときの基礎のHilbert空間$L^2(|z| = r)$のrにも依存しない．実は扱うpotential のclassを拡張するときに（ある意味で$r \to \infty$とする）$\rho_W(g)$は発散するが，$\tau_{m_W}(g)$は有限にとどまることがわかり，これからの議論では$\tau_{m_W}(g)$が本質的なTau-関数になる．
$e_x(z) = e^{xz} \in \Gamma$としたとき，$e_x W \in Gr^{(2)}$なら，
$e_x f(x,z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) z^{-k}$となる$f(x,\cdot) \in W$が唯一存在し

$$-f''(x,z) + u(x)f(x,z) = -z^2 f(x,z),\ (u(x) = -2\partial_x c_1(x))$$

となった．この$u(x)$もTau-関数で表現できる．

$e_x f(x,\zeta) = \varphi_{e_x W}(\zeta)$ なので $e^{x\zeta} f(x,\zeta) = \tau_{e_x W}(q_\zeta)$ である．一方，$\lim_{\zeta\to\infty} \zeta\left(e^{x\zeta} f(x,\zeta) - 1\right)$ なので，cocycle 性より

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \lim_{\zeta\to\infty} \zeta\left(\tau_{e_x W}(q_\zeta) - 1\right) = \lim_{\zeta\to\infty} \zeta\left(\tau_W(e_x q_\zeta) / \tau_W(e_x) - 1\right) \\ &= \lim_{\zeta\to\infty} \zeta\left(\tau_W\left(e_{x+\zeta^{-1}}\right) - \tau_W(e_x)\right) / \tau_W(e_x) = \partial_x \log \tau_W(e_x) \end{aligned}$$

となる．ここで近似 $q_\zeta(z) \sim e^{\zeta^{-1} z}$（$\zeta \to \infty$）を使っている．したがって

$$u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_W(e_x)$$

をえる．これを新しい Tau-関数 $\tau_{m_W}(g)$ で書き直そう．ρ_W は準同型であったので，ある定数 c により $\rho_W(e_x) = e^{cx}$ となる．したがって

$$\tau_W(e_x) = \rho_W(e_x)\,\tau_{m_W}(e_x) = e^{cx}\tau_{m_W}(e_x)$$

つまり

$$u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_{m_W}(e_x)$$

となる．KdV 方程式の解 u も $u(x,t) = -2\partial_x^2 \log \tau_{m_W}\left(e_x e^{-4tz^3}\right)$ となる．

無反射potential空間の設定

- $r > 0$に対してpotential u の空間を以下のように定義する．

$$\mathcal{Q}_r^{refl} = \left\{ u; \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & L_u \text{は} \left(r^2, \infty\right) \text{で無反射} \\ \text{(ii)} & \mathrm{sp}\left(L_u\right) \subset \left[-r^2, \infty\right) \end{array} \right\}$$

無反射potential空間の設定

- $r > 0$に対してpotential u の空間を以下のように定義する．

$$\mathcal{Q}_r^{refl} = \left\{ u; \begin{array}{ll} \text{(i)} & L_u \text{は} \left(r^2, \infty\right) \text{で無反射} \\ \text{(ii)} & \mathrm{sp}\left(L_u\right) \subset \left[-r^2, \infty\right) \end{array} \right\}$$

- これをそのWeyl関数 $m_\pm$ の言葉で述べるために新しく m を定義

$$m(z) = \begin{cases} -m_+\left(z^2\right) & \text{if} \quad \mathrm{Re}\, z > 0 \\ m_-\left(z^2\right) & \text{if} \quad \mathrm{Re}\, z < 0 \end{cases}$$

無反射potential空間の設定

- $r>0$に対してpotential u の空間を以下のように定義する．

$$\mathcal{Q}_r^{refl}=\left\{u;\quad \begin{array}{ll}\text{(i)} & L_u\text{は}\left(r^2,\infty\right)\text{で無反射} \\ \text{(ii)} & \operatorname{sp}\left(L_u\right)\subset\left[-r^2,\infty\right)\end{array}\right\}$$

- これをそのWeyl関数$m_\pm$の言葉で述べるために新しくmを定義

$$m\left(z\right)=\begin{cases}-m_+\left(z^2\right) & \text{if}\quad \operatorname{Re}z>0\\ m_-\left(z^2\right) & \text{if}\quad \operatorname{Re}z<0\end{cases}$$

