エルゴード的な初期値をもつ KdV 方程式

小谷眞一
確率論サマースクール２０１８

1　KdV 方程式の背景

■研究の端緒　KdV 方程式の特徴的な解である孤立波は方程式の発見以前の 1834 年に造船技師 S. Russel によりエジンバラの運河で発見されたが，KdV 方程式（Kortweg-de Vries 方程式）は Kortweg-de Vries により 1895 年に底の浅い水面波を表現する方程式として導出された以下の非線形発展方程式である．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

この方程式で係数の値は本質的ではなく，時間・空間のスケール変換で自由に操作できる．この方程式の特殊解（進行波解），つまり一変数関数 f により $u(x,t) = f(x-ct)$ と表せる解は

$$-cf' = -f''' + 6ff'$$

と常微分方程式に帰着し積分可能である．実際，解は２種類あり一つは急減少する

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2 \frac{\sqrt{c}}{2}(x-a)} \equiv s(x-a;c) \qquad \text{（孤立波解）} \tag{1}$$

であり，もう一つは周期的な

$$f(x) = -u_0 - 2\kappa^2 k^2 \mathrm{cn}^2\left(\kappa(x+\delta);k^2\right), \qquad \text{但し } c = 6u_0 + 4\left(k^2-1\right)\kappa^2$$

である．ここで cn は Jacobi の楕円関数を表す．これらの解は方程式の登場以来よく知られていたがその他の解については実験的な考察はあったもののよく知られていなかった．

■研究の大展開　その後，1965 年に Zabusky-Kruskal([ZK]) は計算機実験により急減少する初期値から出発した解は時間が増大するとともにいくつかの孤立波解に分解すること，しかもそれらの孤立波は衝突したのちも形を変えないことを示し，これらの孤立波解をソリトン (soliton) と呼んだ．そしてこれを契機に KdV 方程式の理論的な研究が一段と活発になった．そして，1967 年に Gardner-Greene-Kruskal-Miura([GGKM]) により KdV 方程式と一次元 Schrödinger 作用素の固有値との関係，より正確には減少するポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式の散乱理論との関係が発見され，また無限個の保存量も見つかり，一気に理論的な研究が進むことになる．この発見が数学に与えた影響は大きく，KdV 方程式の無限次元可積分系としての構造が明らかになっていく．

■可積分構造の解明　P. Lax により異なる時刻での KdV 方程式の解をポテンシャルに持つ Schrödinger 作用素は互いに unitary 同値になることが示されたので，Schrödinger 作用素で解を見れば，固有値が不変であ

るばかりでなくスペクトル自身が時間について不変になっている．しかし，これから直ちに KdV 方程式がすべての初期関数に対して解けるわけではない．解けるのは，後の節でも触れるが，Schrödinger 作用素のスペクトルとポテンシャルの関係がよく分かっている場合（急減少または周期的な場合）のみである．そこで KdV 方程式の構造についてさらに深い研究が進むことになる．ここで大きな貢献をしたのは広田良悟，佐藤幹夫とそのグループ，Marchenko である．

広田 [H] は，いくつかの非線形方程式において解 u が

$$u = \partial_x^2 \log f \quad \text{または} \quad = \frac{g}{f}$$

と表現されることに注意し，f（または f, g）の満たす方程式を考察し，その段階で関数に対する双線形形式の微分演算（広田微分）を導入した．これは 2 階の常微分方程式で解の対数微分をとると非線形の Riccati 方程式になることのある種の類似である．

佐藤幹夫 [S] は，この広田の方法の背後にある数学的構造を追求する過程で，KdV 方程式は，無限次元ベクトル空間上の Grassmann 多様体上の無限のパラメータをもつ力学系として理解できることを発見した．この佐藤の考察は多分に代数的（解は有理関数解，有限ソリトン解，θ ー関数解など）であったが，その後 Segal-Wilson[SW] により解析的に厳密な議論が展開された．

Marchenko[M] は 1979 年に KdV 方程式の線形部分

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u$$

を Banach 空間値の方程式とみなし，その後 u に対してある種の縮約を施すことにより元の KdV 方程式が得られることを示した．しかし，今のところこの方法で得られる解は限定的であるようである．

■Soliton turbulence　このように KdV 方程式を含む非線形方程式の可積分構造が解明されてきたが，すべての初期関数に対して KdV 方程式の解が構成されその性質が明らかになったわけではない．例えば，一般の準周期的な初期値あるいはもっとランダムな初期値から出発する解は構成できていない．一方，物理学者の V.Zakharov[Z],[Z1] はランダムな定常過程から出発する KdV 方程式の解について，孤立波解（この場合孤立波が無限個存在する）の統計物理的な考察をした．彼はこれを soliton turbulence, soliton gas と呼び，このような現象が物理現象としてよく現れ，その理論的解明が重要であると説いている．

■目標　本講演の主たる目標は，佐藤-Segal-Wilson による Grassmann 多様体上の力学系として KdV 方程式を解く方法を解析的にさらに拡張してより広いクラスの初期関数に対して KdV 方程式を解く方法を示すことである．これにより滑らかで ergodic な初期関数に対して KdV 方程式が解けることが示される．解の統計物理的な性質の解明は次の課題である．

2　KdV 方程式の従来の解法：減少解および周期解の場合

前節で KdV 方程式の最も単純な解として急減少解と周期解が存在することを示した．この節ではそれらの解法を解説する．まず両者に共通する性質を述べる．

■unitary 同値性　1968 年に P. Lax は前年に発見された固有値の保存（スペクトルの保存）という事実をより数学的に展開した．時間に依存する作用素 $L(t)$ の固有値が t に無関係であることの十分条件は，ある unitary 作用素 U(t) が存在して

$$L(t) = U(t)^{-1} L(0) U(t)$$

となることである．ここで $U(t)$ が unitary 作用素になる十分条件としては，ある skew-symmetric 作用素 $A(t)(A(t)^{*}=-A(t))$ が存在して

$$\frac{d}{dt}U(t)=U(t)A(t)$$

となることである．両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}L(t)=-U(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}U(t)\right)U(t)^{-1}L(0)U(t)+U(t)^{-1}L(0)\frac{d}{dt}U(t)=[L(t),A(t)]$$

となる．そこで，KdV 方程式の実数値解を $u(x,t)$ とし，$L(t)$ を $u(\cdot,t)$ をポテンシャルに持つ Schrödinger 作用素

$$L(t)=-\partial_x^2+u(x,t)$$

とするとき，Lax は $A(t)$ を発見した．

$$A(t)=4\partial_x^3-(6u(x,t)\partial_x+3\partial_x u(x,t))$$

実際，$A(t)$ は skew-symmetric であり

$$[L(t),A(t)]\,f=-\partial_x^3 f+6\,(u\partial_x u)\,f$$

．こが成り立つので $u(x,t)$ が KdV 方程式の解のときには，任意の f に対して

$$(\partial_t u(x,t))\,f\,(x)=([L(t),A(t)]\,f)\,(x) \tag{2}$$

が成り立つ．そこで（作用素）発展方程式

$$\frac{d}{dt}U(t)=U(t)A(t),\qquad U(0)=I$$

を解けば，$U(t)$ は unitary 作用素になり，$L(t)=U(t)^{-1}L(0)U(t)$ が成立する．$\{L(t),A(t)\}$ は KdV 方程式の Lax pair と呼ばれている．

■保存量　KdV 方程式は以下の無限個の保存量を持つことが [MGK] により 1968 年に発見された．まず u,$\partial_x u$,$\partial_x^2 u$,$\cdots$ の多項式を帰納的に以下のように定める．

$$\begin{cases} P_1=u \\ P_n=-\partial_x P_{n-1}+\sum_{j=1}^{n-2}P_jP_{n-1-j}, \qquad n\geq 2 \end{cases}.$$

そして u が x の急減少関数のときは

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}P_{2n-1}dx$$

u が x の周期関数（周期 l）のときは

$$I_n=\frac{1}{l}\int_0^l P_{2n-1}dx$$

と置くと，I_n は u（とその微分）の汎関数になるが，u を KdV 方程式の解にとると，$\{I_n\}_{n\geq 1}$ はすべて t に無関係になることがわかる．最初の数項は

$$\begin{cases} I_1=\int u dx \\ I_2=\int u^2 dx \\ I_3=\int \left(2u^3-(\partial_x u)^2\right)dx \end{cases}$$

である．

KdV 方程式の従来型の解法にはスペクトル保存性を使う方法と，保存量などをうまく利用した関数解析的な方法の 2 つがある．前者は特殊な状況を利用しているので他の非線形方程式には適用できないが，精密な結果が期待できる．後者は他の非線形方程式にも応用可能な汎用性のある方法であるが，結果は完全ではない場合が多い．

まず前者の方法を説明しよう．

2.1 スペクトル保存性を利用した方法

2.1.1 散乱理論と減少解

散乱理論と KdV 方程式の減少解との関係は [GGKM] により発見された．それを解説しよう．

■散乱理論　$u(x)$ を実軸上で定義された実数値関数で条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|u(x)|\,dx < \infty \tag{3}$$

を満たすとする．このとき，$\mathrm{Im}\,\zeta \geq 0$ を満たす複素数 ζ に対して，次の漸近的性質を持つ Schrödinger 方程式の解 $f_{\pm}(x,\zeta)$ が唯一存在する．

$$\begin{cases} -\partial_x^2 f_{\pm}(x,\zeta) + u(x)\, f_{\pm}(x,\zeta) = \zeta^2 f_{\pm}(x,\zeta) \\ f_{+}(x,\zeta) = e^{i\zeta x} + o\left(e^{i\zeta x}\right), \quad x \to +\infty \\ f_{-}(x,\zeta) = e^{-i\zeta x} + o\left(e^{-i\zeta x}\right), \quad x \to -\infty \end{cases} \tag{4}$$

これを示すには f_+ に対する積分方程式

$$f_{+}(x,\zeta) = e^{i\zeta x} - \int_x^{\infty} \frac{\sin\zeta(x-y)}{\zeta} u(y)\, f_{+}(y,\zeta)\, dy \tag{5}$$

を条件（3）の下で解けばよい．この解 $f_{\pm}(x,\zeta)$ は Schrödinger 方程式の Jost 解と呼ばれている．実数 k に対しては複素共役 $\overline{f_{\pm}(x,k)} = f_{\pm}(x,-k)$ も同じ Schrödinger 方程式を満たすのでその Wronskian は定数になるが，（4）より計算出来て

$$\begin{cases} f_+'(x,k)f_+(x,-k) - f_+(x,k)f_+'(x,-k) = ike^{ikx}e^{-ikx} + ike^{ikx}e^{-ikx} = 2ik \\ f_-'(x,k)f_-(x,-k) - f_-(x,k)f_-'(x,-k) = -ike^{-ikx}e^{ikx} - ike^{-ikx}e^{ikx} = -2ik \end{cases} \tag{6}$$

となる．したがって $k \neq 0$ に対しては $\{f_+(x,k), f_+(x,-k)\}$，$\{f_-(x,k), f_-(x,-k)\}$ は一次独立になる．したがって，ある関数 $a(k)$，$b(k)$ が存在して

$$\begin{cases} f_+(x,k) = a(k)\, f_-(x,-k) + b(k) f_-(x,k) \\ f_-(x,k) = a(k)\, f_+(x,-k) - b(-k) f_+(x,k) \end{cases} \tag{7}$$

となる．一方，（6）より

$$\begin{cases} f_-'(x,k)f_+(x,k) - f_-(x,k)f_+'(x,k) = -2ika(k) \\ f_-'(x,k)f_+(x,-k) - f_-(x,k)f_+'(x,-k) = -2ikb(-k) \end{cases} \tag{8}$$

となる．（8）の一式の左辺は k について上半平面 $\mathbb{C}_+$ で正則であるので $a(k)$ は $\mathbb{C}_+$ まで解析接続でき，$\overline{\mathbb{C}_+} \setminus \{0\}$ で連続である．性質

$$\overline{a(k)} = a(-k), \quad \overline{b(k)} = b(-k)$$

は容易にわかる．(7) 式より

$$
\begin{aligned}
f_+(x,k) &= a\,(k)\,(a\,(-k)\,f_+(x,k) - b(k)f_+(x,-k)) + b\,(k)\,(a\,(k)\,f_+(x,-k) - b(-k)f_+(x,k)) \\
&= \left(|a\,(k)|^2 - |b\,(k)|^2\right) f_+(x,k)
\end{aligned}
$$

となり

$$
|a\,(k)|^2 = 1 + |b\,(k)|^2 \tag{9}
$$

を得る．

ここで $\zeta_0 \in \mathbb{C}_+$ で $a\,(\zeta_0) = 0$ としよう．(8) 式より $f_\pm(x,\zeta_0)$ は一次従属になる．漸近式（4）より，$f_\pm(x,\zeta_0)$ はそれぞれ $\mathbb{R}_\pm$ で指数関数的に減少するので，$f_+(x,\zeta_0) \in L^2\,(\mathbb{R})$ となり，$f_+(x,\zeta_0)$ は Schrödinger 作用素 $L = -\partial_x^2 + u$ の固有関数になり，ζ_0^2 は固有値になる．したがって ζ_0 は純虚数でなければならない．そのとき固有値 ζ_0^2 は負になる．$a\,(\zeta)$ の表現（8）と $f_\pm(x,\zeta)$ を定める積分方程式（5）の評価により

$$
\begin{cases}
a\,(\zeta) = 1 + O\left(|\zeta|^{-1}\right) \\
b\,(k) = O\left(|k|^{-1}\right)
\end{cases}
$$

がわかるので，$a\,(\zeta)$ の零点は $i\infty$ には集積しない．実はここまでの議論は u が

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |u\,(x)|\,dx < \infty
$$

を満たせばすべて成立する．（3）は $a\,(\zeta)$ が原点 0 まで連続に拡張できるために必要である．実際，条件（3）の下で，積分方程式（5）において $\zeta \to 0$ とすることが可能であり，$f_+\,(x,0)$ は

$$
f_+\,(x,0) = 1 - \int_x^{\infty} (x-y)\,u\,(y)\,f_+\,(y,0)\,dy
$$

の解として定まる．$f_-\,(x,0)$ も同様である．したがって，もし $a\,(\zeta)$ が $a\,(i\eta_n) = 0$ で，$\eta_n > 0$ かつ $\eta_n \to 0$ となる零点 $\{i\eta_n\}_{n\geq 1}$ を持てば $a(0) = 0$ となる．しかし（9）より $|a(k)| \geq 1$ であるから，これは矛盾である．したがって $a\,(\zeta)$ は，条件（3）の下で 0 に集積する零点も持たない．つまり $a\,(\zeta)$ の $\mathbb{C}_+$ での零点はすべて純虚数であり，有限個である．それらを $\left\{i\eta_j\right\}_{1\leq j\leq n}$ とすると，$\left\{-\eta_j^2\right\}_{1\leq j\leq n}$ は $L = -\partial_x^2 + u$ の**負の固有値**になる．ここで

$$
m_j = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_+(x,i\eta_j)^2 dx\right)^{-1} > 0
$$

とする．m_j は**正規化係数**と呼ばれている．さらに

$$
r\,(k) = -\frac{b\,(-k)}{a\,(k)} \qquad ((9)\text{ より } |r\,(k)| < 1)
$$

とおき，**（右）反射係数**と呼ぶ．その理由は

$$
\frac{1}{a(k)} f_-(x,k) \sim \begin{cases}
e^{-ikx} + r\,(k)\,e^{ikx}, & x \to +\infty \\
\dfrac{1}{a(k)} e^{-ikx}, & x \to -\infty
\end{cases}
$$

となるからである．$a(k)^{-1}$ は**透過係数**と呼ばれている．つまり波 e^{-ikx} が局所的なポテンシャル u により反射される割合，透過する割合を表している．３つ組

$$
\left\{r\,(k)\,,\,\left\{\eta_j\right\}_{1\leq j\leq n}\,,\,\left\{m_j\right\}_{1\leq j\leq n}\right\} \tag{10}
$$

は $L=-\partial_x^2+u$ の**散乱データ**と呼ばれている．もう少し詳しい考察により L の負の固有値はこれがすべてであり，単純であることがわかっている．L の $[0,\infty)$ でのスペクトルは，ζ が実数 k のときの $f_\pm(x,k)$ の $x\to\pm\infty$ での挙動（4）より，隙間のない連続スペクトル（実際は絶対連続スペクトル）になっている．

■散乱の逆問題　散乱理論によりポテンシャル u に対して散乱データ $\left\{r(k), \{\eta_j\}_{1\le j\le n}, \{m_j\}_{1\le j\le n}\right\}$ が定まった．次に問題となるのは散乱データからポテンシャル u の復元の方法である．これに解答を与えたのは Marchenko(1955) である．それより数年前に Gelfand-Levitan は必ずしも減衰しないポテンシャルに対しても定義できるスペクトル関数からポテンシャルを復元するアルゴリズムを示している．ここではポテンシャル構成の道筋のみ説明する．詳細は小谷・俣野 [KM] を参照していただきたい．

散乱データより

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k)\,e^{2ikx}dk+2\sum_{j=1}^{n} m_j e^{-2\eta_j x}$$

と置くと

$$\int_0^\infty |F(x)|\,dx+\int_0^\infty (1+x)\,|F'(x)|\,dx<\infty$$

であることがわかる．そこで，各 $x\in\mathbb{R}$ に対して与えられた $F(x)$ により $r,s>0$ の 2 変数関数 $F(x+r+s)$ を積分核とする積分方程式

$$K(x,r)+F(x+r)+\int_0^\infty F(x+r+s)K(x,s)ds=0 \tag{11}$$

を考えると，その解 $K(x,r)$ が一意的に定まる．これによりポテンシャル u は

$$u(x)=-\partial_x K(x,0)$$

で与えられる．積分方程式（11）は **Marchenko 方程式**（あるいは Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式）と呼ばれている．Dyson は u の F によるより直接的な表示

$$u(x)=-2\partial_x^2\log\det\left(I+F_x\right) \tag{12}$$

を与えている．ここで積分作用素 F_x は

$$F_x f(r)=\int_0^\infty F(x+r+s)f(s)\,ds$$

で $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上に定義される．

■KdV 方程式の散乱理論による解法　KdV 方程式の解 $u(x,t)$ が x について条件（3）を満たすとしよう．このとき散乱データは t に依存し $\left\{r(k,t), \{\eta_j(t)\}_{1\le j\le n}, \{m_j(t)\}_{1\le j\le n}\right\}$ となる．n も t に依存する可能性は残るが，のちに t に無関係ということがわかる．$L(t)$ に対する Jost 解を $f_\pm(x,\zeta,t)$ とすると，Schrödinger 方程式

$$-\partial_x^2 f_\pm(x,\zeta,t)+u(x,t)f_\pm(x,\zeta,t)=\zeta^2 f_\pm(x,\zeta,t)$$