- (i)より $m_-\left(\lambda+i0\right)+\overline{m_+\left(\lambda+i0\right)}=0$ a.e. $\lambda>r^2$となるので，mは$\mathbb{C}\setminus\left(I_r\cup iI_r\right)$（ただし，$I_r=\left[-r,r\right]$）でanalyticである．そこで$m$の空間を以下で定義する．

$$\mathcal{M}_r^{refl}=\left\{m;\quad \begin{array}{ll}\text{(i)} & m\text{は}\mathbb{C}\setminus\overline{\left(I_r\cup iI_r\right)}\text{でanalytic}\\ \text{(ii)} & m(z)=\overline{m(\overline{z})},\quad \operatorname{Im}m(z)>0\ \text{ if }\ \operatorname{Im}z>0\\ \text{(iii)} & m(x)\geq m(-x)\quad\text{for }\forall x>r\end{array}\right\}.$$

このとき　$\mathcal{Q}_r^{refl}\Longleftrightarrow\mathcal{M}_r^{refl}$となる．$\mathcal{Q}_r^{refl}$の(ii)は$\mathcal{M}_r^{refl}$の(iii)に対応．

基本定理　1

Γ の部分群を $\Gamma_{\mathrm{real}} = \left\{ g \in \Gamma\,;\quad g(z) = \overline{g(\bar{z})} \right\}$ とする．

Theorem

$m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ に対して

$$W_m = \left\{ \varphi\left(z^2\right) + m(z)\psi\left(z^2\right);\ \varphi, \psi \in H_+\left(|z| = r^2\right) \right\}$$

とおくと，$\forall g \in \Gamma_{\mathrm{real}} \Rightarrow gW_m \in Gr^{(2)}$ となる（$\tau_{W_m}(g) \neq 0$）．さらに $u \in \mathcal{Q}_r^{refl} \iff m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ とし，$(K(g)u)(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x g)$ とおくと，$K(g)u \in \mathcal{Q}_r^{refl}$ となり，$\{K(g)\}_{g \in \Gamma_{\mathrm{real}}}$ は $\mathcal{Q}_r^{refl}$ 上の *flow* を定める．とくに以下のようになる．

$$\begin{cases} \left(K\left(e^{tz}\right)u\right)(x) = u(x+t) \text{ は } \partial_t u = \partial_x u \text{ の解} \\ \left(K\left(e^{-4tz^3}\right)u\right)(x) = u(x,t) \text{ は } KdV \text{ 方程式の解} \\ \left(K\left(e^{tz^{2n+1}}\right)u\right)(x) = u(x,t) \text{ は高次 } KdV \text{ 方程式の解} \end{cases}$$

Tau-関数のFredholm行列式表示　1

$\mathcal{Q}_r^{refl}$ の定義の (i) は非常に強い条件で，事実 $\tau_m(e_x)$ がentire関数になるので，$u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x)$ は $\mathbb{C}$ 上meromorphicな関数になり，そのpoleは $\tau_m(e_x)$ の零点と一致し，α が n 重の零点なら $2n(x-\alpha)^{-2}$ の形をとる．Lundina-Marchenkoは $\mathcal{Q}_r^{refl}$ の元 u について，u は帯領域 $\{|\mathrm{Im}\, z| < r\}$ でanalyticで一様な評価

$$|u(z)| \leq 2r^2 \left(1 - r\,|\mathrm{Im}\, z|\right)^{-2}$$

をもつことを示している．そこで $\mathcal{Q}_r^{refl}$ の制限を緩めるためには何らかの意味で $r \to \infty$ とする必要がある．そのために $\tau_m(g)$ のFredholm行列式表示を与えよう．そのためには $W = W_m$ に対して A_W を具体化する必要がある．$Gr^{(2)}$ の性質 (i)，W_m の定義をみると，$\mathbf{H} = H_e \times H_o$ と奇関数 H_e，偶関数 H_o の空間に分解して考えるのが自然である．$W\left(\in Gr^{(2)}\right)$ も $\mathbf{H}$ で考え，$\mathbf{W}$ になったとすると $\mathbf{W}$ の (i) に対応する性質は $z\mathbf{W} \subset \mathbf{W}$ となる．$W = W_m$ のときには，対応する $\mathbf{W}_m$ は

$$\mathbf{W}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m_e(z) \\ 0 & m_o(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} ; \quad f_j \in H_+\left(|z| = r^2\right) \right\}.$$

Tau-関数のFredholm行列式表示　2

A_Wを表現するために用語としてToeplitz作用素を借りる．$a(z)$が$\{|z|=r\}$上で与えられた有界関数とするときH_+上の有界作用素$T(a)$を

$$T(a)f = p_+(af) : H_+ \to H_+$$

で定め，aをsymbolとするToeplitz作用素と呼ぶ．. 行列$A(z) = (a_{ij}(z))$に対しては$T(A) = (T(a_{ij}))$と定める．$\mathbf{W} = A(z)\mathbf{H}_+$のとき

$$\mathbf{W} \ni \mathbf{f}_+ + \mathbf{A}_\mathbf{W}\mathbf{f}_+ = A(z)\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_+$$

となっているとすると，$\mathbf{f}_+ = \mathfrak{p}_+ A(z)\mathbf{u} = T(A)\mathbf{u}$なので，$\mathbf{u} = T(A)^{-1}\mathbf{f}_+$となり

$$\mathbf{A}_\mathbf{W}\mathbf{f}_+ = A(z)\mathbf{u} - \mathbf{f}_+ = A(z)T(A)^{-1}\mathbf{f}_+ - \mathbf{f}_+$$

となる．$W = W_m$に対しては$A(z)$がmで表されているが，$T(m_o)^{-1}$が存在する場合には

$$\left(T\begin{pmatrix} 1 & m_e \\ 0 & m_o \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -T(m_e)T(m_o)^{-1} \\ 0 & T(m_o)^{-1} \end{pmatrix}$$

となるので，$A_\mathbf{W}$は$T(m_e)$，$T(m_o)^{-1}$を使って表現できることになる．

Tau-関数のFredholm行列式表示　3

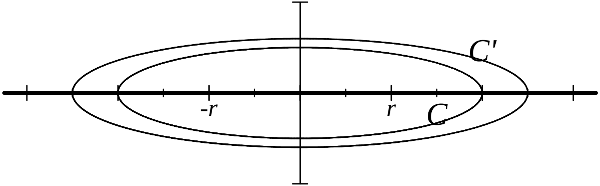
m がExampleでの条件

$$m(z) - z \in H_- \ \ \& \ \ m_o(z) \neq 0 \ \ \text{for} \ \ \forall z \in \{|z| \geq r^2\}$$

を満たすとき $T(m_o)^{-1} = T(m_o^{-1})$ となることがわかり A_W がToeplitz積分作用素で表現できる．これと

$$\mathfrak{p}_+ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

を使うと，$\tau_m(g)$ がFredholm行列式で表示できる．C, C' を $[-r^2, r^2]$ を囲む下図の単純閉曲線とする（r^2 を r としている）．



f.1

基本定理　2

$L^2(C)$ 上の積分作用素 $N_m(g)$ を以下のように定める．

$$\begin{cases} N_{g,m}(z,\lambda) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'} \dfrac{\widehat{g}_o(\lambda')(g\widetilde{m})_e(\lambda) + \widehat{g}_e(\lambda')(g\widetilde{m})_o(\lambda)}{(\lambda'-z)(\lambda-\lambda')m_o(\lambda')} d\lambda' \\ (N_m(g)f)(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C N_{g,m}(z,\lambda) f(\lambda)\, d\lambda. \end{cases}$$

ただし，$\widehat{g}(z) = g(z)^{-1}$ であり，$\delta(z)$ を δ_e，δ_o が C' の内部で analytic になる任意の関数とし

$$\widetilde{m}(z) = m(z) - \delta(z)$$

とする．

Theorem

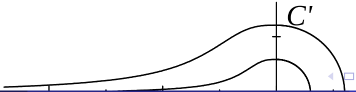
$\tau_m(g) = \det(I + N_m(g))$

Tau-関数の拡張 1

$\mathcal{Q}_r^{refl}$ 上のKdV flow $K(g)$ を定義する際に使った $\tau_m(g)$ は区間 $\left[-r^2, r^2\right]$ を囲む閉曲線上の積分作用素のFredholm行列式として表現された．この段階で議論の枠組みはSato-Segal-Wilsonの理論から離れており，$Gr^{(2)}$ との直接的な関係はない．$m_\pm$ から m を定義したとき変数を $-z^2$ としているので

$$m_e(z) = -\frac{m_+(-z) - m_-(-z)}{2}, \quad m_o(z) = -\frac{m_+(-z) + m_-(-z)}{2\sqrt{z}}$$