において両辺を t で微分すると

$$L(t)\left(\partial_t f_\pm(x,\zeta,t)\right)+\left(\partial_t u(x,t)\right)f_\pm(x,\zeta,t)=\zeta^2\partial_t f_\pm(x,\zeta,t)$$

となるが，Lax の関係式（2）により

$$\left(L(t)-\zeta^2\right)\left(\partial_t f_\pm+A(t)f_\pm\right)=0$$

を得る．一方，解 $u(x,t)$ が x について微分も含めて $x\to\pm\infty$ で 0 に収束しているとすると，漸近式（4）により

$$\left\{\begin{array}{ll}\partial_t f_+(x,\zeta,t)+A(t)f_+(x,\zeta,t)=4(i\zeta)^3e^{i\zeta x}+o\left(e^{i\zeta x}\right), & x\to+\infty\\ \partial_t f_-(x,\zeta,t)+A(t)f_-(x,\zeta,t)=4(-i\zeta)^3e^{-i\zeta x}+o\left(e^{-i\zeta x}\right), & x\to-\infty\end{array}\right.$$

がわかる．したがって Jost 解の一意性より

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t f_+ + A(t)f_+ = 4(i\zeta)^3 f_+\\ \partial_t f_- + A(t)f_- = 4(-i\zeta)^3 f_-\end{array}\right. \tag{13}$$

を得る．ここで $a(\zeta,t)$ の t ー依存性を調べよう．（7）の第 1 式を t で微分し，（13）を代入すると

$$\begin{aligned}&4(ik)^3 f_+ - A(t)f_+\\ &=\partial_t f_+\\ &=f_-(x,-k,t)\partial_t a+f_-(x,k,t)\left(\partial_t b-8(ik)^3b\right)+\left(4(ik)^3-A(t)\right)f_+(x,k,t)\end{aligned}$$

となるので

$$f_-(x,-k,t)\partial_t a+f_-(x,k,t)\left(\partial_t b-8(ik)^3b\right)=0$$

が成り立つ．$f_-(x,-k,t)$，$f_-(x,k,t)$ は x の関数として一次独立なので

$$\partial_t a=0,\qquad \partial_t b-8(ik)^3b=0$$

を得る．したがって

$$a(k,t)=a(k,0),\qquad b(k,t)=b(k,0)e^{8(ik)^3t}$$

がわかる．これより $a(\zeta,t)=a(\zeta,0)$ となるので，$L(t)$ に関する散乱データで n は時間 t に依存せず

$$\left\{\begin{array}{l}r(k,t)=-\dfrac{b(-k,t)}{a(k,t)}=r(k,0)e^{8(ik)^3t}\\ \eta_j(t)=\eta_j(0),\qquad 1\le j\le n\end{array}\right.$$

となる．$m_j(t)$ に関しては，（13）と部分積分により

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}f_+(x,i\eta_j,t)^2dx=-8\eta_j^3\int_{-\infty}^{\infty}f_+(x,i\eta_j,t)^2dx$$

がわかり

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_+(x,i\eta_j,t)^2dx=e^{-8\eta_j^3t}\int_{-\infty}^{\infty}f_+(x,i\eta_j,0)^2dx$$

となる．したがって

$$m_j(t)=m_j(0)e^{8\eta_j^3t}$$

を得る．まとめると

$$\left\{\begin{array}{l}r(k,t)=r(k,0)e^{8(ik)^3t}\\ \eta_j(t)=\eta_j(0),\qquad 1\le j\le n\\ m_j(t)=m_j(0)e^{8\eta_j^3t},\qquad 1\le j\le n\end{array}\right. \tag{14}$$

このように散乱データの時間発展は単純に記述できる．あとはこの新しい散乱データをもとにポテンシャルを（12）により構成すれば KdV 方程式の解が作れたことになる．実際

$$F(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)e^{8(ik)^3t+2ikx}dk+2\sum_{j=1}^{n}m_je^{8\eta_j^3t-2\eta_jx} \tag{15}$$

とおき，$x, t \in \mathbb{R}$ に対して $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上の積分作用素 $F_{x,t}$ を

$$F_{x,t} f(r) = \int_0^\infty F(x+r+s, t) f(s)\, ds$$

で定めると

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \log\det(I + F_{x,t}) \tag{16}$$

が KdV 方程式の解を与える．

このように一応閉じた形で解が表示できたが，（16）の行列式の計算は容易ではない．簡単に行列式が計算できる場合として**無反射ポテンシャル**がある．これは反射係数 $r(k)$ が恒等的に 0 になる場合である．このとき（15）の $F(x,t)$ は

$$F(x,t) = 2\sum_{j=1}^n m_j e^{8\eta_j^3 t - 2\eta_j x}$$

となる．したがって，$a_j = 2m_j e^{8\eta_j^3 t - 2\eta_j x}$，$e_j(s) = e^{-2\eta_j s}$ とおくと

$$\begin{aligned} F_{x,t} f(r) &= \int_0^\infty 2\sum_{j=1}^n m_j e^{8\eta_j^3 t - 2\eta_j(x+r+s)} f(s)\, ds \\ &= \sum_{j=1}^n a_j (f, e_j)\, e_j(r) \end{aligned}$$

となるので，$L^2(\mathbb{R}_+)$ の一次独立な元 $\{e_j(s)\}_{1\le j\le n}$ を下に $\det(I + F_{x,t})$ を計算すると

$$\begin{aligned} \det(I + F_{x,t}) &= \det\left(I + (a_j(e_i, e_j))_{1\le i,j\le n}\right) \\ &= \det\left(I + \left(\left(\sqrt{a_i}e_i, \sqrt{a_j}e_j\right)\right)_{1\le i,j\le n}\right) \\ &= \det\left(I + \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}}{\eta_i + \eta_j} e^{4\left(\eta_i^3 + \eta_j^3\right)t - \left(\eta_i + \eta_j\right)x}\right)_{1\le i,j\le n}\right) \end{aligned}$$

を得，結局

$$u(x,t) = -2\partial_x^2 \log\det\left(I + \left(\frac{\sqrt{m_i m_j}}{\eta_i + \eta_j} e^{4\left(\eta_i^3 + \eta_j^3\right)t - \left(\eta_i + \eta_j\right)x}\right)_{1\le i,j\le n}\right) \tag{17}$$

と表現できる．$n = 1$ のときには（1）で得た孤立波解に一致する．$n \ge 2$ のときには Zabusky-Kruskal の計算機実験と一致する結果もこの表示より得られる．つまり，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| u(x,t) - \sum_{j=1}^n s\left(x - 4\eta_j^2 t - \delta_j^\pm; 4\eta_j^2\right) \right| \to 0 \quad t \to \pm\infty \tag{18}$$

$$\delta_j^\pm = \frac{1}{2\eta_j} \log\frac{m_j}{2\eta_j} + \frac{1}{\eta_j} \sum_{\pm(l-j)>0} \log\frac{\eta_j - \eta_l}{\eta_j + \eta_l}$$

となる．但し $0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_n$ としている．解（17）は **n-soliton 解**と呼ばれている．

■時間無限大での挙動　このように急減少する初期値に関しては KdV 方程式の解は構成的に表示できる．また n-soliton 解については時間無限大での漸近挙動もわかっている．それでは一般の急減少解について時間無限大での挙動はどうなるか興味のあるところである．これについては非常に多くの研究者により結果が出ている．注目すべき点は時空領域 (t,x) のどこに位置するかにより漸近挙動が異なることである．

(i)　soliton 領域：ある $\epsilon > 0$ に対して　$\{\pm(x,t)\ ;\quad x,t>0,\quad x>\epsilon t\}$

$$\sup_{\pm x > \pm\epsilon t}\left|u(x,t)-\sum_{j=1}^{n} s\left(x-4\eta_j^2 t-\delta_j^{\pm};4\eta_j^2\right)\right| \to 0,\qquad t\to\pm\infty\qquad \text{（田中 [T]）}$$

(ii) 自己相似領域：ある $C>0$ に対して $\left|x/(3t)^{1/3}\right| < C.$　　この領域では解 u は PainléveII の超越函数で近似される（Segur-Ablowitz[SA]).

(iii) 無衝突衝撃領域：　$x<0,\ C^{-1} < -x/(3t)^{1/3}(\log t)^{2/3} < C.$　　この領域では楕円関数を使って近似できる（Segur-Ablowitz[SA]).

(iv) 相似領域：$x/t < -C.$　この領域では解は三角関数を含む函数で近似される ([GT] 参照).

以上の場合の解析の手段としては，積分方程式（11）のほかに，Riemann-Hilbert 問題として u を求める方法がある．これについては [GT] を参照してほしい．

2.1.2　周期解，代数幾何的準周期解

周期的な初期値を持つ KdV 方程式の解の存在および一意性の問題は多くの研究者の仕事がある．これもスペクトル不変性を利用した方法と，関数解析的・Fourier 解析的方法の 2 種類がある．ここでは最良の結果のみを挙げておこう．

T. Kappeler, P. Topalov (2006)　KdV 方程式は $H^s(\mathbb{T})$　（$s\geq -1$）で一意的に可解である．

この方法は KdV 方程式のスペクトル保存性を利用し，KdV 方程式を無限次元の可積分 Hamilton 力学系としてとらえ，その作用・角変数をスペクトル量を使って書き表すという方法である．これによると周期的 Gaussian white noise の見本は $H^s(\mathbb{T})$　（$s<-1/2$）に入っているので，周期的な Gaussian white noise を初期関数にして KdV 方程式は解けることになる．

逆に周期的で解析的な解として，対応する Schrödinger 作用素のスペクトルが有限個の区間からなっているときの KdV 方程式の解がある．これはスペクトルから構成される compact Riemann 面の $\theta-$ 関数（$\mathbb{T}^n$ 上の解析関数）を使い

$$u(x,t) = c - 2\partial_x^2 \log\theta\left(x\boldsymbol{\kappa}_1 + t\boldsymbol{\kappa}_2 + \boldsymbol{\omega}\right)$$

と表される．これは KdV 方程式の研究が隆盛を極めた 1970 年代の結果であり，Novikov,Dubrovin,McKean,$\cdots$ が貢献した．

2.2　関数解析的・Fourier 解析的方法

この場合には次の美しい結果がある．

J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao（2003）　KdV 方程式は
$H^s(\mathbb{R})$（$s > -\dfrac{3}{4}$）　および　$H^s(\mathbb{T})$　（$s\geq -\dfrac{1}{2}$）で一意的に可解である．

後に，この結果は次のように拡張された．

N. Kishimoto (2009) KdV 方程式は $H^s(\mathbb{R})$ （$s \geq -\dfrac{3}{4}$） および $H^s(\mathbb{T})$ （$s \geq -\dfrac{3}{4}$）で一意的に可解である．

彼らは Bourgain によって作られた Fourier 制限法を巧みに用いて証明している．$H^s(\mathbb{T})$ の場合の結果は前節の T. Kappeler, P. Topalov の結果より少し悪い結果であるが，比較のために入れておいた．これを見ても関数解析的・Fourier 解析的方法が汎用性はあるものの鋭い結果を得るにはスペクトル不変性を利用したほうがよいことがわかるであろう．但し，いずれの結果も周期的な Gaussian white noise を初期値にすることが可能であることを示している．

3 佐藤理論の拡張による解法：エルゴード的な初期値の場合

佐藤幹夫は広田の方法を分析し，KdV 方程式の解が無限次元グラスマン多様体上の力学系として実現できることを示した．その解析的な改訂版が Segal-Wilson[SW] によって発表され，超越的な解も構成できるようになった．我々の目標はできるだけ一般のエルゴード的な初期値に対して解を構成することであるが，この佐藤の方法は，減少解，周期解いずれも含んだ包括的な性格を持っているので，この方法をできるだけ拡張することが出来れば目標を達成できる可能性がある．この節ではその一つの拡張を紹介する．

まず Segal-Wilson 流に佐藤理論を説明し，そのあと拡張に必要な Schrödinger 作用素のスペクトルに関するいくつかの用語・概念を準備し，拡張の基礎定理を述べる．エルゴード的な初期値がこの基礎定理の条件を満たすことを示すことによって解を構成する．最終目標に達するまでの道程はかなり長いので，証明の詳細を述べることはせず，読者をできるだけ納得させることを指針に議論を進める．

3.1 佐藤-Segal-Wilson の方法

■Grassmann 多様体と群の作用 Segal-Wilson は佐藤の Grassmann 多様体を複素平面の円周上の L^2 空間の中に実現した．それから説明しよう．

$r > 0$ に対して複素平面上の原点が中心，半径 r の円周 $\{|z| = r\}$ 上の L^2 を H とする．つまり $H = L^2(|z| = r)$ とする．H の 2 つの閉部分空間 $H_\pm$ を

$$H_+ = \text{線形閉包}\{z^n, n = 0, 1, 2, \cdots\}, \quad H_- = \text{線形閉包}\{z^n, n = -1, -2, \cdots\}$$

とすると

$$H = H_+ \oplus H_- \quad \text{（直交和）}$$

である．H_+ の元は円板 $\{|z| < r\}$ に正則に拡張されるし，H_- の元は円板の外 $\{|z| > r\}$ に正則に拡張される．H_+ は円板 $\{|z| < r\}$ 上の Hardy 空間と呼ばれる．H から $H_\pm$ への直交射影をそれぞれ $\mathfrak{p}_\pm$ とする．H の閉部分空間 W に対して次の性質を課す．

定義 1 $Gr^{(2)}$ は次の条件を満たす H の閉部分空間 W 全体である．
(i) $f \in W \Longrightarrow z^2 f \in W$
(ii) $\mathfrak{p}_+ : W \to H_+$ は 1 対 1 かつ全射

$Gr^{(2)}$ が我々の対象とする無限次元 Grassmann 多様体である．パラメータ z は Schrödinger 作用素のスペクトルパラメータの働きをするので，性質 (i) は Schrödinger 作用素が 2 階の微分作用素であることに対応し

ている．W を解析するために，(i) に注意して H を偶関数と奇関数の空間に分解する．つまり

$$H \ni f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^n$$

に対して

$$\left\{\begin{array}{l} f_e(z) = \dfrac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{2n} z^n \\ f_o(z) = \dfrac{f(\sqrt{z}) - f(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{2n+1} z^n \end{array}\right.$$

とおき

$$\boldsymbol{H} = L^2\left(|z| = r^2\right) \times L^2\left(|z| = r^2\right)$$

とすると，自然な対応

$$H \ni f \to \begin{pmatrix} f_e \\ f_o \end{pmatrix} \in \boldsymbol{H}$$

により，H と $\boldsymbol{H}$ は unitary 同値になる．$\boldsymbol{H}_\pm$ も $H_\pm$ と同様に定義できる．$\boldsymbol{H}_\pm$ への直交射影は同じ記号 $\mathfrak{p}_\pm$ を使って表す．$W \in Gr^{(2)}$ の $\boldsymbol{H}$ への像 $\boldsymbol{W}$ は以下の性質を持つ．

(i)’ $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W} \Longrightarrow z\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}$
(ii)’ $\mathfrak{p}_+ : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{H}_+$ は 1 対 1 かつ全射

(i)’,(ii)’ を満たす $\boldsymbol{H}$ の閉部分空間全体を $\boldsymbol{Gr}^{(2)}$ とする．この対応を利用して $W \in Gr^{(2)}$ の例を挙げよう．$\{|z| = r\}$ 上の連続関数 $m(z)$ に対して

$$W_m = \left\{\varphi\left(z^2\right) + m(z)\psi\left(z^2\right) \; ; \quad \varphi, \psi \in H_+\left(|z| = r^2\right)\right\} \tag{19}$$

とおく．ただし $H_+\left(|z| = r^2\right)$ は円板 $\left\{|z| < r^2\right\}$ 上の Hardy 空間である．このとき

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & m_e(z) \\ 0 & m_o(z) \end{pmatrix} \tag{20}$$

とすると

$$\boldsymbol{W}_m = \left\{\begin{pmatrix} \varphi(z) + m_e(z)\psi(z) \\ m_o(z)\psi(z) \end{pmatrix} \; ; \quad \varphi, \psi \in H_+\left(|z| = r^2\right)\right\} = A(z)\boldsymbol{H}_+$$

となる．$W_m \in Gr^{(2)}$ となるための m の十分条件を示すために用語と補題を用意する．$\left\{|z| = r^2\right\}$ 上の有界な関数 $a(z)$ に対して $H_+\left(|z| = r^2\right)$ 上の有界作用素 $T(a)$ を

$$T(a)f = \mathfrak{p}_+(af)$$

で定める．$T(a)$ は a を表象とする **Toeplitz 作用素**と呼ばれている．有界な行列値関数 $A(z)$ に対しても

$$T(A)\boldsymbol{f} = \mathfrak{p}_+(A\boldsymbol{f})$$

により Toeplitz 作用素が定義される．(20) の $A(z)$ に対して $T(m_o)$ の逆 $T(m_o)^{-1}$ が存在すれば $T(A)$ の逆 $T(A)^{-1}$ も存在し

$$T(A)^{-1} = \begin{pmatrix} I & -T(m_e)\,T(m_o)^{-1} \\ 0 & T(m_o)^{-1} \end{pmatrix} \tag{21}$$

となることは容易にわかる．$T(a)$ が逆作用素を持つための十分条件を述べよう．

補題 2 $\left\{|z|=r^2\right\}$ 上の連続関数 $a(z)$ が条件

$$\begin{cases} a(z)-1 \in H_-\left(|z|=r^2\right) \\ a(z) \neq 0, \quad \forall z \in \left\{|z| \geq r^2\right\} \end{cases} \tag{22}$$

を満たすなら，$T(a)$ は逆 $T(a)^{-1}$ を持ち，$T(a)^{-1}=T(a^{-1})$ となる．

証明. （22）より a による掛け算作用素は $H_-\left(|z|=r^2\right)$ 上の全単射になる．したがって

$$a(z)u(z)=f_+(z)+f_-(z), \qquad u \in H_+\left(|z|=r^2\right), f_\pm \in H_\pm\left(|z|=r^2\right)$$

とすると，$f_+=T(a)u$ であり

$$u=a^{-1}f_+ + a^{-1}f_- = \mathfrak{p}_+\left(a^{-1}f_+\right)=T\left(a^{-1}\right)f_+ = T\left(a^{-1}\right)T\left(a\right)u$$

となるので，$T\left(a^{-1}\right)T\left(a\right)=I$ が成り立つ．同様に $T\left(a\right)T\left(a^{-1}\right)=I$ もわかるので $T\left(a\right)^{-1}=T\left(a^{-1}\right)$ となる．■