となっており，m_e，m_o の特異性は $\mathbb{R}$ 上に現れるが，$m_\pm$ の特異性と左右が逆転していることに注意してほしい．したがって，$\mathrm{sp}L_u \subset [\lambda_0, \infty)$ $(\lambda_0 < 0)$ とすると，m_e，m_o は $(-\infty, -\lambda_0]$ で特異性をもつことになる．したがって $\left[-r^2, r^2\right]$ を囲む閉曲線 C, C' で左の $-r^2$ を $-\infty$ にもっていき，右の r^2 は $-\lambda_0$ より大きくして止めておくことになる．つまり下図のように $-\infty$ に C, C' を延長していくことになる．



Tau-関数の拡張 2

曲線 C, C' の形は次のことを指針にする．C, C' を $-\infty$ に延長しても，Fredholm 行列式を定義するためには，積分作用素 $N_m(g)$ は trace class (あるいは Hilbert-Schmidt class）にとどまる必要がある．そのとき一番の問題は g_e，g_o が有界にとどまることである．つまり C に沿って $e^{h\left(\sqrt{z}\right)}$ が有界でなければならない．h が奇数次 n の実係数多項式の場合，z が負の実数のときには

$$\left(x+i\left(-x\right)^{-\alpha}\right)^{n/2}=\left(-1\right)^{n}i\left(-x\right)^{n/2}+O\left(-x\right)^{-\alpha-1+n/2}$$

となるので $\alpha\geq n/2-1$ とすれば，g_e，g_o は曲線

$$\left\{x+i\left(-x\right)^{-\alpha};x\leq-1\right\}$$

上では有界にとどまる．したがって曲線 C，C' の選択は g に依存することになる．g を決める h の次数が高くなれば C, C' は $-\infty$ で負の実軸により接近するように選ぶことになる．

Tau-関数の拡張 3

そこで整数 $n \geq 1$ に対して群 Γ_n を以下のように定める．

$$\Gamma_n = \left\{ g = e^h;\ \ h \text{ は実係数奇数次多項式で次数} \leq n \right\}$$

固定した $b > -\lambda_0$ と $\alpha > 0$ に対し，$(-\infty, b]$ 上のなめらかな関数 ω が

$$\omega(x) > 0 \text{ for } x < b,\ \ \omega(b) = 0,\ \ \omega(x) \sim (-x)^{-\alpha} \text{ as } x \to -\infty$$

みたすとき　$C_\omega = \{x \pm i\omega(x)\ ;\ \ x \leq b\}$，また C_ω の外側を D_ω とし

$$\mathcal{R}_\omega = \left\{ f;\ \ f \text{ は } f(z) = O\left(z^{-1}\right) \text{ をみたす有理関数で極は 全て } D_\omega \text{ の中} \right\}$$

とおく．$N > 0$ に対して関数空間を以下のように設定する．

$$\Phi_\alpha^N = \left\{ \varphi;\ \boxed{\begin{array}{c|l} \text{(i)} & \varphi \text{ は } \mathbb{C} \backslash (-\infty, -\lambda_0] \text{ で analytic} \\ \hline \text{(ii)} & \forall c > 0,\ \exists f \in \mathcal{R}_\omega \text{ s.t. } \sup\limits_{z \in C_{c\omega}} |z|^N |\varphi(z) - f(z)| < \infty \end{array}} \right\}$$

$\|\varphi\|_{C_\omega, N} = \inf_{f \in \mathcal{R}_\omega} \sup_{z \in C_\omega} |z|^N |\varphi(z) - f(z)|$ は Φ_α^N 上の norm を定める．