例 3 $\{|z|=r\}$ 上の連続関数 $m(z)$ が条件

$$\begin{cases} m(z)-z \in H_- \\ m_o(z) \neq 0, \quad \forall z \in \left\{|z| \geq r^2\right\} \end{cases} \tag{23}$$

を満たすとすると，$W_m \in Gr^{(2)}$ である．

証明. $m_e(z)$，$m_o(z)$ は $\left\{|z|=r^2\right\}$ 上の連続関数であるので（20）の行列 $A(z)$ も連続である．$m_o(z) \neq 0$ ならばその逆行列が連続な行列として存在し，$\boldsymbol{W}_m$ は $\boldsymbol{H}$ の閉部分空間になる．性質 (i)' は容易に確かめられる．性質 (ii)' を確かめよう．（23）より

$$m_e, \qquad m_o-1 \in H_-\left(|z|=r^2\right) \tag{24}$$

である．そこで $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}_+$ に対して方程式

$$\mathfrak{p}_+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_m$$

を考える．$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_m$ なので，ある $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{H}_+$ に対して $\boldsymbol{u}(z)=A(z)\boldsymbol{\varphi}(z)$ となる．したがって上の方程式は

$$T(A)\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{f}$$

となる．$T(A)$ の逆が存在するための条件は $T(m_o)$ の逆が存在することであるが，条件（23）の下では m_o は条件（22）を満たすので，$\boldsymbol{W}_m$ に対して性質 (ii)' が確かめられる．■

$m(z)=z$ のときには $W_m=H_+$ となり，$W_m \in Gr^{(2)}$ は明らかである．この例では m がある意味で z に近い場合にも $W_m \in Gr^{(2)}$ となることを示している．

さて

$$\Gamma=\left\{g=e^h\,; \quad h \text{ は } \{|z| \leq r\} \text{ の近傍で正則}\right\} \tag{25}$$

とすると，$g \in \Gamma$ と H の閉部分空間 W に対して，H の新しい閉部分空間 gW ができる．これは性質 (i) を満たすが，性質 (ii) は必ずしも満たされるとは限らない．この Γ の作用を記述するものとして $\tau-$ 関数が重要であるが，これについては次節で説明する．ここでは $Gr^{(2)}$ と Schrödinger 方程式，KdV 方程式との関係を述べておこう．

x をパラメータとして（x は複素数でもよい）ある $W \in Gr^{(2)}$ に対して

$$e^{xz}W \in Gr^{(2)}, \quad x \in I$$

が，原点を含むある区間 I に属する x に対して成り立っているとする．I が十分小さい区間なら，この性質は成り立っている．$e^{xz}W$ に対する性質 (ii) より，各 $x \in I$ に対してある $f(x,z) \in W$ が存在して，z の関数として

$$e^{xz} f(x,z) \in 1 + H_-$$

となる．つまり，$e^{xz}f(x,z)$ は $1 \in H_+$ に対応する $e^{xz}W$ の元である．任意の H_- の元は $z=\infty$ のまわりの Taylor 展開をもつので，ある関数列 $\{c_k(x)\}_{k\geq 1}$ により

$$f(x,z) = e^{-xz}\left(1 + \frac{c_1(x)}{z} + \frac{c_2(x)}{z^2} + \frac{c_3(x)}{z^3} + \cdots\right) \tag{26}$$

と表される．x について微分をとると

$$\begin{cases} f'(x,z) = -ze^{-xz}\left(1 + \sum_{k\geq 1}\dfrac{c_k(x)}{z^k}\right) + e^{-xz}\sum_{k\geq 1}\dfrac{c'_k(x)}{z^k} \\ f''(x,z) = z^2 f(x,z) - 2ze^{-xz}\sum_{k\geq 1}\dfrac{c'_k(x)}{z^k} + e^{-xz}\sum_{k\geq 1}\dfrac{c''_k(x)}{z^k} \end{cases}$$

となるので，f, f', f'' の適当な線形結合により以下のように H_- の元を分離する．

$$\begin{aligned} &e^{xz}\left(f''(x,z) - z^2 f(x,z) + 2c'_1(x) f(x,z)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(c''_k(x) - 2c'_{k+1}(x) + 2c'_1(x)c_k(x)\right)\frac{1}{z^k} \end{aligned}$$

W の線形性より $f''(x,z)$ は z の関数として W に属することに注意すれば，性質 (i) より左辺は $e^{xz}W$ に属することがわかる．一方，右辺は H_- の元であるので，$e^{xz}W$ に対する性質 (ii) より

$$\begin{cases} f''(x,z) + 2c'_1(x) f(x,z) - z^2 f(x,z) = 0 \\ c''_k(x) - 2c'_{k+1}(x) + 2c'_1(x)c_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{27}$$

を得る．したがって

$$u(x) = -2c'_1(x) \tag{28}$$

と置けば，$f(x,z)$ は Schrödinger 方程式

$$-f''(x,z) + u(x)f(x,z) = -z^2 f(x,z)$$

を満たす．これにより $e^{xz}W \in Gr^{(2)}$ を満たす $W \in Gr^{(2)}$ からポテンシャル u が抽出できたことになる．

次に c を定数として作用 $e^{xz-ctz^3}W$ を計算してみよう．上と同様にして $f(x,t,z)$ を

$$e^{xz-ctz^3} f(z) \in 1 + H_-$$

を満たす W の唯一の元 f とし

$$\begin{cases} e^{xz-ctz^3} f(x,t,z) = 1 + u(x,t,z) \quad \exists u(x,t,z) \in H_- \\ u(x,t,z) = \dfrac{c_1(x,t)}{z} + \dfrac{c_2(x,t)}{z^2} + \dfrac{c_3(x,t)}{z^3} + \cdots \end{cases}$$

とする．$'$ は x についての微分を表すとして，$e^{-xz+ctz^3}(1+u)$ を t,x について微分すると

$$\begin{cases} e^{xz-ctz^3}\partial_t f = cz^3(1+u)+\partial_t u \\ e^{xz-ctz^3}f' = -z(1+u)+u' \\ e^{xz-ctz^3}f''' = -z^3(1+u)+3z^2u'-3zu''+u''' \end{cases} \tag{29}$$

となる．以下の計算では H_-modulo で考え，H_+ 成分を $\partial_t f$，f'，f''' の適当な線形結合により消去していく．まず z^3 の項を消去するため

$$e^{xz-ctz^3}(\partial_t f + cf''') = \partial_t u + 3cz^2u' - 3czu'' + cu'''$$

とすると，右辺の z の関数として H_+ に属する部分は

$$3cc_1'z + 3cc_2' - 3cc_1''$$

となるので，次に $3cc_1'z$ を消すために $e^{xz-ctz^3}f'$ を使うと

$$e^{xz-ctz^3}(\partial_t f + cf''' + 3cc_1'f') = \partial_t u + 3cz^2u' - 3czu'' + cu''' - 3zcc_1'(1+u) + 3cc_1'u'$$

となる．右辺の H_+ 成分は

$$3c(c_2' - c_1'' - c_1'c_1)$$

であるので，この項を f を利用して消去すると

$$\begin{aligned} & e^{xz-ctz^3}(\partial_t f + cf''' + 3cc_1'f' - 3c(c_2'-c_1''-c_1'c_1)f) \\ & = \partial_t u + 3cz^2u' - 3czu'' + cu''' - 3zcc_1'(1+u) + 3cc_1'u' - 3c(c_2'-c_1''-c_1'c_1)(1+u) \end{aligned}$$

となり，右辺は H_- の元となる．しかしながら，左辺は $e^{xz-ctz^3}W$ の元なので，空間 $e^{xz-ctz^3}W$ に対する性質 (ii) より

$$e^{xz-ctz^3}(\partial_t f + cf''' + 3cc_1'f' - 3c(c_2'-c_1''-c_1'c_1)f) = 0$$

となり，同時に

$$\partial_t u + 3cz^2u' - 3czu'' + cu''' - 3zcc_1'(1+u) + 3u'cc_1' - 3c(c_2'-c_1''-c_1'c_1)(1+u) = 0$$

を得る．(29) を使い左辺の z^{-1} の係数を計算して

$$\partial_t c_1 + c\left\{3c_3' - 3c_2'' + c_1''' - 3c_1'c_2 + 3(c_1')^2 - 3(c_2'-c_1''-c_1'c_1)c_1\right\} = 0$$

を得る．t を固定すれば $e^{-ctz^3}f(x,t,z)$ は $e^{-ctz^3}W$ の元であるので，(27) の等式を利用でき

$$c_1'' - 2c_2' + 2c_1'c_1 = 0, \quad c_2'' - 2c_3' + 2c_1'c_2 = 0$$

となっているので，これより c_2'，c_3' を上式の $\{\cdot\}$ に代入すると

$$\begin{aligned} & 3c_3' - 3c_2'' + c_1''' - 3c_1'c_2 + 3(c_1')^2 - 3(c_2'-c_1''-c_1'c_1)c_1 \\ & = \frac{3}{2}(2c_1'c_2 + c_2'') - 3c_2'' + c_1''' - 3c_1'c_2 + 3(c_1')^2 - 3\left(c_1'c_1 + \frac{1}{2}c_1'' - c_1'' - c_1'c_1\right)c_1 \\ & = -\frac{3}{2}c_2'' + c_1''' + 3(c_1')^2 + \frac{3}{2}c_1c_1'' \\ & = -\frac{3}{4}\left(c_1''' + 2c_1''c_1 + 2(c_1')^2\right) + c_1''' + 3(c_1')^2 + \frac{3}{2}c_1c_1'' \\ & = \frac{1}{4}c_1''' + \frac{3}{2}(c_1')^2 \end{aligned}$$

を得る．結局

$$\partial_t c_1 + c\left(\frac{1}{4}c_1''' + \frac{3}{2}\left(c_1'\right)^2\right) = 0$$

となる．$u\left(x,t\right) = -2c_1'\left(x,t\right)$ とおき，上式を x で微分すると

$$\partial_t u + \frac{1}{4}cu''' - \frac{3}{2}cuu' = 0$$

となり，$c = 4$ とすれば KdV 方程式の解 u が求まったことになる．

これを一般化するとつぎのようになる．$g \in \mathit{\Gamma}$ に対して

$$e^{xz}g\left(z\right)W \in Gr^{(2)}$$

とし，$1 \in H_+$ に対応する $e^{xz}g\left(z\right)W$ の元を $e^{xz}g\left(z\right)f_g\left(x,z\right)$ とする．$f_g\left(x,z\right) \in W$ は $e^{xz}g\left(z\right)W$ に対する条件 (ii) より一意的に決まる．

$$e^{xz}g\left(z\right)f_g\left(x,z\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x,g)z^{-k}$$

と表しておき，この係数を使い

$$u_g\left(x\right) = -2\partial_x c_1(x,g)$$

とおく．$g(z) = 1$ のときの $u_g\left(x\right)$ を $u(x)$ とすれば，g を取り換えることにより $u_g\left(x\right)$ は

$$\begin{cases} g(z) = e^{az} \Longrightarrow u_g\left(x\right) = u(x+a) \\ g(z) = e^{-4tz^3} \Longrightarrow u_g\left(x\right) = u(x,t) \text{ は KdV 方程式を満たし}, u(x,0) = u(x) \end{cases}$$

となる．自然数 n に対して $g(z) = e^{cz^{2n}}$ のときには，性質 (i) より $gW = W$ となるので $Gr^{(2)}$ への作用としては恒等写像になる．したがって $g = e^h$ としたとき意味のある場合は n が奇数の場合である．高次の n をとることにより高次の KdV 方程式の解が出てくる仕組みになっている．この u_g により KdV 力学系を $K(g)u = u_g$ として定義したい．これを正当化するにはいくつかの段階を経る必要がある．問題点を挙げておこう．

[1]　$Gr^{(2)} \ni W$ とポテンシャル u の対応で異なる W が同じ u を与える場合の事情の解明

[2]　$Gr^{(2)} \ni W, \quad \mathit{\Gamma} \ni g \Longrightarrow gW \in Gr^{(2)}$ となる W のクラスの設定

[3]　広いクラスの初期値を扱うために $Gr^{(2)}$ の適当な拡張

以上までで佐藤理論の仕組みの本質的な部分の半分を述べたことになる．佐藤は上の空間 H ではなく形式的な微分演算 ∂_x の冪級数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \partial_x^n$$

の代数を考え，上に相当する演算を行っている．演算の途中で負冪の項は消去していく操作をしている．Segal-Wilson は擬微分作用素 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\partial_x^n$ の表象である $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ の空間で同等のことを実行したのであり，代数的には同じことである．しかし，後で見ることになるが，この Segal-Wilson の見直しにより Schrödinger 作用素のスペクトルとの関係が明確になり，さらなる拡張が可能になる．

記事 4 $Gr^{(2)}$ の定義で条件 (i) を仮定したが，これを除き条件 (ii) を少し弱くした Grassmann 多様体も考察の対象になることがある．例えば最近の SLE の研究ではこの空間が使われている．また条件 (i) を $z^3, z^4, \cdots$ の掛け算で不変な条件に置き換えると基礎となる方程式は 2 階，4 階，$\cdots$ の常微分方程式になり，異なるクラスの非線形方程式が生じる．

■$\tau-$ **関数**　$\tau-$ 関数に相当するものはあるクラスの非線形方程式の解を記述するものとして広田により考察され，広田は非線形方程式を $\tau-$ 関数の満たす方程式に置き換えたが，そのとき新しい演算である双線形微分を導入した．その後これは佐藤により $\tau-$ 関数と名付けられた．この節では $\tau-$ 関数を定義し，群 Γ の作用が $\tau-$ 関数を通じてどのように解析されるか説明する．後に見るようにすべての重要な量は $\tau-$ 関数で表現される．

まず $W \in Gr^{(2)}$ に対しては性質 (ii) より

$$W \ni f = f_+ + f_-, \qquad f_\pm \in H_\pm$$

とするとき，$W \ni f \to f_+ \in H_+$ は全単射なので，H_+ から H_- へのある有界作用素 A_W が存在し

$$W = \{f_+ + A_W f_+ ; \quad f_+ \in H_+\}$$

となる．これにより $g \in \Gamma$ に対して H_+ 上の作用素 R_W を

$$R_W(g) = g^{-1}\mathfrak{p}_+ g A_W \tag{30}$$

で定める．$R_W(g)$ は，g が $|z| = r$ 上なめらかなので，次の補題により trace クラスになる．τ**-関数**は

$$\tau_W(g) = \det(I + R_W(g)) \tag{31}$$

で定める．

補題 5 g_1，$g_2 \in \Gamma$ に対して $g^{-1}\mathfrak{p}_+ g$ を H_- から H_+ への作用素とみると，次の評価が成り立つ．$\|\cdot\|$ は H の L^2- ノルム．

$$\left\|g_1^{-1}\mathfrak{p}_+ g_1 - g_2^{-1}\mathfrak{p}_+ g_2\right\|_{\mathrm{trace}} \le 3r^{-1/2}\begin{pmatrix} \left\|g_1^{-1} - g_2^{-1}\right\|\left(\|g_1 - 1\| + r^2\|g_1''\|\right) \\ + \left\|g_2^{-1}\right\|\left(\|g_1 - g_2\| + r^2\|g_1'' - g_2''\|\right)\end{pmatrix}$$

特に $g_2 = 1$ とすれば $g_2^{-1}\mathfrak{p}_+ g_2 = 0$ なので，$g_1^{-1}\mathfrak{p}_+ g_1$ は trace クラスになる．

証明. $f \in H_-$ と $g_j \in H^2(|z| = r)$ に対して

$$f(z) = \sum_{n\ge1} f_n z^{-n}, \quad g_j(z) = \sum_{n\ge0} g_{jn} z^n$$

とおくと

$$\begin{aligned}&\partial_\theta(\mathfrak{p}_+ g_1 f - \mathfrak{p}_+ g_2 f)\left(re^{i\theta}\right) \\ &= i\sum_{m\ge1, n-m\ge0}(n-m)r^{n-m}(g_{1,n} - g_{2,n})f_m e^{i(n-m)\theta} = i\sum_{m\ge1} f_m \sum_{k\ge0} kr^k e^{ik\theta}(g_{1,k+m} - g_{2,k+m})\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}&\|(1+\partial_\theta)(\mathfrak{p}_+ g_1 - \mathfrak{p}_+ g_2)\|_{\mathrm{HS}}^2 \\ &= \sum_{m\ge1}\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|r^{m-1/2}\sum_{k\ge0}(1+ik)r^k e^{ik\theta}(g_{1,k+m} - g_{2,k+m})\right|^2 d\theta \\ &= \sum_{m\ge1}\sum_{k\ge m} r^{2k}\left(1 + (k-m)^2\right)|g_{1,k} - g_{2,k}|^2 \le \sum_{k\ge1} r^{2k}k^3|g_{1,k} - g_{2,k}|^2\end{aligned}$$

となる．ここで $\sum_{m=1}^{k}\left(1+(k-m)^2\right)\leq k^3$ を使った．最後の項は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 1} r^{2k}k^3\left|g_{1,k}-g_{2,k}\right|^2\\
&\leq\left|rg_{1,1}-rg_{2,1}\right|^2+2\sum_{k\geq 2}k^2(k-1)^2\left|r^kg_{1,k}-r^kg_{2,k}\right|^2\\
&\leq 2r^{-1}\left(\|g_1-g_2\|^2+r^4\|g_1''-g_2''\|^2\right)
\end{aligned}$$

と評価できる．また

$$\left\|(1+\partial_\theta)^{-1}\right\|_{\mathrm{HS}}^2=\sum_{k\geq 0}|1+ik|^{-2}\leq 1+\frac{\pi^2}{6}<4<\infty,$$

なので

$$\begin{aligned}
&\|\mathfrak{p}_+g_1-\mathfrak{p}_+g_2\|_{\mathrm{trace}}\\
&\leq\left\|(1+\partial_\theta)^{-1}\right\|_{\mathrm{HS}}\|(1+\partial_\theta)(\mathfrak{p}_+g_1-\mathfrak{p}_+g_2)\|_{\mathrm{HS}}\\
&\leq 2\sqrt{2}r^{-1/2}\left(\|g_1-g_2\|+r^2\|g_1''-g_2''\|\right)
\end{aligned}$$