Tau-関数の拡張 4

Weyl 関数 $m_\pm$ に対して m は以下で定めた．

$$m(z) = \{-m_+(-z^2) \ \text{if} \ \ \mathrm{Re}\, z > 0, \quad m_-(-z^2) \ \text{if} \quad \mathrm{Re}\, z < 0$$

m により Weyl 関数の class を次で定める．

$$\mathcal{M}_\alpha^N = \left\{ m; \quad m_e, \ \ m_o - 1 \in \Phi_\alpha^N \right\}$$

$\alpha = n/2 - 1$ とすると，積分核 $N_{g,m}$ は $C = C_{c\omega}$，$C' = C_{c'\omega}$ $(c' > c)$ で評価

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists c_\epsilon > 0 \ \text{s.t.} \ \ \left|N_{g,m}(z,\lambda)\right| \le c_\epsilon \frac{|g|_C \, |\widehat{g}|_{C'} \, \langle m \rangle_{C,N}}{\min_{C'}(m_o)} \, |z|^{\alpha/2} \, |\lambda|^{-N+(1+\alpha)}$$

をもつ．ここで右辺の量は

$$\begin{cases} \langle m \rangle_{C,N} = \|m_e\|_{C,N} + \|m_o - 1\|_{C,N} \\ \min_{C'}(m_o) = \min_{z \in C'} |m_o(z)| \\ |g|_C = \max\left(\sup_{z\in C} |g_e(z)|, \ \ \sup_{z \in C} |g_o(z)|\right) \end{cases}$$

Tau-関数の拡張 5

$N_{g,m}$ は変数 z については冪で増大する可能性があるが，$a > b$ に対して $H(z) = (z-a)^M$ とし，新たに

$$\widetilde{N}_{g,m}(z,\lambda) = H(z)^{-1} N_{g,m}(z,\lambda) H(\lambda)$$

で積分核 $\widetilde{N}_{g,m}$ を定めると，M，N を $\alpha = n/2 - 1$ に比べて十分大きくすれば $\widetilde{N}_{g,m}$ を核とする作用素 $\widetilde{N}_m(g)$ は trace class になるので

$$\tau_m(g) = \det\left(I + \widetilde{N}_m(g)\right), \quad g \in \Gamma_n, m \in \mathcal{M}_\alpha^N$$

と定義する．$m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ の場合には元の $\tau_m(g)$ と一致することを確かめることができる．一般の $m \in \mathcal{M}_\alpha^N$ は $\|\cdot\|_{C,N}$ $-$norm により $\cup_{r>0}\mathcal{M}_r^{refl}$ の元で近似できるので，この $\tau_m(g)$ は元の $\tau_m(g)$ の拡張になっており，その性質も引き継ぐことになる．

基本定理　3

奇数の整数$n \geq 1$に対して次のように定める．

$$\begin{cases} \mathcal{M}_n = \bigcap_{N \geq 1} \mathcal{M}^N_{-1+n/2} \\ \mathcal{Q}_n = \left\{ u; \ \ u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m\left(e_x\right) \quad \text{for } m \in \mathcal{M}_n \right\} \end{cases}$$

$u \in \mathcal{Q}_n$がWeyl関数$m \in \mathcal{M}_n$に対応している，つまり
$u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m\left(e_x\right)$のとき

$$\left(K(g)u\right)(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m\left(ge_x\right)$$

とおくと

Theorem

$\{K(g)\}_{g \in \Gamma_n}$は$\mathcal{Q}_n$上になめらかな*flow*を定め，$n = 3$なら$K\left(e^{-4tz^3}\right)u$は*KdV*方程式の解を与える．

具体例

$\mathcal{Q}_n$の元はWeyl関数mを使って表されているので，十分多くの例を含むことを示す必要がある．まず$m \in\in \mathcal{M}_n$と任意の$N \geq 1$に対して

$$\begin{cases} m_+(-z) = -\sqrt{z} - \sum_{j=1}^{N+1} c_{j+1} \left(\sqrt{z}\right)^{-j} + o\left(\sqrt{z}^{-N-1}\right) \\ m_-(-z) = -\sqrt{z} - \sum_{j=1}^{N+1} (-1)^{j+1} c_{j+1} \left(\sqrt{z}\right)^{-j} + o\left(\sqrt{z}^{-N-1}\right) \end{cases}$$