となり，結局

$$\begin{aligned}
&\left\|g_1^{-1}\mathfrak{p}_+g_1-g_2^{-1}\mathfrak{p}_+g_2\right\|_{\mathrm{trace}}\\
&\leq\left\|g_1^{-1}-g_2^{-1}\right\|\|\mathfrak{p}_+g_1\|_{\mathrm{trace}}+\left\|g_2^{-1}\right\|\|\mathfrak{p}_+g_1-\mathfrak{p}_+g_2\|_{\mathrm{trace}}\\
&\leq 3r^{-1/2}\left(\begin{array}{c}\left\|g_1^{-1}-g_2^{-1}\right\|\left(\|g_1-1\|+r^2\|g_1''\|\right)\\+\left\|g_2^{-1}\right\|\left(\|g_1-g_2\|+r^2\|g_1''-g_2''\|\right)\end{array}\right)
\end{aligned}$$

となり補題は証明される． ■

次に $\tau_W(g)$ の性質を調べることになるが，そのために重要な補題を示しておこう．

補題 6 $\tau_W(g)\neq 0$ は $gW\in Gr^{(2)}$ となる必要十分条件である．このとき gW の $A-$ 作用素 A_{gW} は次に与えられる．

$$A_{gW}=\mathfrak{p}_-g^{-1}A_W\left(I+R_W(g)\right)^{-1}g$$

証明. $R_W(g)$ は trace クラスの作用素なので, $\ker\left(I+R_W(g)\right)=\{0\}$ と $\tau_W(g)\neq 0$ は同値であり，さらに逆作用素 $\left(I+R_W(g)\right)^{-1}$ の存在とも同値である．そこで $f\in\ker\left(I+R_W(g)\right)$ とすると，$gf+\mathfrak{p}_+(gA_Wf)=0$ となるので

$$\mathfrak{p}_-(gA_Wf)=gA_Wf-\mathfrak{p}_+(gA_Wf)=g(f+A_Wf)\in gW$$

となる．したがって $gW\in Gr^{(2)}$ とすれば， $\mathfrak{p}_-(gA_Wf)=0$ であり，上の関係より $f+A_Wf=0$ となるが，これは $f=0$ を意味する．この逆の主張については以下の A_{gW} の存在から自然に示される．そこで $\left(I+R_W(g)\right)^{-1}$ が存在するとして

$$B=\mathfrak{p}_-g^{-1}A_W\left(I+R_W(g)\right)^{-1}g$$

とおく．$f\in H_+$ に対して

$$\begin{aligned}
&g^{-1}(f+Bf)\\
&=g^{-1}f+g^{-1}\mathfrak{p}_-gA_W\left(I+R_W(g)\right)^{-1}g^{-1}f\\
&=g^{-1}f+A_W\left(I+R_W(g)\right)^{-1}g^{-1}f-R_W(g)\left(I+R_W(g)\right)^{-1}g^{-1}f\\
&=\left(I+R_W(g)\right)^{-1}g^{-1}f+A_W\left(I+R_W(g)\right)^{-1}g^{-1}f
\end{aligned}$$

が成り立つので，$g^{-1}(f+Bf)\in W$ および $gW\supset\{f+Bf;\ \ f\in H_+\}$ が成り立つ．したがって $u\in H_+$ に対して $f=g(I+R_W(g))\,u\in H_+$ とすると，$g^{-1}(f+Bf)=u+A_Wu\in W$ がわかる．したがって

$$gW=\{f+Bf;\ \ f\in H_+\}$$

となり，$gW\in Gr^{(2)}$ および $B=A_{gW}$ が示された. ■

これにより次の $\tau_W(g)$ に関する重要な命題が示される．

命題 7 $\tau_W(g)$ は次の性質を満たす．
(i) $g\in\Gamma$，$W\in Gr^{(2)}$ に対して $gW\in Gr^{(2)}$ と $\tau_W(g)\neq 0$ は同値．
(ii) $g_1,\,g_2\in\Gamma$, $W\in Gr^{(2)}$ に対して，もし $g_1W\in Gr^{(2)}$ (同じことであるが $\tau_W(g_1)\neq 0$）ならば

$$\tau_W(g_1g_2)=\tau_W(g_1)\,\tau_{g_1W}(g_2)\qquad(\textbf{cocycle property})$$

(iii) $g=e^h\in\Gamma$ に対して $g_1(z)=e^{h_e(z^2)}$, $g_2(z)=e^{zh_o(z^2)}$ とおくと

$$\tau_W(g)=\tau_W(g_1)\,\tau_W(g_2)$$

(iv) $\tau_W(g)$ は Sobolev H^2-ノルムに関して連続である．

証明. (i) は補題 6 で証明済みである．(ii) を示すために，$g_1W\in Gr^{(2)}$ を仮定すると，補題 6 より出る等式

$$\begin{aligned}(g_1g_2)\,A_W&=g_2\mathfrak{p}_+g_1A_W+g_2\mathfrak{p}_-g_1A_W\\&=g_2g_1R_W(g_1)+g_2A_{g_1W}g_1(I+R_W(g_1))\end{aligned}$$

より

$$\mathfrak{p}_+((g_1g_2)\,A_W)=g_2g_1R_W(g_1)+\mathfrak{p}_+(g_2A_{g_1W}g_1(I+R_W(g_1)))$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned}I+R_W(g_1g_2)&=I+R_W(g_1)+g_1^{-1}g_2^{-1}\mathfrak{p}_+(g_2A_{g_1W}g_1(I+R_W(g_1)))\\&=I+R_W(g_1)+g_1^{-1}R_{g_1W}(g_2)g_1(I+R_W(g_1))\\&=g_1^{-1}(I+R_{g_1W}(g_2))\,g_1(I+R_W(g_1))\end{aligned}$$

がわかる．したがって，もし $g_1W\in Gr^{(2)}$ ならば (ii) が出る．$g_1W=W$ となるので，(iii) は (ii) より直ちにしたがう．(iv) は補題 5 と行列式の trace ノルムに関する連続性より直ちにしたがう．■

次に $\tau-$ 関数を用いて W の一つの重要な関数を表示しよう．一番単純な $Gr^{(2)}$ の H_+ は $\{z^n\}_{n\geq 0}$ で生成される．一方，$\{z^n\}_{n\geq 0}$ は 2 つの元 $\{1,z\}$ に z^2 の掛け算を繰り返すことにより生成される．そこで $W\in Gr^{(2)}$ に対して

$$\varphi_W=A_W1,\qquad \psi_W=A_Wz\in H_-$$

とおくと，A_W の定義より

$$1+\varphi_W(z)\in W,\qquad z+\psi_W(z)\in W$$

であるが，W に対する条件 (i) と (ii) により

$$W=\text{線形閉包}\left\{z^{2n}(1+\varphi_W(z)),z^{2n}(z+\psi_W(z))\right\}_{n\geq 0}$$

が示される．したがって W は２つの関数 φ_W, ψ_W により定まっていることになり，これらは重要な関数である．まず φ_W と $\tau-$ 関数の関係を説明しよう．$|\zeta|>r$ を満たす複素数 ζ に対して，$\mathit{\Gamma}$ の元 q_ζ を

$$q_\zeta(z)=\left(1-z\zeta^{-1}\right)^{-1}$$

とする．$\mathit{\Gamma}$ の他の元は基本的には $q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}\cdots q_{\zeta_n}$ の形の極限で表されるので q_ζ は基本的な元である．$f\in H_-$ に対して $q_\zeta f$ を $H_-\oplus H_+$ に対応して分解すると

$$q_\zeta f(z)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-1}f(z)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-1}\left(f(z)-f(\zeta)\right)+\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-1}f(\zeta)$$

となるので

$$\left(q_\zeta^{-1}\mathfrak{p}_+q_\zeta f\right)(z)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-1}f(\zeta)=f(\zeta)$$

である．したがって, もし $W\in Gr^{(2)}$ ならば, $f\in H_+$ に対して $A_Wf\in H_-$ なので

$$\left(q_\zeta^{-1}\mathfrak{p}_+q_\zeta A_Wf\right)(z)=\left(A_Wf\right)(\zeta)=\left(A_Wf\right)(\zeta)\,1$$

となる．このことは作用素 $q_\zeta^{-1}\mathfrak{p}_+q_\zeta A_W$ が rank 1 の作用素であることを示しており，H_+ の元 1 を下に行列式を計算すると

$$\tau_W\left(q_\zeta\right)=\det\left(I+q_\zeta^{-1}\mathfrak{p}_+q_\zeta A_W\right)=1+\left(A_W1\right)(\zeta)=1+\varphi_W(\zeta) \tag{32}$$

となる．次に２つの ζ_1，ζ_2 に対して $\tau_W\left(q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}\right)$ を計算してみよう．$f\in H_-$ に対して

$$\begin{aligned}
q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}f(z)&=\left(1-\frac{z}{\zeta_2}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{\zeta_1}\right)^{-1}f(z)\\
&=\left(1-\frac{z}{\zeta_2}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{\zeta_1}\right)^{-1}\left(f(z)-f(\zeta_1)\right)+\left(1-\frac{z}{\zeta_2}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{\zeta_1}\right)^{-1}f(\zeta_1)\\
&=q_{\zeta_2}(z)\left\{q_{\zeta_1}(z)\left(f(z)-f(\zeta_1)\right)-q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(f(\zeta_2)-f(\zeta_1)\right)\right\}\\
&\quad+q_{\zeta_2}(z)\,q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(f(\zeta_2)-f(\zeta_1)\right)+q_{\zeta_2}(z)\,q_{\zeta_1}(z)\,f(\zeta_1)
\end{aligned}$$

と分解すると，第１項は H_- に，第２，３項は H_+ に属するので

$$\left(q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathfrak{p}_+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}f\right)(z)=q_{\zeta_1}^{-1}(z)\,q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(f(\zeta_2)-f(\zeta_1)\right)+f(\zeta_1)$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
\left(q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathfrak{p}_+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}A_Wf\right)(z)&=q_{\zeta_1}^{-1}(z)\,q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(A_Wf(\zeta_2)-A_Wf(\zeta_1)\right)+A_Wf(\zeta_1)\\
&=q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(A_Wf(\zeta_2)-A_Wf(\zeta_1)\right)+A_Wf(\zeta_1)\\
&\quad-\frac{z}{\zeta_1}q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(A_Wf(\zeta_2)-A_Wf(\zeta_1)\right)
\end{aligned}$$

となり，今度は $q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathfrak{p}_+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}A_W$ は rank2 の作用素になる．H_+ の２つの元 $\{1,z\}$ を下に行列式を計算すると

$$\begin{cases}
\left(q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathfrak{p}_+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}A_W1\right)(z)=q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(\varphi_W(\zeta_2)-\varphi_W(\zeta_1)\right)+\varphi_W(\zeta_1)\\
\qquad\qquad-\dfrac{z}{\zeta_1}q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(\varphi_W(\zeta_2)-\varphi_W(\zeta_1)\right)\\
\left(q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathfrak{p}_+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}A_Wz\right)(z)=q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(\psi_W(\zeta_2)-\psi_W(\zeta_1)\right)+\psi_W(\zeta_1)\\
\qquad\qquad-\dfrac{z}{\zeta_1}q_{\zeta_1}(\zeta_2)\left(\psi_W(\zeta_2)-\psi_W(\zeta_1)\right)
\end{cases}$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&\det\left(I+q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathfrak{p}_+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}A_W\right)\\
&=\det\begin{pmatrix} 1+q_{\zeta_1}(\zeta_2)(\varphi_W(\zeta_2)-\varphi_W(\zeta_1))+\varphi_W(\zeta_1) & -\dfrac{1}{\zeta_1}q_{\zeta_1}(\zeta_2)(\varphi_W(\zeta_2)-\varphi_W(\zeta_1)) \\ q_{\zeta_1}(\zeta_2)(\psi_W(\zeta_2)-\psi_W(\zeta_1))+\psi_W(\zeta_1) & 1-\dfrac{1}{\zeta_1}q_{\zeta_1}(\zeta_2)(\psi_W(\zeta_2)-\psi_W(\zeta_1)) \end{pmatrix}\\
&=(\zeta_1-\zeta_2)^{-1}\left((\zeta_1+\psi_W(\zeta_1))(1+\varphi_W(\zeta_2))-(\zeta_2+\psi_W(\zeta_2))(1+\varphi_W(\zeta_1))\right)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで後で重要になる関数である $m-$ 関数を導入する．$\varphi_W\in H_-$ であるので

$$\varphi_W(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{-n}$$

と展開できている．a_1 は W に依存しているので $a_1=a_1(W)$ とかき

$$m_W(z)=\frac{z+\psi_W(z)}{1+\varphi_W(z)}+a_1(W) \tag{33}$$

とおき，m_W を $W\in Gr^{(2)}$ の $m-$ **関数**と呼ぶ．定数 $a_1(W)$ を加えた理由は $m_W(z)-z$ が $z\to\infty$ で 0 に収束させたいためである．より正確には

$$m_W(z)=z+O\left(z^{-1}\right),\qquad z\to\infty \tag{34}$$

が成り立つ．例 3 の W_m に対しては，1，$m(z)\in W_m$ なので

$$\varphi_{W_m}(z)=0,\qquad z+\psi_{W_m}(z)=m(z),\qquad a_1(W_m)=0$$

となり，$m_W(z)=m(z)$ である．後ほどこの関数は Schrödinger 作用素の Weyl 関数と関係していることがわかる．さらに（28）で導入したポテンシャル u は m_W から定まっていることもわかる．前に戻ると，m_W により

$$\det\left(I+q_{\zeta_2}^{-1}q_{\zeta_1}^{-1}\mathfrak{p}_+q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}A_W\right)=(1+\varphi_W(\zeta_1))(1+\varphi_W(\zeta_2))\frac{m_W(\zeta_1)-m_W(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}$$

つまり

$$
\begin{aligned}
\tau_W\left(q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}\right)&=(1+\varphi_W(\zeta_1))(1+\varphi_W(\zeta_2))\frac{m_W(\zeta_1)-m_W(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\\
&=\tau_W\left(q_{\zeta_1}\right)\tau_W\left(q_{\zeta_2}\right)\frac{m_W(\zeta_1)-m_W(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}
\end{aligned} \tag{35}
$$

を得る．

ここで次の補題を証明を付けずに挙げておこう．$\tau_W(g)$ の連続性と $\lim_{\zeta\to\infty}q_\zeta=1$ となることより，$\lim_{\zeta\to\infty}\tau_W(q_\zeta)=\tau_W(1)=1$ となるので，$|\zeta|$ が十分大きければ $\tau_W(q_\zeta)\neq0$ となることを注意しておく．

補題 8 ([SK1])$W\in Gr^{(2)}$ とすると，$|\zeta|$ が十分大きければ次の等式が成立する．

$$m_{q_\zeta W}(z)=\frac{z^2-\zeta^2}{m_W(z)-m_W(\zeta)}-m_W(\zeta) \tag{36}$$

演算 d_ζ を

$$\left(d_\zeta m\right)(z)=\frac{z^2-\zeta^2}{m(z)-m(\zeta)}-m(\zeta)$$

で定めると，(36) より $m_{q_\zeta W}(z)=\left(d_\zeta m_W\right)(z)$ であるが

$$m_{q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}W}(z)=\left(d_{\zeta_1}m_{q_{\zeta_2}W}\right)(z)=\left(d_{\zeta_1}d_{\zeta_2}m_W\right)(z)$$

となるので，帰納的に等式

$$m_{q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}\cdots q_{\zeta_n}W}(z)=\left(d_{\zeta_1}d_{\zeta_2}\cdots d_{\zeta_n}m_W\right)(z) \tag{37}$$

がわかる．ちなみに演算 d_ζ は可換である．また，(35) により $\tau_W\left(q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}\cdots q_{\zeta_n}\right)$ も計算できることがわかる．例えば $n=3$ のときは，命題 7 の cocycle property により

$$\begin{aligned}\tau_W\left(q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}q_{\zeta_3}\right)&=\tau_W\left(q_{\zeta_3}\right)\tau_{q_{\zeta_3}W}\left(q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}\right)\\&=\tau_W\left(q_{\zeta_3}\right)\tau_{q_{\zeta_3}W}\left(q_{\zeta_1}\right)\tau_{q_{\zeta_3}W}\left(q_{\zeta_2}\right)\frac{m_{q_{\zeta_3}W}(\zeta_1)-m_{q_{\zeta_3}W}(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\\&=\tau_W\left(q_{\zeta_1}\right)\tau_W\left(q_{\zeta_2}\right)\tau_W\left(q_{\zeta_3}\right)\frac{m_W(\zeta_1)-m_W(\zeta_3)}{\zeta_1-\zeta_3}\frac{m_W(\zeta_2)-m_W(\zeta_3)}{\zeta_2-\zeta_3}\\&\quad\times\frac{\left(d_{\zeta_3}m_W\right)(\zeta_1)-\left(d_{\zeta_3}m_W\right)(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\end{aligned}$$

となる．容易にわかるように $\tau_W\left(q_{\zeta_1}q_{\zeta_2}\cdots q_{\zeta_n}\right)$ は $\tau_W\left(q_{\zeta_1}\right)\tau_W\left(q_{\zeta_2}\right)\cdots\tau_W\left(q_{\zeta_n}\right)$ の部分と m_W のみの演算で得られる部分の積になっている．ここで

$$\begin{aligned}\tau_W\left(q_{\zeta_1}\right)\tau_W\left(q_{\zeta_2}\right)\cdots\tau_W\left(q_{\zeta_n}\right)&=\exp\left(\sum_j\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{\log\tau_W(q_z)}{\zeta_j-z}dz\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\partial_z\log\left(q_{\zeta_1}(z)\,q_{\zeta_2}(z)\cdots q_{\zeta_n}(z)\right)\log\tau_W(q_z)\,dz\right)\end{aligned}$$

に注意すれば，一般の $g=e^h\in\mathit{\Gamma}$ に対して

$$\rho_W(g)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}h'(z)\log\tau_W(q_z)\,dz\right) \tag{38}$$

と定義することを示唆される．そこで新しい $\tau-$ 関数を

$$\tau_{m_W}(g)=\frac{\tau_W(g)}{\rho_W(g)} \tag{39}$$

で定義すれば，$\tau_{m_W}(g)$ は m_W のみに依存している．

以上の事実を以下の命題として整理しておこう．

命題 9（[SK1]）$W\in Gr^{(2)}$ に対して $\tau_W(g)$ は次のように分解できる．

$$\tau_W(g)=\rho_W(g)\,\tau_{m_W}(g)$$

ここで $\tau_{m_W}(g)$ は m_W にのみ依存している．すなわち，W_1，$W_2\in Gr^{(2)}$ に対して $m_{W_1}=m_{W_2}$ ならば $\tau_{m_{W_1}}(g)=\tau_{m_{W_2}}(g)$ となる．さらに τ_{m_W} は拡張された cocycle の性質

$$\tau_{m_W}(g_1g_2)=\tau_{m_W}(g_1)\,\tau_{m_{g_1W}}(g_2)\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}h_2'(z)\log\frac{\tau_{m_W}(g_1q_z)}{\tau_{m_W}(g_1)}dz\right) \tag{40}$$