が曲線$C = \left\{x + ic\left(-x\right)^{-n+1/2}\ ; x < -1\right\}$で成り立つことは同値である．ここで$c_j$は$\left\{u^{(k)}(0)\right\}_{k=0}^{j}$に多項式的に関係している実定数である．この展開は，uが0の近傍でなめらかならば，任意の$\epsilon > 0$に対して，扇型領域$\{\epsilon < \arg z < \pi - \epsilon\}$で成り立つことは知られている．我々はこの展開が$C$上の$-\infty$の近傍で成り立つ$u$の十分条件を知る必要がある．簡単にわかる例は

(i) $u \in \mathcal{S}$(Schwartz)，　(ii) $u \in C^\infty(\mathbb{T})$，
(iii) $\mathbb{R}_\pm$で(i)または(ii)の形で0で滑らかなu

いづれも$m_\pm(z)$は$\mathbb{R}_+$で離散的な点を除いて有限値で漸近展開可能である．

基本定理　4

Zakharovの要請を満たすためにはrandomなergodic初期値に対してKdVを解く必要がある．$\{u_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega}$を$(\Omega, F, P, \{\theta_x\})$上のergodicな定常確率過程とする．周期関数，準周期関数，概周期関数はこの範疇に入る．このときWeyl関数$m_\pm^\omega(z)$も確率変数になる．

$w(z) = \mathbb{E}m_\pm^\omega(z)$　（$\pm$で同じ関数になる），　$\gamma(z) = -\operatorname{Re} w(z)$

とおく．これらはそれぞれFloquet指数，Lyapunov指数と呼ばれている．wはHerglotz関数でγは$\mathbb{C}_+$で正のharmonic関数になり，いづれも$\mathbb{R}$で有限な境界値をもつ．

Theorem

任意の$n \geq 1$に対して$\int_0^\infty \lambda^n \gamma(\lambda)\, d\lambda < \infty$なら$u_\omega \in \mathcal{Q}_n$　$a.s..for$ $\forall n \geq 1.$　特にu_ωがC_b^∞なら十分．

基本定理　4　の略証　1

$\chi(z) = -\operatorname{Re} w(z)/\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w'(z)$ とおく．反射係数についての等式

$$4\chi(z) = \mathbb{E}\left(\left((\operatorname{Im} m_+^\omega(z))^{-1} + (\operatorname{Im} m_-^\omega(z))^{-1}\right)|R_\omega(z)|^2\right)$$

がわかっている．Schwarz の不等式により次の評価を得る．

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|R_\omega(z)|) &\le 2\sqrt{\mathbb{E}\left(\left((\operatorname{Im} m_+^\omega(z))^{-1} + (\operatorname{Im} m_-^\omega(z))^{-1}\right)^{-1}\right)}\sqrt{\chi(z)} \\ &\le \sqrt{\mathbb{E}\operatorname{Im}(m_+^\omega(z) + m_-^\omega(z))}\sqrt{\chi(z)} = \sqrt{2\chi(z)\operatorname{Im} w(z)}\end{aligned}$$

右辺は解析可能なので，$|R_\omega(z)|$ から $m_\pm^\omega(z)$ の漸近展開が分かればよい．

Lemma

$m_\pm \in \mathbb{C}_+$ に対して $m_1 = -(m_+ + m_-)^{-1}$, $m_2 = -m_+ m_- m_1$,
$R = -(\overline{m_+} + m)\, m_1$ とおくと， $m_1, m_2 \in \mathbb{C}_+$, $|R| \le 1$ であり，
$\xi_j = (\arg m_j)/\pi$ （$J = 1, 2$）は次を満たす．

$$|\xi_1 - 1/2|, \quad |\xi_2 - 1/2| \le 2|R|/\pi.$$

基本定理　4　の略証　2

$m_\pm$ の漸近展開は m_j の次の漸近展開と同値である．

$$\begin{cases} m_1(-z) = \frac{1}{2}\sqrt{z}^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{(N+1)/2} b_n z^{-n}\right) + o\left(z^{-(N+1)/2}\right) \\ m_2(-z) = -\frac{1}{2}\sqrt{z}\left(1+\sum_{n=1}^{(N+1)/2} c_n z^{-n}\right) + o\left(z^{-(N+1)/2}\right) \end{cases}$$