をもつ．但し $\tau_{m_W}(g_1) \neq 0$ と仮定し，$g_2 = e^{h_2}$ とした．具体的な g に対しては

$$\begin{cases} \tau_{m_W}(q_\zeta) = 1 \\ \tau_{m_W}\left(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2}\right) = \dfrac{m_W(\zeta_1) - m_W(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \\ \tau_{m_W}\left(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} q_{\zeta_3}\right) = \dfrac{\left(d_{\zeta_3} m_W\right)(\zeta_1) - \left(d_{\zeta_3} m_W\right)(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \end{cases}$$

となる．$\tau_{m_W}\left(q_{\zeta_1} q_{\zeta_2} \cdots q_{\zeta_n}\right)$ も（37）を使い帰納的に求められる．

証明. （40）を示そう．$\tau_W(g_1) \neq 0$ とすると

$$\tau_{m_W}(g_1 g_2) = \frac{\tau_W(g_1 g_2)}{\rho_W(g_1 g_2)} = \frac{\tau_W(g_1)\,\tau_{g_1 W}(g_2)}{\rho_W(g_1)\,\rho_W(g_2)} = \tau_{m_W}(g_1)\,\tau_{g_1 m_W}(g_2)\,\frac{\rho_{g_1 W}(g_2)}{\rho_W(g_2)}$$

となる．ここで ρ_W の定義と，τ_W の cocycle property により

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{g_1 W}(g_2)}{\rho_W(g_2)} &= \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} h_2'(z) \log \frac{\tau_{g_1 W}(q_z)}{\tau_W(q_z)} dz\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} h_2'(z) \log \frac{\tau_W(g_1 q_z)}{\tau_W(g_1)\,\tau_W(q_z)} dz\right) \end{aligned}$$

となる．一方

$$\frac{\tau_W(g_1 q_z)}{\tau_W(g_1)\,\tau_W(q_z)} = \frac{\rho_W(g_1)\,\rho_W(q_z)\,\tau_{m_W}(g_1 q_z)}{\rho_W(g_1)\,\tau_{m_W}(g_1)\,\rho_W(q_z)} = \frac{\tau_{m_W}(g_1 q_z)}{\tau_{m_W}(g_1)}$$

となるので証明が終わる．■

次に（28）で導入したポテンシャル u を $\tau-$ 関数で表現しよう．一パラメータ群 $\{e_x\}_{x\in\mathbb{C}} \subset \Gamma$ を

$$e_x(z) = e^{xz}$$

とする．

補題 10 $\mathbb{C}$ のある領域 D 上で $\tau_W(e_x) \neq 0$ とする．このとき

$$f_W(x,\zeta) = e^{-x\zeta}\left(1 + \varphi_{e_x W}(\zeta)\right) = e^{-x\zeta}\tau_{e_x W}(q_\zeta) \in W \quad (\zeta\text{の関数として}) \tag{41}$$

は Schrödinger 方程式

$$-f_W''(x,z) + u_W(x) f_W(x,z) = -z^2 f_W(x,z) \tag{42}$$

を満たす．さらに $\{a_n(x)\}_{n\geq 1}$ を以下の展開

$$f_W(x,z) = e^{-xz}\left(1 + \frac{a_1(x)}{z} + \frac{a_2(x)}{z^2} + \cdots\right) \tag{43}$$

の係数とすると

$$a_1(x) = \partial_x \log \tau_W(e_x)$$

となり，ポテンシャル u_W は次の式で与えられる．

$$u_W(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_W(e_x) \tag{44}$$

また $D \ni 0$ なら $m-$ 関数は以下で与えられる．

$$m_W(z) = -\frac{f_W'(0,z)}{f_W(0,z)} \tag{45}$$

証明. $x \in D$ に対して $e_x W \in Gr^{(2)}$ となっているので，$f \in e_x W$ で $\mathfrak{p}_+ f = 1$ を満たすものが唯一存在する．それにより $f_W(x,z) = e_x^{-1} f \in W$ とおくと， 3．1節の冒頭で示したように f_W は方程式 (42) を満たすことがわかる．式 (44) は以下のように示される．

$$e^{x\zeta} f_W(x,\zeta) = 1 + (A_{e_x W} 1)(\zeta) = \tau_{e_x W}(q_\zeta) = \frac{\tau_W(e_x q_\zeta)}{\tau_W(e_x)}$$

となっているので

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \lim_{\zeta\to\infty} \zeta\left(e^{x\zeta} f_W(x,\zeta) - 1\right) = \lim_{\zeta\to\infty} \zeta \frac{\tau_W(e_x q_\zeta) - \tau_W(e_x)}{\tau_W(e_x)} \\ &= \lim_{\zeta\to\infty} \zeta \frac{\tau_W\left(e_{x+\zeta^{-1}}\right) - \tau_W(e_x)}{\tau_W(e_x)} = \partial_x \log \tau_W(e_x) \end{aligned}$$

がわかり，(44) が示される．

（43）の両辺を x で微分すると

$$f_W'(0,z) = -z\left(1 + \frac{a_1(0)}{z} + \frac{a_2(0)}{z^2} + \cdots\right) + \frac{a_1'(0)}{z} + \frac{a_2'(0)}{z^2} + \cdots$$

となるが，$f_W'(0,z) \in W$ なので

$$f_W'(0,z) = -z - \psi_W(z) - a_1(0)\varphi_W(z)$$

を得る．一方，$f_W(0,z) = 1 + \varphi_W(z)$ なので（45）を得る． ■

記事 11 式（44）は $W \in Gr^{(2)}$ に対応するポテンシャルを $\tau-$ 関数の言葉で与えている．これを（39）で与えた新しい $\tau-$ 関数の言葉で記述してみよう．ρ_W の定義（38）より

$$\rho_W(e_x) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} x \log \tau_W(q_z)\, dz\right) = e^{cx}$$

となるので

$$u_W(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_W(e_x) = -2\partial_x^2 \log \tau_{m_W}(e_x) \tag{46}$$

を得る．つまりポテンシャル u_W は $m-$ 関数 m_W から定まっている．ポテンシャルを新しい $\tau-$ 関数 τ_{m_W} により表現したこの（46）は初期値のクラスを拡張する場合に重要になる．つまり，$\tau_W(g)$ の $\rho_W(g)$ の部分は拡張する際に発散するが，$\tau_{m_W}(g)$ は有限にとどまる．

$f_W(x,z)$ は **Baker-Akhiezer 関数**と呼ばれ $e^{xz} f_W(x,z)$ が z の関数として ∞ で正則になる Schrödinger 方程式の解である．代数幾何的な議論をする場合によく登場する．ポテンシャルが急減少する場合には前に構成した Jost 解と一致する．

3.2 制限された空間での KdV-flow の実現

この節では $W \in Gr^{(2)}$ のクラスを制限すれば $\tau_W(g) \neq 0$ が少なくとも実の g に対しては常に成立することを示し，そのようなクラス上で KdV-flow が定義できることを示す．

前節で例 3 の関数 m から生成される $W_m \in Gr^{(2)}$ に対してはその $m-$ 関数 m_W は m になることを注意した．ここでは例 3 の条件を強くし

$$\mathcal{M}_r^{refl} = \left\{ \begin{array}{ll} m\,; & m \text{ は } \mathbb{C}\backslash\left([-r,r] \cup i\,[-r,r]\right) \text{ で正則で } \quad m(z) = \overline{m(\overline{z})} \\ & m(z) = z + O\left(z^{-1}\right) \text{ かつ } \operatorname{Im} m(z)/\operatorname{Im} z > 0 \end{array} \right\} \tag{47}$$

とおく．$m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ なら $m_o(z) = 1 + O\left(z^{-1}\right)$ が成り立つので，$|z|$ が十分大きなすべての z に対して $m_o(z) \neq 0$ となり，条件（23）は十分大きい r に取り直せば成り立つ．この節ではこの $\mathcal{M}_r^{refl}$ 上で

$$\Gamma_{\mathrm{real}} = \Gamma \cap \{ z \in \mathbb{R} \text{ に対しては } g\,(z) \in \mathbb{R} \}$$

が閉じた形で作用することを示す．そのために以下の補題を証明を付けずに挙げておく．

補題 12（[SK1]）$\mathbb{C}\backslash\left(\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}\right)$ で正則な m がそこで条件

$$\frac{\operatorname{Im} m(z)}{\operatorname{Im} z} > 0 \tag{48}$$

をみたすとする．このとき $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\left(\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}\right)$ に対して $d_{\overline{\zeta}} d_\zeta m$ は再び m と同じ性質，つまり $\mathbb{C}\backslash\left(\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}\right)$ で正則になり，性質（48）をもつ．

これにより次の定理が示せる．

定理 13（[SK1]）$m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ とすると，$g \in \Gamma_{\mathrm{real}}$ に対して $gW_m \in Gr^{(2)}$ となり，$m_{gW_m} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ がわかる．

証明． $W = W_m$ と簡略化する．$m_W = m$ であることを注意しておく．$\zeta \in \mathbb{C}\backslash\left(\mathbb{R} \cup i\,[-r,r]\right)$ に対して $g = q_{\overline{\zeta}} q_\zeta$ のときは命題 9 より $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ なら

$$\tau_{m_W}\left(q_{\overline{\zeta}} q_\zeta\right) = \frac{m\,(\zeta) - m\left(\overline{\zeta}\right)}{\zeta - \overline{\zeta}} = \frac{\operatorname{Im} m\,(\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta} > 0$$

となる．また $m_{q_{\overline{\zeta}} q_\zeta W}\,(z) = d_{\overline{\zeta}} d_\zeta m_W\,(z)$ であるので，補題 12 より $m_{q_{\overline{\zeta}} q_\zeta W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ がわかる（細かい点が残るが [SK1] を参照）．さらに cocycle property より

$$\tau_{m_W}\left(q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1} q_{\overline{\zeta}_2} q_{\zeta_2}\right) = \tau_{m_W}\left(q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1}\right) \tau_{q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1} m_W}\left(q_{\overline{\zeta}_2} q_{\zeta_2}\right)$$

となるので，$\tau_{m_W}\left(q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1} q_{\overline{\zeta}_2} q_{\zeta_2}\right) > 0$ がわかる．

$$m_{q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1} q_{\overline{\zeta}_2} q_{\zeta_2} W}\,(z) = d_{\overline{\zeta}_1} d_{\zeta_1} d_{\overline{\zeta}_2} d_{\zeta_2} m_W\,(z)$$

なので，再び補題 12 より $m_{q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1} q_{\overline{\zeta}_2} q_{\zeta_2} W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ がわかる．あとは帰納的に $\tau_{m_W}\left(q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1} \cdots q_{\overline{\zeta}_n} q_{\zeta_n}\right) > 0$, $m_{q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1} \cdots q_{\overline{\zeta}_n} q_{\zeta_n} W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ が任意の $n \geq 1$ に対して示される．したがって $g = q_{\overline{\zeta}_1} q_{\zeta_1} \cdots q_{\overline{\zeta}_n} q_{\zeta_n}$ のときにはこの定理の主張は示せた．一般の $g = e^h \in \Gamma_{\mathrm{real}}$ に対しては，実多項式 h_n を適当に選び

$$g_n\,(z) = \left(1 - \frac{h_n\,(z)}{n}\right)^{-n}$$

が $\{|z| \leq r\}$ のある近傍で一様収束するように選ぶ．ただし $1 - h_n(z)/n$ は実の零点を持たないようにしておく．h_n は多項式で $h_n\,(z) = \overline{h_n\,(\overline{z})}$ を満たすので，g_n は $\left\{q_{\overline{\zeta}} q_\zeta,\, \operatorname{Im}\zeta \neq 0\right\}$ の有限積で表現できる．

$$m_{g_n W} \in \mathcal{M}_r^{refl} \tag{49}$$

であることはすでにわかっている．そこで $\tau_W(g) \neq 0$ の場合をまず考える．(35）と $\tau_W(g)$ の cocycle property より

$$m_{g_nW}(z) = z + \int_\infty^z \left(\frac{\tau_{g_nW}\left(q_\zeta^2\right)}{\tau_{g_nW}(q_\zeta)^2} - 1 \right) d\zeta = z + \int_\infty^z \left(\frac{\tau_W\left(g_n q_\zeta^2\right)}{\tau_W(g_n q_\zeta)^2} - 1 \right) d\zeta$$

が成り立つことに注意する．$n \to \infty$ とすると，$\tau_W(g)$ の連続性により

$$\tau_W\left(g_n q_\zeta^2\right), \tau_W(g_n q_\zeta)^2 \to \tau_W\left(g q_\zeta^2\right), \tau_W(g q_\zeta)^2$$

がわかるので，$|\zeta|$ が大きいときこの収束の評価を少し精密にしておくと，$|z|$ が大きいときには $m_{g_nW}(z)$ が $m_{gW}(z)$ に収束することがわかる．このことと（49）より $m_{g_nW}(z)$ は $\mathbb{C}\setminus([-r,r] \cup i[-r,r])$ 上で正則関数列として $m_{gW}(z)$ に収束することがわかる．したがって $m_{gW} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ となる．まだ $\tau_W(g) \neq 0$ の証明が残っている．$gg_n^{-1} \to 1$ なので $\tau_W(g)$ の連続性により $\tau_W\left(gg_n^{-1}\right) \to \tau_W(1) = 1$ となり，十分大きな n に対しては $\tau_W\left(gg_n^{-1}\right) \neq 0$（$\tau_{m_W}\left(gg_n^{-1}\right) \neq 0$ と同値）となることがわかる．再び $\tau_W(g)$ の cocycle property を利用する．

$$\tau_W(g) = \tau_W\left(gg_n^{-1}g_n\right) = \tau_W\left(gg_n^{-1}\right)\tau_{gg_n^{-1}W}(g_n)$$

において $\tau_W\left(gg_n^{-1}\right) \neq 0$ なので，$m_{gg_n^{-1}W} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ がわかっているので，この証明の初めの部分の議論により $\tau_{gg_n^{-1}W}(g_n) \neq 0$ がわかり，証明が完結する． ■

この定理により $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$，$g \in \mathit{\Gamma}_{\mathrm{real}}$ に対して $m_{gW} \in \mathcal{M}_r^{refl}$（但し $W = W_m$）となっているので $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{real}}$ の $\mathcal{M}_r^{refl}$ への作用を

$$g \cdot m = m_{gW} \tag{50}$$

で定めることが出来る．これが空間 $\mathcal{M}_r^{refl}$ 上の KdV-flow になっている．というのは $u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x)$ により u を定め

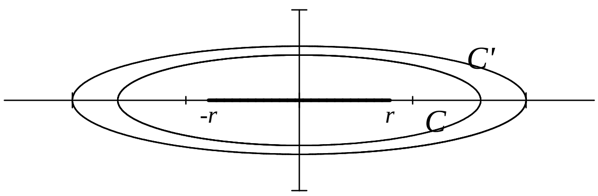
$$(K(g)u)(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_{g\cdot m}(e_x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(ge_x) \tag{51}$$

とすればよいからである．τ_m の拡張された cocycle property が $K(g)$ の flow-property:$K(g_1g_2) = K(g_1)K(g_2)$ を与える．

3.3 $\tau-$ 関数の再表示

この節では後に必要となる τ_m の元の定義の表示を積分作用素の Fredholm 行列式による表示に書き直すことを考える．

区間 $[-r,r]$ を囲むなめらかな単純閉曲線を C, C' とする．向きは反時計向きである．状況は下図を参照いただきたい．



f.1

正則関数 δ を δ_e, δ_o が C' を含む単連結領域で正則になる任意の関数とし,

$$\widetilde{m}(z) = m(z) - \delta(z)$$

とおく．そして積分核および積分作用素を以下のように定める．

$$\begin{cases} N_{g,m}(z,\lambda) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'} \dfrac{\widehat{g}_o(\lambda')(g\widetilde{m})_e(\lambda) + \widehat{g}_e(\lambda')(g\widetilde{m})_o(\lambda)}{(\lambda'-z)(\lambda-\lambda')} m_o(\lambda')^{-1} d\lambda' \\ (N_m(g)f)(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C N_{g,m}(z,\lambda) f(\lambda) d\lambda. \end{cases} \tag{52}$$

ここで $\widehat{g}(z) = g(z)^{-1}$ とした．作用素 $N_m(g)$ は $L^2(C)$ 上の trace クラス作用素を定義する．

定理 14 $m \in \mathcal{M}^{refl}_{\sqrt{r}}$, $g \in \mathit{\Gamma}_{\mathrm{real}}$ に対して $\tau_m(g)$ は以下のように表せる．

$$\tau_m(g) = \det(I + N_m(g))$$

証明. $m \in \mathcal{M}^{refl}_{\sqrt{r}}$ に対して W_m に対応する $\boldsymbol{H}$ での閉部分空間は

$$\boldsymbol{W}_m = A(z)\boldsymbol{H}_+, \qquad A(z) = \begin{pmatrix} 1 & m_e(z) \\ 0 & m_o(z) \end{pmatrix}$$

であった．$\tau-$ 関数を計算するためには，まず $\boldsymbol{H}$ で $A_{\boldsymbol{W}_m}$ の表現を求めなければならない．

$$\boldsymbol{W}_m \ni A(z)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_+ + \boldsymbol{f}_-, \quad \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}_+, \boldsymbol{f}_\pm \in \boldsymbol{H}_\pm$$

と分解するとき

$$\boldsymbol{f}_+ = \mathfrak{p}_+ A(z)\boldsymbol{f} = T(A)\boldsymbol{f}$$

であるので

$$A_{\boldsymbol{W}_m}\boldsymbol{f}_+ = \boldsymbol{f}_- = A(z)\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_+ = A(z)T(A)^{-1}\boldsymbol{f}_+ - \boldsymbol{f}_+ \tag{53}$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{T}(A)^{-1} = \begin{pmatrix} I & -T(m_e)T(m_o^{-1}) \\ 0 & T(m_o^{-1}) \end{pmatrix} \tag{54}$$

であったことを注意しておく．$R_W(g) = g^{-1}\mathfrak{p}_+ gA_{W_m}$ は $\boldsymbol{H}_+$ 上では $G^{-1}\mathfrak{p}_+ GA_{\boldsymbol{W}_m}$ に替わる．ただし

$$G = \begin{pmatrix} g_e(z) & zg_o(z) \\ g_o(z) & g_e(z) \end{pmatrix}$$

である．したがって τ-関数は

$$\tau_m(g) = \tau_{W_m}(g) = \det\left(I + G^{-1}\mathfrak{p}_+ GA_{\boldsymbol{W}_m}\right)$$