一方 $\log m_j$ も Herglotz 関数であるので，以下の表現をもつ．

$$\begin{cases} m_1(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{-z}}\exp\left(\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{\xi_1(\lambda) - I_{\lambda>0}/2}{\lambda - z}d\lambda\right) \\ m_2(z) = -\dfrac{\sqrt{-z}}{2}\exp\left(\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{\xi_2(\lambda) - I_{\lambda>0}/2}{\lambda - z}d\lambda\right) \end{cases}$$

一般に

$$\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{f(\lambda)}{\lambda - z}d\lambda = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n-1}\int_{\lambda_0}^{\infty}\lambda^n f(\lambda)\,d\lambda + z^{-N}\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{\lambda^N f(\lambda)}{\lambda - z}d\lambda$$

となるので，$m_\pm$ の漸近展開には $\int_0^\infty \mathbb{E}\left(|R_\omega(\lambda)|\right)\lambda^N d\lambda < \infty$ が成り立てば十分である．

基本定理　4　の略証　3

L_{u_ω} の絶対連続スペクトルを Σ_{ac}（non-random 集合）とすると，
$R_\omega(\lambda) = 0$ a.e. $\lambda \in \Sigma_{ac}$ が知られているので

$$\int_{R_+ \setminus \Sigma_{ac}} \lambda^N d\lambda < \infty$$

が成り立てば，$m_\pm^\omega$ の C 上での漸近展開が成り立つことになる．しかしこの条件は十分豊富な ac スペクトルの存在を仮定するので，Zakharov の要件を満たしていない．そこで $\mathbb{E}(|R_\omega(z)|) \le \sqrt{2\chi(z)\,\mathrm{Im}\,w(z)}$ を用いて

Lemma

任意の $n \ge 1$ に対して $\int_0^\infty \lambda^n \gamma(\lambda)\, d\lambda < \infty$ なら任意の $N \ge 1$ に対して $\int_C \mathbb{E}(|R_\omega(-z)|)\, |z|^N |dz| < \infty$

基本定理　4　の略証　4

$\mathbb{C}_+$ から D_ω への conformal map ϕ を利用すると Lemma より

$$\mathbb{E}\int_{-\infty}^{0}\left|\lambda^N R_\omega\left(-\phi\left(\lambda\right)\right)\right|d\lambda<\infty \overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{0}\left|\lambda^N R_\omega\left(-\phi\left(\lambda\right)\right)\right|d\lambda<\infty \text{ a.s.}$$

がわかり，さらにひとつ前の Lemma より

$$\int_{-\infty}^{0}|\lambda|^N\left|\xi_j^\omega\left(-\phi\left(\lambda\right)\right)-\frac{1}{2}\right|d\lambda<\infty$$

となるので，C に沿っての $m_\pm\left(-z\right)$ の漸近展開がわかることになる．

Open problem

このようにしてergodic**でなめらかな初期値に対して**KdV**方程式が解けることが分かった．しかしこれはまだ出発点に過ぎなく，時間無限大で解がどのような挙動をするかについてはまだ少ししかわかっていない．いくつか問題を挙げておこう．**

(i) **初期値が概周期的な場合，解も概周期的になることは**θ_x**と**g**との作用が可換なことからわかる．時間についての概周期性は**Yuditzkii**たちの最近の結果で，初期値は純粋絶対連続スペクトル**Σ**で，**Σ**が等質性**

$$\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \ \forall \epsilon \quad |\Sigma \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)| \geq \delta \epsilon \quad \text{for } \forall x \in \Sigma$$

をもつときのみである．Deift**は任意の概周期的な初期値に対して解は時間的にも概周期的になることを予想している．**

(ii) **初期値が理想的に**random**になった場合として**white noise **がある．周期的な場合は**KdV**方程式は解けるが，**$\mathbb{R}$**上の**white noise**に対して**KdV**方程式の可解性はまだわかっていない．我々の方法で評価を厳しく見ていけばできる可能性があるが，簡単ではない．解ができたとして，**Zakharov**達の導出している**soliton**密度の方程式まで示せるか問題である．一般に稠密に運動する**soliton**を詳細にとらえることは魅力的な問題である．**