となる．$\boldsymbol{H}_+$ の元 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．(53), (54) より $\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2 \in \boldsymbol{H}_+$ に対して

$$\begin{aligned} & A_{\boldsymbol{W}_m}\boldsymbol{f} \\ &= \left(f_1 - T(m_e)T\left(m_o^{-1}\right)f_2 + m_eT\left(m_o^{-1}\right)f_2\right)\boldsymbol{e}_1 + m_oT\left(m_o^{-1}\right)f_2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{f} \\ &= \mathfrak{p}_- m_eT\left(m_o^{-1}\right)f_2\boldsymbol{e}_1 + \mathfrak{p}_- m_oT\left(m_o^{-1}\right)f_2\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&G^{-1}\mathfrak{p}_+GA_{\boldsymbol{W}_m}\boldsymbol{f}\\
&=G^{-1}\mathfrak{p}_+G\mathfrak{p}_-m_eT\left(m_o^{-1}\right)f_2\boldsymbol{e}_1+G^{-1}\mathfrak{p}_+G\mathfrak{p}_-m_oT\left(m_o^{-1}\right)f_2\boldsymbol{e}_2
\end{aligned}\tag{55}$$

となる．直交射影 π_1,π_2 を

$$\pi_1\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1,\quad \pi_2\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2$$

とすると，(55) より $G^{-1}\mathfrak{p}_+GA_{\boldsymbol{W}_m}\pi_1=0$ がわかり

$$I+G^{-1}\mathfrak{p}_+GA_{\boldsymbol{W}_m}=\begin{pmatrix} I_1 & \pi_1G^{-1}\mathfrak{p}_+GA_{\boldsymbol{W}}\pi_2\\ 0 & I_2+\pi_2G^{-1}\mathfrak{p}_+GA_{\boldsymbol{W}}\pi_2\end{pmatrix}$$

となる．したがって

$$\tau_{W_m}(g)=\det\left(I_2+\pi_2G^{-1}\mathfrak{p}_+GA_{\boldsymbol{W}}\pi_2\right)$$

である．一方，(55) より（$\widehat{g}=g^{-1}$）

$$\begin{aligned}
&\pi_2G^{-1}\mathfrak{p}_+GA_{\boldsymbol{W}}\pi_2\\
&=\left(\left(\widehat{g}_o\mathfrak{p}_+g_e+\widehat{g}_e\mathfrak{p}_+g_o\right)\mathfrak{p}_-m_e+\left(\widehat{g}_o\mathfrak{p}_+zg_o+\widehat{g}_e\mathfrak{p}_+g_e\right)\mathfrak{p}_-m_o\right)T\left(m_o^{-1}\right)\\
&=\left(\left(\widehat{g}_o\mathfrak{p}_+g_e+\widehat{g}_e\mathfrak{p}_+g_o\right)m_e+\left(\widehat{g}_o\mathfrak{p}_+zg_o+\widehat{g}_e\mathfrak{p}_+g_e\right)m_o\right)T\left(m_o^{-1}\right)\\
&\quad-\left(\left(\widehat{g}_o\mathfrak{p}_+g_e+\widehat{g}_e\mathfrak{p}_+g_o\right)T\left(m_e\right)+\left(\widehat{g}_o\mathfrak{p}_+zg_o+\widehat{g}_e\mathfrak{p}_+g_e\right)T\left(m_o\right)\right)T\left(m_o^{-1}\right)\\
&=\left(\left(\widehat{g}_o\mathfrak{p}_+g_e+\widehat{g}_e\mathfrak{p}_+g_o\right)m_e+\left(\widehat{g}_o\mathfrak{p}_+zg_o+\widehat{g}_e\mathfrak{p}_+g_e\right)m_o\right)T\left(m_o^{-1}\right)-I\\
&=\left(\widehat{g}_oT\left((gm)_e\right)+\widehat{g}_eT\left((gm)_o\right)-T\left(m_o\right)\right)T\left(m_o^{-1}\right)
\end{aligned}$$

となるので，τ_m は結局

$$\tau_m(g)=\det\left(I+\left(\widehat{g}_oT\left((gm)_e\right)+\widehat{g}_eT\left((gm)_o\right)-T\left(m_o\right)\right)T\left(m_o^{-1}\right)\right)\tag{56}$$

$[-s,s]$ は C の中にあるように $s>r$ をとり，積分関数の正則性を利用して積分路を変形する．$f\in H_+$ と C' の内部にある z に対して

$$\begin{aligned}
T\left(m_o^{-1}\right)f\left(z\right)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda'|=s}\frac{m_o\left(\lambda'\right)^{-1}f\left(\lambda'\right)}{\lambda'-z}d\lambda'\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{m_o\left(\lambda'\right)^{-1}f\left(\lambda'\right)}{\lambda'-z}d\lambda'\equiv Tf(z)
\end{aligned}$$

となる．また，$|z|\le s$ を満たす z に対して

$$\begin{aligned}
&\left(\widehat{g}_oT\left((gm)_e\right)+\widehat{g}_eT\left((gm)_o\right)-T\left(m_o\right)\right)f\left(z\right)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=s}\frac{\widehat{g}_o\left(z\right)(gm)_e\left(\lambda\right)+\widehat{g}_o\left(z\right)(gm)_o\left(\lambda\right)-m_o\left(\lambda\right)}{\lambda-z}f\left(\lambda\right)d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\widehat{g}_o\left(z\right)(gm)_e\left(\lambda\right)+\widehat{g}_o\left(z\right)(gm)_o\left(\lambda\right)-m_o\left(\lambda\right)}{\lambda-z}f\left(\lambda\right)d\lambda\\
&\equiv Sf(z)
\end{aligned}$$

である．ここで作用素 S は m を下の $\widetilde{m}$ に置き換えても変わらないことに注意する．

$$\widetilde{m}\left(z\right)=m(z)-\delta\left(z\right)$$

作用素 S, T はそれぞれ $L^2(C)$ から $H_+ (= H_+(|z| = s))$, H_+ から $L^2(C)$ への作用素と理解している．このとき行列式の可換性を利用すれば，(56) より

$$\tau_m(g) = \det(I + ST) = \det(I + TS)$$

を得る．作用素 $TS : L^2(C) \to L^2(C)$ は

$$(TSf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{m_o(\lambda')^{-1}}{\lambda' - z} d\lambda' \frac{1}{2\pi i}\int_C L_g(\lambda', \lambda) f(\lambda) d\lambda$$

である．ただし

$$L_g(z, \lambda) = \frac{\widehat{g}_o(z)(g\widetilde{m})_e(\lambda) + \widehat{g}_e(z)(g\widetilde{m})_o(\lambda)}{\lambda - z} - \frac{m_o(\lambda)}{\lambda - z}.$$

ここで C' の内部にある z, λ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{m_o(\lambda')^{-1}}{\lambda' - z}\frac{m_o(\lambda)}{\lambda - \lambda'} d\lambda' \\
&= \frac{m_o(\lambda)}{\lambda - z}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\left(\frac{m_o(\lambda')^{-1}}{\lambda' - z} + \frac{m_o(\lambda')^{-1}}{\lambda - \lambda'}\right) d\lambda' = 0
\end{aligned}$$

となることに注意すると，等式

$$(TSf)(z) = (N_m(g)f)(z)$$

を得，証明が終わる．■

この表示式において左の $-r$ を $-\infty$ にもって行くことにより τ_m の定義が拡張することが次の目標になる．その前に重要な $m-$ 関数が対応する Schrödinger 作用素の何を意味するのか明らかにしなければならない．それで次節では Schrödinger 作用素のスペクトル理論について必要な範囲で説明する．

3.4 Schrödinger 作用素の Weyl 関数

この節ではこれからの議論で必要な Schrödinger 作用素のスペクトルに関係する概念・用語を説明する．

$u(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された各有限区間では可積分な実数値関数とする．u をポテンシャルとする Schrödinger 作用素 L を

$$L = -\partial_x^2 + u$$

とする．この作用素に関してまず重要なことは境界 $\pm\infty$ の分類である．つまり L を $L^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役作用素として実現するために境界 $\pm\infty$ で境界条件を付ける必要がある場合とない場合の区分けが必要になる．これに関して次の補題が知られている．

補題 15 境界 $+\infty$ に関して次の 2 つの型がある．$\sigma(L)$ は L のスペクトル集合である．

(i) **極限点型**： この場合任意の $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma(L)$ に対して方程式

$$L\varphi = z\varphi, \quad \varphi \in L^2([0, \infty))$$

の解全体は 1 次元である．そして L は原点で Dirichlet 境界条件を付けると一意的に $L^2([0, \infty))$ 上の自己共役作用素として実現される．

(ii) **極限円型**： この場合任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して方程式

$$L\varphi = z\varphi, \quad \varphi \in L^2([0, \infty))$$

の解全体は 2 次元である．そして L は原点で Dirichlet 境界条件を付けると $L^2([0,\infty))$ 上の自己共役作用素の実現は無限にあり，$+\infty$ で境界条件を課す必要がある．この場合 L のスペクトルは離散的な固有値からなっている．

多くの通常の場合は極限点型である．一つの十分条件としては

$$u(x) \geq -cx^2, \qquad \exists c > 0, \forall x > 1$$

である．u がこれ以上速く $+\infty$ に行く場合は，L に従う量子力学的粒子が有限時間で境界 ;∞ に到達するために，それ以降の運動を記述するため $+\infty$ での境界条件が必要であるということである．

そこで $\pm\infty$ はいずれも極限点型の境界であるとすると，$z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ に対して

$$-\partial_x^2\varphi + u\varphi = z\varphi, \qquad \varphi \in L^2([0,\infty))$$

の解で $\varphi \neq 0$ を満たすものがただ一つ存在するのでその解を $\varphi_+(x,z)$ とする．同様に $L^2((-\infty,0]))$ に属する解で $\varphi \neq 0$ を満たすものを $\varphi_-(x,z)$ とする．$\varphi_\pm$ は x を固定したとき z に関して $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ で正則であることが知られている．そこで

$$m_\pm(z) = \pm\frac{\varphi'_\pm(0,z)}{\varphi_\pm(0,z)} \qquad ({}'\text{は } x \text{ に関する微分})$$

とおくと，$m_\pm(z)$ は $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ で正則関数になり

$$m_\pm(z) = \overline{m_\pm(\overline{z})}$$

がわかる．さらに

$$\begin{aligned}
(z-\overline{z})\int_0^\infty \left|\varphi_+(x,z)\right|^2 dx &= \int_0^\infty \left(-\partial_x^2\varphi_+(x,z) + u(x)\varphi_+(x,z)\right)\overline{\varphi_+(x,z)}dx \\
&\quad - \int_0^\infty \varphi_+(x,z)\overline{\left(-\partial_x^2\varphi_+(x,z) + u(x)\varphi_+(x,z)\right)}dx \\
&= \varphi'_+(0,z)\overline{\varphi_+(0,z)} -_+(0,z)\overline{\varphi'_+(0,z)} \\
&= m_+(z) - \overline{m_+(z)}
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\operatorname{Im} m_+(z)}{\operatorname{Im} z} > 0$$

がわかる．$m_-(z)$ についても同様である．$m_\pm(z)$ は **Weyl 関数**（あるいは Weyl-Titchmarsh 関数）と呼ばれている．また $\mathbb{C}_+$ で正則で正の虚部をもつ関数は **Herglotz 関数**と呼ばれている．Weyl 関数は Herglotz 関数である．

散乱理論の節で

$$\int_{-\infty}^\infty (1+|x|)\,|u(x)|\,dx < \infty$$

の条件の下で Jost 解 $f_+(x,\zeta)$ を，$\operatorname{Im}\zeta \geq 0$ を満たす ζ に対して

$$\begin{cases} -f''_+(x,\zeta) + u(x)f_+(x,\zeta) = \zeta^2 f_+(x,\zeta) \\ f_+(x,\zeta) = e^{i\zeta x} + o\left(e^{i\zeta x}\right), \qquad x \to +\infty \end{cases}$$

を満たす解として定義した．$\operatorname{Im}\zeta > 0$ なら，$f_+(\cdot,\zeta) \in L^2([0,\infty))$ なので Jost 解は

$$f_+(x,\zeta) = \varphi_+(x,\zeta^2)$$

を満たす．$f_-(x,\zeta)$ についても同様であるので

$$m_+\left(\zeta^2\right)=\frac{f_+'(0,\zeta)}{f_+(0,\zeta)},\qquad m_-\left(\zeta^2\right)=-\frac{f_-'(0,\zeta)}{f_-(0,\zeta)}$$

が成り立つ．この場合 $m_\pm(z)$ は $\mathbb{C}\backslash[0,\infty)$ で meromorphic で特異点は有限個でそれらはすべて $\mathbb{R}_-$ の 1 位の極であり，$\mathbb{R}_+$ では有限の境界値をもつ．したがって $m_+(z)+m_-(z)$ も $\mathbb{R}_-$ で有限個の 1 位の極を持つが，それらは L の負の固有値 $\left\{-\eta_j^2\right\}_1^n$ に一致する．反射係数との間には，(8) より，$k\in\mathbb{R}$ に対しては

$$\begin{cases} f_-'(0,k)f_+(0,k)-f_-(0,k)f_+'(0,k)=-2ika(k)\\ f_-'(0,k)f_+(0,-k)-f_-(0,k)f_+'(0,-k)=-2ikb(-k)\end{cases}$$

であるので

$$\begin{aligned} r(k)&=-\frac{b(-k)}{a(k)}=-\frac{f_-'(0,k)f_+(0,-k)-f_-(0,k)f_+'(0,-k)}{f_-'(0,k)f_+(0,k)-f_-(0,k)f_+'(0,k)}\\ &=-\frac{m_-\left(k^2\right)+\overline{m_+\left(k^2\right)}}{m_-\left(k^2\right)+m_+\left(k^2\right)}\frac{\overline{f_+(0,k)}}{f_+(0,k)}\end{aligned}$$

となり

$$|r(k)|=\left|\frac{m_-\left(k^2\right)+\overline{m_+\left(k^2\right)}}{m_-\left(k^2\right)+m_+\left(k^2\right)}\right| \tag{57}$$

が成り立つという関係がある．したがって無反射性は

$$m_-(\xi)+\overline{m_+(\xi)}=0,\qquad \forall\xi>0 \tag{58}$$

と同値である．Weyl 関数はすべてのポテンシャルについて定義できているので，(58) より一般の Schrödinger 作用素 L（極限点型であることは必要）に対して，L（またはポテンシャル u）がある $\mathbb{R}$ 上の可測集合 F 上で**無反射**であることを

$$m_-(\xi+i0)+\overline{m_+(\xi+i0)}=0,\qquad \text{a.e. }\xi\in F \tag{59}$$

が成り立つことと定義する．ポテンシャル u が周期的であれば L のスペクトルは有限個ないしは可算無限個の区間からなることがわかっているが，さらに L はスペクトル上上の意味で無反射であることがわかっている．ちなみにすべての Herglotz 関数 m は a.e. $\xi\in\mathbb{R}$ で有限の極限値 $m(\xi+i0)$ をもつ．

さて前節の $m-$ 関数と L との関係を見よう．

補題 16 $m\in\mathcal{M}_r^{refl}$ に対してポテンシャル u を

$$u(x)=-2\partial_x^2\log\tau_m(e_x)$$

で決める．このとき対応する Schrödinger 作用素 L は $\pm\infty$ で極限点型であり，その Weyl 関数 $m_\pm$ は

$$m_+(-z^2)=-m(z),\qquad m_-(-z^2)=m(z) \tag{60}$$

となる．また L は $[r^2,\infty)$ で無反射であり，L のスペクトルは $[-r^2,\infty)$ に含まれる．

証明. 補題 10 により Baker-Akhiezer 関数 $f_W(x,\zeta)$ はポテンシャル u に対する Schrödinger 方程式の解であり，$f_W(x,\zeta)=e^{-x\zeta}\tau_{e_xW}(q_\zeta)$ で与えられる．また

$$f_{e_xW}(y,\zeta)=e^{-y\zeta}\tau_{e_xe_yW}(q_\zeta)=e^{-y\zeta}\tau_{e_{x+y}W}(q_\zeta)=e^{x\zeta}f_W(x+y,\zeta)$$

に注意すると，（45）より

$$m_{e_xW}(\zeta) = -\frac{f'_{e_xW}(0,\zeta)}{f_{e_xW}(0,\zeta)} = -\frac{e^{x\zeta} f'_W(x,\zeta)}{e^{x\zeta} f_W(x,\zeta)} = -\frac{f'_W(x,\zeta)}{f_W(x,\zeta)}$$

となるので

$$f_W(x,\zeta) = f_W(0,\zeta) \exp\left(-\int_0^x m_{e_yW}(\zeta) dy\right) \tag{61}$$

と表せる．一方，定理 13 より，$m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ ならば，任意の $g \in \Gamma_{\rm real}$ に対して $g \cdot m = m_{gW} \in \mathcal{M}_r^{refl}$（$W = W_m$）となるので，$g = e_x$ として定理を摘要すれば $m_{e_yW} \in \mathcal{M}_r^{refl}$ である．詳細は [SK1] を参照していただきたいが，このときある $r_0 > r$ が存在して，すべての $y \in \mathbb{R}$ に対して $m_{e_yW}(\zeta)$ は $|\zeta| > r_0$ で零点を持たないことがわかる．そこで，$|x|$ が大きければ $m_{e_yW}(x) \sim x$ に注意すると，$a > r_0$ を固定し，$\zeta = \pm a$ とおけば

$$\begin{cases} m_{e_yW}(a) > 0 & \forall y \in \mathbb{R} \\ m_{e_yW}(-a) < 0 & \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

がわかる．したがって（61）より

$$\begin{cases} f_W(x,a) \text{ は正の減少解} \\ f_W(x,-a) \text{ は正の増加解} \end{cases}$$

となり，補題 15 より $\pm\infty$ は極限点型であること，および $f_W(x,a) = f_+\left(x, -a^2\right)$，$f_W(x,-a) = f_-\left(x,-a^2\right)$ がわかる．これが任意の $a > r_0$ で成立するので，正則性より

$$f_W(x,z) = f_+\left(x,-z^2\right), \qquad f_W(x,-z) = f_-\left(x,-z^2\right)$$

を得る．したがって

$$m_+(-z^2) = \frac{f'_W(0,z)}{f_W(0,z)} = -m(z), \qquad m_-(-z^2) = -\frac{f'_W(0,z)}{f_W(0,z)} = m(z)$$

がわかる．無反射性は m の正則性より自明である． ■

逆に，ポテンシャル u が $[r^2,\infty)$ で無反射であり，L のスペクトルは $[-r^2,\infty)$ に含まれるなら $m_\pm$ から作られる m は $\mathcal{M}_r^{refl}$ の元であることは容易に示すことが出来るので，$\mathcal{M}_r^{refl}$ はそのようなポテンシャル全体と同一視できる．定理 13 は，実はそのようなポテンシャルのクラス上で KdV-flow が定義できることを示している．とはいえそのようなポテンシャルが実際どのようなものであるかは自明ではない．表示式

$$u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x)$$

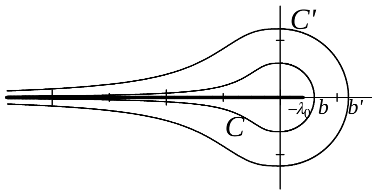
において，x を複素数とみなすことも可能であり，そのとき $\tau_m(e_x) = 0$ となる x で u は 1 次の極をもつことになる．したがって u は $\mathbb{C}$ で有理型（meromorphic）な関数である．さらに Marchenko 等は u は実軸を含むある帯状領域で正則で一様な評価を持つことを示している．このように $\mathcal{M}_r^{refl}$ に対応するポテンシャルは非常に制限が付く．しかし，このクラスは $n-$soliton を含んでおり，さらに $\theta-$ 関数で与えられる代数幾何的な準周期的ポテンシャルも含んでいる．

$m_\pm$ から (60) によって定まる m が $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ ならば, 対応するポテンシャル u は $u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x)$ で与えられるが，より一般の $m_\pm$ からポテンシャルを決める問題はスペクトル逆問題と呼ばれており，1950 年代初めに Gelfand-Levitan により解かれた．その場合 $m_\pm$ の条件が対応するスペクトル測度で与えられているので我々にとっては不都合であるが，どんな場合でも与えられた $m_\pm$ にポテンシャルが対応していればそれは一意的であることは知られている．

3.5 KdV-flow の拡張

この節では定理 14 で与えた $\tau-$ 関数の表示を利用して $\tau-$ 関数を拡張し，KdV-flow をより広いクラスのポテンシャルに拡張することを考える．この節が本講演の主要部分である．証明の詳細は [SK2] を参照していただきたい．

■ポテンシャルのクラスの設定　定理 14 の前の図 3.3 の C，C' を下図のように左に $-\infty$ まで引き伸ばしたいのである．



f.2

曲線 C，C' の形は $g \in \mathit{\Gamma}$ に対して g_e，g_o が有界になるように決める．曲線のパラメータ付を

$$x + i\,(-x)^{-\alpha}$$

とすれば，例えば KdV 方程式に対応する g は $g(z) = e^{tz^3}$（$t \in \mathbb{R}$）であるので，$x \to -\infty$ では

$$z^{3/2} = \left(x + i\,(-x)^{-\alpha}\right)^{3/2} = -i\,(-x)^{3/2} - \frac{3}{2}\,(-x)^{-\alpha+1/2} + o\left(|x|^{-\alpha+1/2}\right)$$

となることに注意すれば，曲線 C，C' は $\alpha \geq 1/2$ と選べばよいことになる．より高次の KdV 方程式は $g = e^h$ としたとき h が高次の奇多項式（$h(z) = -h(-z)$）なので，それに応じて α は大きく選ぶことになる．つまり，$-\infty$ 付近でより実軸に接近するようになる．ここで h が奇多項式ということは重要である．h に偶数次の部分が含まれると，こういう操作は意味のないことになる．

定理 14 で δ を自由に選ぶ選択肢を残したが，その理由は $N_m(g)$ を trace クラスにするためには g_e，g_o が有界というだけでは不十分で核の十分な可積分性が必要になるからである．そのためには δ を適当に選んで $m_e - \delta_e$，$m_o - \delta_o$ が $z \to \infty$ のとき速く 0 に収束するようにしなければならない．

以下では，$\lambda_0 < 0$ を固定し，ポテンシャル u に対して対応する Schrödinger 作用素 L のスペクトル $\sigma(L)$ は常に

$$\sigma(L) \subset [\lambda_0, \infty) \tag{62}$$

を満たすとする．$b > \lambda_0$ を固定し，$(-\infty, b]$ 上で定義されたなめらかな関数 ω が以下の条件を満たすとする．

$$\omega(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, b), \omega(b) = 0$$

この ω に対して曲線 C_ω は実軸に関して対称で上半平面では

$$C_\omega \cap \mathbb{C}_+ = \{x + i\omega(x);\quad x < b\}$$

で表されるものとする．ただし C_ω は実軸とは 1 点 b で交わるとする．ω には，$\alpha \geq -1/2$ に対して

$$\lim_{x \to -\infty} (-x)^\alpha\,\omega(x) \in (0, \infty) \tag{63}$$

という条件を付ける．したがって ω は α に依存している．それを明らかにしたいときには ω_α と書くことにする．曲線 C_ω の外側領域を

$$D_\omega = \{z \in \mathbb{C};\quad |\mathrm{Im}\, z| > \omega(\mathrm{Re}\, z),\, \mathrm{Re}\, z < b\} \cup \{z \in \mathbb{C};\quad \mathrm{Re}\, z \geq b\}$$

とする．さらに

$$\mathcal{R}_\omega = \left\{f\,;\quad f \text{ は有理関数で}, f(z) = O\left(z^{-1}\right) \text{かつすべての極は } D_\omega \text{にある}\right\} \tag{64}$$

とおく．$N > 0$ に対して関数空間 Φ_α^N を次の条件を満たす関数 φ の全体とする．

(i) φ は $\mathbb{C}\backslash(-\infty, -\lambda_0]$ で正則関数

(ii) $\forall c \in (0, 1], \quad \exists f \in \mathcal{R}_\omega \quad \text{s.t.} \quad \sup_{z \in C_{c\omega}} |z|^N |\varphi(z) - f(z)| < \infty$

この Φ_α^N の定義は α，N のみに依存している，つまり ω が（63）を満たせば別の ω に取り換えて Φ_α^N を定義しても同じになる．$f \in \mathcal{R}_\omega$ なら $f(z) = O\left(z^{-1}\right)$ となので，$\varphi \in \Phi_\alpha^N$，$z \in D_\omega$ 対しては，条件 (i)，(ii) と Cauchy の積分定理により

$$\varphi\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\omega} \frac{\varphi(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\omega} \frac{\varphi(\lambda) - f(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda \tag{65}$$

となる．ここで f は $\mathcal{R}_\omega$ の任意の元である．そこで Φ_α^N に norm を導入する．

$$\|\varphi\|_{C_\omega, N} = \inf_{f \in \mathcal{R}_\omega} \sup_{z \in C_\omega} |z|^N |\varphi(z) - f(z)| \tag{66}$$

$\|\varphi\|_{C_\omega, N} = 0$ とすると，$\varphi = 0$ となることは（65）より容易に示すことが出来る．他の norm の性質は容易に確かめることが出来るので，これは Φ_α^N 上の norm になる．

以上により対象とするポテンシャル u のクラスを定義することが出来る．u に対応する Schrödinger 作用素 L の Weyl 関数を $m_\pm$ とし，補題 16 の（60）を参考に m を

$$m(z) = \begin{cases} -m_+(-z^2) & \mathrm{Re}\, z > 0 \\ m_-(-z^2) & \mathrm{Re}\, z < 0 \end{cases} \tag{67}$$

と定め，$\alpha \geq -1/2$，$N > 0$ に対して

$$\mathcal{M}_\alpha^N = \left\{m\,;\quad m_e, m_o - 1 \in \Phi_\alpha^N\right\} \tag{68}$$

とおく．$m \in \mathcal{M}_\alpha^N$ が与えられると $m_\pm$ が（67）より決まり，$m_\pm$ から Gelfand-Levitan の逆問題によりポテンシャル u を決めれば，$\mathcal{M}_\alpha^N$ に対応するポテンシャルのクラスが定まる．実はこれから述べる定理を $g = 1$ のときに適用すればスペクトル逆問題の新しい解法が得られていることになる．

■$\tau-$ 関数の拡張　まず g のクラスを，奇数の自然数 n に対して

$$\mathit{\Gamma}_n = \left\{g = e^h\,;\quad h \text{ は次数 } n \text{ 以下の実奇多項式で } h(0) = 0\right\}$$

と設定する．$m \in \mathcal{M}_{-1+n/2}^N$，$g \in \mathit{\Gamma}_n$ に対して $\tau-$ 関数を定めよう．そのために $0 < c < c' \leq 1$ に対して $C = C_{c\omega}$，$C' = C_{c'\omega}$ とする．この場合 $\alpha = n/2 - 1$ で $\omega\left(x\right) \sim \left(-x\right)^{1-n/2}$ としている．$L^2(C)$ 上の積分核 $N_{g,m}\left(z, \lambda\right)$ を（52）に倣い

$$N_{g,m}\left(z, \lambda\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{\widehat{g}_o\left(\lambda'\right)\left(g\widetilde{m}\right)_e\left(\lambda\right) + \widehat{g}_e\left(\lambda'\right)\left(g\widetilde{m}\right)_o\left(\lambda\right)}{\left(\lambda' - z\right)\left(\lambda - \lambda'\right)} m_o\left(\lambda'\right)^{-1} d\lambda'$$

とおき，$L^2(C)$ 上の積分作用素を

$$N_m(g)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C N_{g,m}(z,\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda$$

で定義する．ただし $m \in \mathcal{M}^N_{-1+n/2}$ なので，さしあたり N は十分大きいとする．このとき $m_e \in \Phi^N_{-1+n/2}$，$m_o - 1 \in \Phi^N_{-1+n/2}$ なので，ある f_1，$f_2 \in \mathcal{R}_\omega$ が存在し

$$\sup_{z\in C_{c\omega}} |z|^N |m_e(z) - f_1(z)| < \infty, \qquad \sup_{z\in C_{c\omega}} |z|^N |m_o(z) - 1 - f_2(z)| < \infty$$

を満たすので，$\widetilde{m}_e = m_e - f_1$，$\widetilde{m}_o = m_o - 1 - f_2$ とする．ここで積分核 $N_{g,m}(z,\lambda)$ の評価として，任意の $\epsilon > 0$ に対してある定数 c_ϵ が存在して

$$|N_{g,m}(z,\lambda)| \le c_\epsilon \frac{|g|_C\, |\widehat{g}|_{C'}\, \langle m\rangle_{C,N}}{\min_{C'}(m_o)}\, |z|^{\alpha/2}\, |\lambda|^{-N+(1+\alpha)/2+\epsilon} \qquad (\alpha = n/2-1) \tag{69}$$

を得る．ただし

$$\begin{cases} \langle m\rangle_{C,N} = \|m_e\|_{C,N} + \|m_o - 1\|_{C,N}\,, \qquad \min_{C'}(m_o) = \min_{z\in C'} |m_o(z)| \\ |g|_C = \max\left(\sup_{z\in C} |g_e(z)|\,, \sup_{z\in C} |g_o(z)|\right) \end{cases}$$

としている．積分核 $N_{g,m}(z,\lambda)$ は変数 z については減少は期待できないので，この積分核を少し変形する必要がある．一般に行列式に対しては逆を持つ任意の作用素 H

$$\det(I+A) = \det(I + H^{-1}AH)$$

が成り立つので，$a > b$ を満たす a を固定し，適当な $M > 0$ に対して

$$H(z) = (z-a)^M$$

とし，$N_{g,m}(z,\lambda)$ の代わりに積分核

$$\widetilde{N}_{g,m}(z,\lambda) = H(z)^{-1} N_{g,m}(z,\lambda)\, H(\lambda)$$

を使う．さらに行列式 det の代わりに $\det_2$，すなわち

$$\det{}_2(I+A) = e^{-\mathrm{tr}A}\det(I+A) \tag{70}$$

を使うと，$\det_2$ は A が Hilbert-Schmidt 作用素でも有効であるので便利である．新しい作用素 $\widetilde{N}_m(g)$ が Hilbert-Schmidt 作用素であるための条件は

$$\int_{C^2} \left|\widetilde{N}_{g,m}(z,\lambda)\right|^2 |dz|\, |d\lambda| < \infty \tag{71}$$

であるので，さらに $\mathrm{tr}A$ に相当する部分を

$$\int_C \widetilde{N}_{g,m}(z,z)\, dz = \int_C N_{g,m}(z,z)\, dz$$

に置き換えるので

$$\int_C |N_{g,m}(z,z)|\, dz < \infty \tag{72}$$

が必要である．（71）と（72）が満たされるとき，$\tau-$ 関数を

$$\tau_m(g) = \exp\left(\int_C N_{g,m}(z,z)\,dz\right)\det{}_2\left(I + \widetilde{N}_m(g)\right) \tag{73}$$

で定める．（71）の十分条件は，評価（69）より

$$N > \frac{n+1}{2} \tag{74}$$

であり，M は $n/4 < M < N - (n+2)/4$ の範囲で自由にとればよい．つまり N は（74）を満たすように最初に取っておく必要がある．このとき（72）は $N > (n+1)/2$ ならば満たされるので，結局，条件（74）が満たされれば $\tau-$ 関数は（73）で定義可能であることがわかった．残っていることは，$m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ のときに定理 14 で定めた $\tau-$ 関数と（73）で定義した $\tau-$ 関数の一致の問題である．この一致性は当然成り立つように思えるが厳密には示さなければならない．ここでは概略だけ説明する．簡単のために（73）式は通常の det とする．$\widetilde{N}_m(g)$ を定義する積分路 C を，m_e，m_o の特異性がある部分 C_1（これは $m \in \mathcal{M}_r^{refl}$ であるので $\left[-r^2, r^2\right]$ に含まれる有界）と残りの $-\infty$ まで伸びた部分 C_2 に分割し，作用素 $\widetilde{N}_m(g)$ を C_1 に制限した作用素を N_1，C_2 に制限した作用素を N_2 とすると，m_e，m_o は C_2 の内部で正則なので

$$N_2 N_1 = N_2^2 = 0$$

が示せる．このとき

$$\det\left(I + \widetilde{N}_m(g)\right) = \det(I + N_1 + N_2) = \det(I + N_1)$$

となり，定理 14 で定めた $\tau-$ 関数と（73）で定義した $\tau-$ 関数は一致する．C の内部で正則な関数 f_1，f_2 を m_e，m_o から引いても det が不変であることも同様の考えで示すことが出来る．

以上で $\tau-$ 関数は $g \in \Gamma_n$ ならば，$N > 1 + n/2$ を満たす N について $m \in \mathcal{M}_{-1+n/2}^N$ ならば定理 14 の $\tau-$ 関数を拡張する形で定義できることがわかった．後，KdV-flow を定義する上で必要なことは一径数群 $g_t(z) = e^{th(z)} \in \Gamma_n$ に対して $\tau_m(g_t)$ の t に関する微分可能性である．このためには積分核 $\widetilde{N}_{g_t,m}(z,\lambda)$ を t で微分したときの積分核の L^2- 可積分性が必要になる．しかしこの処理は容易であり，t で微分するごとに，z，λ について，いづれも $n_1/2(n_1$ は h の次数で $n_1 \le n$）ずつ冪が増加することに注意すればよい．t で r 回微分可能なためには $N > \dfrac{n_1+1}{2} + rn_1$ であれば十分である．

また $\tau_m(g) > 0$ であることも示さなければならないが，

定理 17（[SK2]）$g = e^{h(z)} \in \Gamma_n$ とする．$N > (n+1)/2$ ならば $m \in \mathcal{M}_{-1+n/2}^N$ に対して $\tau-$ 関数は（73）により定義でき，これは $\mathcal{M}_r^{refl}$ のときの $\tau-$ 関数の拡張になっている．また 2 つの一径数群 $e^{xh_1(z)}$，$e^{th_2(z)} \in \Gamma_n$ により二径数群 $g_{x,t}(z) = e^{xh_1(z)}e^{th_2(z)}$ を決めると，$\tau_m(g_{x,t})$ が x について r_1 回，t について r_2 回微分できるためには

$$N > \frac{n_1+1}{2} + r_1 n_1 + \frac{n_2+1}{2} + r_2 n_2$$

であれば十分である．

■$g \cdot m$ **の拡張**　Γ の $\mathcal{M}_r^{refl}$ の作用 $g \cdot m$ は（50）で $g \cdot m = m_{gW_m}$ と定めた．拡張された $\mathcal{M}_{-1+n/2}^N$ に対してもこの作用を拡張したい．そのためにはまず $\tau_m(g) > 0$ を示す必要があるが，これは定理 13 と類似の方法で示すことが出来る．詳しくは [SK2] を参照してほしい．

$g \cdot m$ が $\mathcal{M}^N_{-1+n/2}$ のどの N に属するかを見なければならない．そのために $g \cdot m$ の $\tau-$ 関数による表現

$$(g \cdot m)(z) = z + \int_\infty^z \left(\frac{\tau_m \left(g q_\zeta^2 \right)}{\tau_m \left(g q_\zeta \right)^2} - 1 \right) d\zeta \tag{75}$$

を使う．この式は（35）と τ_m の cocycle property より出る．問題は $\tau_m(gq_\zeta)$ および $\tau_m\left(gq_\zeta^2\right)$ の ζ が大きいときの評価に帰着される．この評価を実行すると曲線 C' に沿って，ある有理関数 f_1，f_2 により

$$\begin{cases} (g \cdot m)_e(z) = f_1(z) + O\left(z^{-(N-n-1)}\right) \\ (g \cdot m)_o(z) = f_2(z) + O\left(z^{-(N-n-1)}\right) \end{cases}$$

となることがわかる．したがって次の定理を得る．

定理 18 $g \in \Gamma_n$ で $N > (n+1)/2$ とする．$m \in \mathcal{M}^N_{-1+n/2}$ に対して $\tau_m(g) > 0$ となる．さらに（75）で $g \cdot m$ を定義すると，$N_1 < N - (n+1)$ を満たす N_1 に対して $g \cdot m \in \mathcal{M}^{N_1}_{-1+n/2}$ となる．

■主定理　$g \in \Gamma_n$ ならば，$N_1 < N - (n+1)$ を満たす N_1 に対して $\mathcal{M}^N_{-1+n/2} \ni m \to g \cdot m \in \mathcal{M}^{N_1}_{-1+n/2}$ となっているので同じ空間上の作用になっていない．そこで

$$\mathcal{M}_n = \bigcap_{N \geq 1} \mathcal{M}^N_{-1+n/2}$$

とおくと，定理 18 より $\mathcal{M}_n \ni m \to g \cdot m \in \mathcal{M}_n$ となる．したがって

$$u(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(e_x) \tag{76}$$

と定めれば，u は C^∞ 関数になり，u をポテンシャルとする Schrödinger 作用素の Weyl 関数 $m_\pm$ は m により

$$m(z) = \begin{cases} -m_+(-z^2) & \mathrm{Re}\, z > 0 \\ m_-(-z^2) & \mathrm{Re}\, z < 0 \end{cases}$$

の関係で与えられる．$\mathcal{Q}_n$ を $m \in \mathcal{M}_n$ から（76）で与えられるポテンシャル u の全体とする．我々の主定理は以下の通りである．

定理 19 $u \in \mathcal{Q}_n$，$g \in \Gamma_n$ に対して

$$(K(g)u)(x) = -2\partial_x^2 \log \tau_{g\cdot m}(e_x) = -2\partial_x^2 \log \tau_m(ge_x)$$

と定義する．ただし u はある $m \in \mathcal{M}_n$ により（76）で与えられているとする．この $K(g)$ は $\mathcal{Q}_n$ 上 flow となる．つまり，g_1，$g_2 \in \Gamma_n$ に対して $K(g_1g_2) = K(g_1)K(g_2)$ が成り立つ．特に

$$\begin{cases} g_t(z) = e^{tz} \Longrightarrow (K(g_t)u)(x) = u(x+t) \\ g_t(z) = e^{-4tz^3} \Longrightarrow (K(g_t)u)(x) \text{ は KdV 方程式を満たす} \end{cases}$$

となる．$u \in \mathcal{Q}_n$ は C^∞ 関数であり，すべての Γ_n の 1 径数群 g_t に対して $(K(g_t)u)(x)$ は 2 変数関数として C^∞ 関数である．

$g_t(z) = e^{-4tz^3}$ の場合の KdV 方程式のみに関心があるのであれば，$m \in \mathcal{M}^N_{1/2}$ において $N > 8$ ならば $(K(g_t)u)(x)$ は KdV 方程式を満たす．

次の問題は $\mathcal{Q}_n$ にどれだけのクラスが入るかということである．$\mathcal{Q}_n$ には Schwartz の急減少関数 $\mathcal{S}$ が入る．代表的な別の例として Ergodic ポテンシャルが入るのであるが，それについては次節で述べる．

3.6 Ergodic ポテンシャルを初期値にする場合

$u \in \mathcal{Q}_n$ となるためには対応する m に対して m_e，m_o の norm（66）が有限になることを示す必要がある．ちなみに

$$\begin{cases} m_e(z) = -\dfrac{1}{2}\left(m_+(-z) - m_-(-z)\right) \\ m_e(z) = -\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\left(m_+(-z) + m_-(-z)\right) \end{cases} \tag{77}$$

である．一般にポテンシャルがなめらかならば，z が実軸と正の角度を保つ扇型領域で

$$\begin{cases} m_+(-z) = -\sqrt{z} + \sum_{n=1}^{N+1} a_n z^{-n/2} + o\left(z^{-(N+1)/2}\right) \\ m_-(-z) = -\sqrt{z} + \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^{n-1} a_n z^{-n/2} + o\left(z^{-(N+1)/2}\right) \end{cases} \tag{78}$$

となることが知られている．N は u の微分可能な最高次数であり，a_n は u の 0 での微係数で表される．問題は，この展開が実軸に急激に収束していく曲線上でも成立するかである．u が Schwartz の $\mathcal{S}$ に属するなら散乱理論の節で見たようにこれは可能であり任意の n に対して $u \in \mathcal{Q}_n$ である．これを ergode 性を満たす定常な確率過程で確かめよう．

まず $u \in \mathcal{Q}_n$ であることと，展開（78）が曲線 $C = C_\omega$（$\omega(x) = x + i(-x)^{-n/2+1}$，$x < -1$）上で任意の $N \geq 1$ に対して成立することが同値であることに注意する．そこで条件（78）を $m_\pm$ に関して対称な条件に置き換えよう．そのために

$$m_1(z) = -\frac{1}{m_+(z) + m_-(z)}, \qquad m_2(z) = \frac{m_+(z)m_-(z)}{m_+(z) + m_-(z)}$$

とおく．m_1，m_2 はいずれも Herglotz 関数になる．この関数により条件（78）は

$$\begin{cases} m_1(-z) = \dfrac{1}{2}\sqrt{z}^{-1}\left(1 + \sum_{n=1}^{(N+1)/2} b_n z^{-n}\right) + o\left(z^{-(N+1)/2}\right) \\ m_2(-z) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{z}\left(1 + \sum_{n=1}^{(N+1)/2} c_n z^{-n}\right) + o\left(z^{-(N+1)/2}\right) \end{cases} \tag{79}$$

と同値になる．さらに

$$\xi_j(x) = \frac{1}{\pi}\arg m_j(x + i0), \qquad j = 1, 2, \qquad x \in \mathbb{R}$$

とおくと，$\operatorname{Im} z > 0$ の z に対しては $\operatorname{Im} m_j(z) > 0$ なので（Herglotz 関数），$0 \leq \xi_j(x) \leq 1$ である．また m が Herglotz 関数のとき，$0 < \operatorname{Im}\log m = \arg m < \pi$ となるので $\log m$ も Herglotz 関数になる．したがって

$$\begin{cases} m_1(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{-z}}\exp\left(\int_{\lambda_0}^{\infty}\dfrac{\xi_1(x) - I_{x>0}/2}{x - z}dx\right) \\ m_2(z) = -\dfrac{\sqrt{-z}}{2}\exp\left(\int_{\lambda_0}^{\infty}\dfrac{\xi_2(x) - I_{x>0}/2}{x - z}dx\right) \end{cases} \tag{80}$$

となることがわかる．したがって（79）のためには

$$\int_0^\infty x^N \left|\xi_j(x) - \frac{1}{2}\right| dx < \infty, \qquad j = 1, 2 \tag{81}$$

がすべての $N \geq 1$ で成り立てば十分である．なぜならこのとき

$$\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{\xi_j(x) - I_{x>0}/2}{x - z}dx = -\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n-1}\int_{\lambda_0}^{\infty} x^n\left(\xi_j(x) - I_{x>0}/2\right)dx + z^{-N}\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{x^N\left(\xi_j(x) - I_{x>0}/2\right)}{x - z}dx$$

と展開できるからである．

ここで**一般化された反射係数**$R(z)$ を

$$R(z) = \frac{m_+(z) + \overline{m_-(z)}}{m_+(z) + m_-(z)} \tag{82}$$

で定義しよう．常に $|R(z)| \le 1$ が成り立つ．ポテンシャル u が急減少する場合には，等式（57）により通常の反射係数 $r\,(k)$ と

$$|R(x+i0)| = \left|r\left(\sqrt{x}\right)\right|, \qquad x > 0$$

の関係にある．次の補題は $\xi_j\,(x)$ と $R(z)$ の関係を示している．

補題 20 $m_\pm \in \mathbb{C}_+$ に対して

$$\begin{cases} \xi_j = \dfrac{1}{\pi}\arg m_j & (j = 1, 2) \\ R = \dfrac{m_+ + \overline{m_-}}{m_+ + m_-} \end{cases}$$

とすと，不等式

$$\left|\xi_1 - \frac{1}{2}\right|, \quad \left|\xi_2 - \frac{1}{2}\right| \le \frac{2}{\pi}\,|R| \tag{83}$$

が成り立つ．

したがって条件（78）を示すには結局

$$\int_0^\infty x^N\,|R\,(x)|\,dx < \infty \tag{84}$$

が成り立てばよいことになった．条件（84）を示すには $R(z)$ の実軸上での評価が必要になる．これは u が Schwartz クラスの関数なら可能である．また ergodic なポテンシャルの場合でも対応する Schrödinger 作用素の絶対連続スペクトル Σ_{ac} 上では $R\,(x) = 0$ がわかっているので，条件（84）は

$$\int_{[0,\infty)\setminus\Sigma_{ac}} x^N dx < \infty \tag{85}$$

ならば成立する．つまり絶対連続スペクトルが十分大きければよいわけである．しかしこれはまだかなりきつい条件であるのでもう少し緩めることを考えよう．そのために $R(z)$ の C 上での評価に置き換えたい．そこで $\phi\,(z)$ を領域 $\mathbb{C}\backslash[-b,\infty)$ から領域 $-D_\omega$ への conformal map とする．ここで $\mathbb{C}\backslash[-b,\infty)$ の境界 $[-b,\infty)$ は曲線 $-C = -C_\omega$ と対応しているとする．そしてこの節でのこれまでのすべての議論を $m_\pm\,(\phi\,(z))$ に対して行う．このとき $R\,(\phi\,(x))$ の（84）の評価は $m_\pm\,(\phi\,(z))$ の $-C$ 上での（78）型の評価になるが，曲線 $-C$ と $\phi\,(-C)$ は ∞ での漸近的ふるまいは同じなので，結局元の $m_\pm\,(z)$ に対して（78）が示せたことになる．

そこで $R\,(\phi\,(x))$ の評価を ergodic ポテンシャルについて与えよう．そのために ergodic な Schrödinger 作用素の基本的な量を説明しておく（[SK3] 参照）．$u_\omega\,(x)$ を定常で ergodic な確率過程とする（この ω は sample を表す ω）．このとき Wel 関数 $m_\pm\,(z,\omega)$ も ω に依存する．そこで

$$w(z) = \mathbb{E}m_\pm\,(z,\omega)$$

とおく．この 2 つの期待値は一致することが知られている．w を **Floquet 指数**と呼ぶ．w も Herglotz 関数である．

$$\gamma\,(z) = -\operatorname{Re} w(z)$$

とおき，これを **Lyapunov 指数**と呼ぶ．これは常に $\gamma(z) \geq 0$ である．w はすべての $z \in \mathbb{R}$ で有限の極限値を持つことも知られており，w，γ はすべての $z \in \mathbb{C}$ で定義されている．但し $w(z) = \overline{w(\overline{z})}$ なので w は上半平面からの極限値と下半平面からの極限値は一般には異なる．γ は同じ極限値をもつ．次の等式は基本的である．

$$\begin{cases} w'(z) = -\mathbb{E}\left(m_+(z,\omega) + m_-(z,\omega)\right)^{-1} \\ \dfrac{2\gamma(z)}{\operatorname{Im} z} = \mathbb{E}\left(\operatorname{Im} m_\pm(z,\omega)\right)^{-1} \end{cases} \tag{86}$$

この 2 つの等式より次の等式が出る．

$$\frac{\gamma(z)}{\operatorname{Im} z} - \operatorname{Im} w'(z) = \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{1}{\operatorname{Im} m_+(z,\omega)} + \frac{1}{\operatorname{Im} m_-(z,\omega)}\right)|R(z,\omega)|^2\right\} \tag{87}$$

そこで

$$\chi(z) = \frac{\gamma(z)}{\operatorname{Im} z} - \operatorname{Im} w'(z)$$

とすると，$\chi(z) \geq 0$ であるが，Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|R(z,\omega)|\right) &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\operatorname{Im} m_+(z,\omega)} + \frac{1}{\operatorname{Im} m_-(z,\omega)}\right)|R(z,\omega)|^2\right)} \\ &\quad \times \sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\operatorname{Im} m_+(z,\omega)} + \frac{1}{\operatorname{Im} m_-(z,\omega)}\right)^{-1}\right)} \\ &\leq \sqrt{4\chi(z)}\sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{\operatorname{Im} m_+(z,\omega) + \operatorname{Im} m_-(z,\omega)}{4}\right)} \\ &= \sqrt{2\chi(z)\operatorname{Im} w(z)} \end{aligned}$$

を得る．つまり

$$\mathbb{E}\left(|R(z,\omega)|\right) \leq \sqrt{2\chi(z)\operatorname{Im} w(z)} \tag{88}$$

を得る．したがって例えば

$$\int_C |z|^N \sqrt{\chi(z)\operatorname{Im} w(z)}\,|dz| < \infty \tag{89}$$

がわかれば

$$\mathbb{E}\left(\int_C |z|^N |R(z,\omega)|\,|dz|\right) < \infty$$

となり，a.e. ω に対して

$$\int_0^\infty x^N |R(\phi(x),\omega)|\,dx < \infty$$

がわかることになる．そこで条件（89）を他の確かめやすい条件に置き換えることを考えると

$$\int_0^\infty x^N \gamma(x)\,dx < \infty, \qquad \forall N \geq 1$$

であれば十分であることがわかる．結局

定理 21 $u_\omega(x)$ を定常で ergodic な確率過程とすし，対応する Schrödinger 作用素のスペクトルは $[\lambda_0,\infty)$ に含まれるとする．その Lyapunov 指数 $\gamma(x)$ が

$$\int_0^\infty x^N\gamma(x)\,dx<\infty,\qquad \forall N\geq 1 \tag{90}$$

を満たすなら，すべての $n\geq 1$ に対して $u_\omega\in\mathcal{Q}_n$ が確率 1 で成り立つ．したがってこれを初期値とする KdV-flow が定義できる．(90) のためには $u_\omega(x)$ が C^∞ であり，すべての微分が有界であれば十分である．特に無限回微分可能な概周期関数に対して KdV-flow が定義できる．

KdV-flow は可換であり，その中には shift 操作も含んでいるので，任意の $g\in\Gamma_n$ に対して $K(g)u_\omega$ は再び ergodic な定常過程になる．このとき Floquet 指数は不変であることがわかる．しかし ergodic な初期値に対して KdV-flow を施した場合未解決の問題がいくつかあるので次章で説明する．

4 White noise を初期値に持つ場合の未解決問題：ソリトン乱流問題

■概周期的な初期値　概周期的なポテンシャルは ergodic な場合の特別な例であるので，定理 21 が適用でき KdV 方程式は解ける．問題は解が再び概周期的になるかという問題である．これは最近スペクトルが絶対連続で，スペクトル集合 Σ がある種の等質性，つまり

$$\exists\delta>0 \text{ に対して } |\Sigma\cap(x-\epsilon,x+\epsilon)|\geq\delta\epsilon\quad\forall x\in\Sigma,\qquad\forall\epsilon>0$$

を持つときには解も概周期的であることが示されている（[EVY]）．しかもこの場合には時間についても概周期的であることが示されている．したがってこの場合には soliton 現象とは異なる現象領域である．少なくとも空間についての概周期性が一般の概周期ポテンシャルを初期値にもつ KdV 方程式の解について示せるかというのが次の未解決問題である．このためには K(g)u(x) の x について $\mathbb{R}$ での一様 norm での評価が必要になるが，容易ではない．

■soliton gas の統計的性質　ergodic なポテンシャルを初期値に持つ KdV-flow を考える．この場合歴史的背景のところで述べたように soliton gas の統計的な性質を導出することが問題であった．どのような問題かというと，有限の $n-$soliton の場合には各 soliton の速さが求まっている．ergodic なポテンシャルにおいてはランダム性が強くなると対応する Schrödinger 作用素のスペクトルは dense な固有値になることが知られている．したがってこれを初期値にして KdV 方程式を解くと無限個の soliton が密集して動いていると思われるが，たとえばその平均的な速度はどのようになるかという問題である．物理的な考察により一応方程式は求められているようであるが，厳密な導出が望まれる．

■初期値が white noise の場合　ポテンシャルが極端にランダムな場合として white noise ポテンシャルがある．$q_\omega(x)$ を加法過程でその特性関数（$\mathbb{E}e^{i\xi q_\omega(x)}=e^{x\psi(\xi)}$）が以下の $\psi(\xi)$

$$\psi(\xi)=-\sigma\xi^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\xi x}-1-i\xi xI_{|x|<1}\right)n(dx)$$

で与えられているとする．このとき white noise $dq_\omega(x)$ をポテンシャルとする Schrödinger 作用素の Weyl 関数 $m_\pm$ について

$$f(\zeta,z)=\mathbb{E}\left(e^{\zeta m_-(z,\omega)}\right)$$

は方程式

$$\begin{cases} f''(\zeta) + \left(\dfrac{\psi(i\zeta)}{\zeta} + z \right) f(\zeta) = 0 \\ f(0) = 1, \ \ f(i\xi) \to 0 \text{ as } \xi \to \infty \text{ along } \boldsymbol{R}_+ \end{cases}$$

の解であることが予想される．実際 Lévy 測度 n が $[0,\infty)$ に台をもち

$$\int_0^\infty xn(dx) < \infty$$

を満たすときには確かめることが出来る．したがって Floquet 指数は

$$w(z) = f'(0,z)$$

と求まることになる．単純な Gaussian white noise の場合には，方程式は

$$f''(\zeta) + (\sigma\zeta + z) f(\zeta) = 0$$

となり．f は Airy 関数を使って表すことが出来る．この場合 Schrödinger 作用素のスペクトルは $\mathbb{R}$ 全体になる．もちろん Gaussian white noise を初期値にして KdV 方程式を解く問題に定理 21 は適用できない．しかし歴史的背景で述べたように Gaussian white noise に周期性を仮定すれば KdV 方程式は解けることがわかっている．周期性を仮定せずに KdV 方程式を解くことは未解決の問題である．Gaussian white noise は形式的には

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty u(x)^2 dx \right)$$

を「密度」にもつので，$\int_{-\infty}^\infty u(x)^2 dx$ が KdV 方程式の不変測度になる．周期的な Gaussian white noise の場合にはすでに理論的な研究がある．解の構成を我々の方法で考える場合には，今までの付帯条件：

$$\text{Schrödinger 作用素のスペクトル} \subset [\lambda_0, \infty)$$

を外す必要がある．このためにはスペクトル測度 σ に対して $-\infty$ で強い収束条件

$$\int_{-\infty}^0 e^{c(-x)^{3/2}} \sigma(dx) < \infty \qquad \forall c > 0 \tag{91}$$

を課さなければならない．Gaussian white noise の場合には σ の平均は計算されており，それによると，ある $c > 0$ までは（91）は満たされることがわかる．したがって我々の方法で Gaussian white noise を初期値に持つ KdV 方程式の解を構成できる可能性は残っている．

参考文献

[ZK] Zabusky, N. J.- Kruskal, M. D.: Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett., 15 (6),(1965): 240–243

[GGKM] Gardner, C.S.- Greene, J.M.- Kruskal, M.D.- Miura, R.M: Method for solving the Korteweg–de Vries equation, Physical Review Letters, 19 (19),(1967): 1095–1097,

[L] P. Lax: Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Applied Math., 21 (5),(1968): 467–490

[MGK] Miura, Robert M.- Gardner, Clifford S.- Kruskal, Martin D., Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, J. Math. Phys., 9 (8),(1968): 1204–1209

[H] Ryogo Hirota: Exact Solution of the Korteweg—de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons, Phys. Rev. Lett. 27, (1971), 1192 –

[M] V. A. Marchenko: Nonlinear Equations and Operator Algebra, Mathematics and its Applications (Soviet Series), (1987) D. Reidel Publishing Company.

[S] M. Sato: Soliton Equations as Dynamical Systems on an Infinite Dimensional Grassmann Manifolds, Suriken Koukyuroku 439 (1981), 30 - 46. (http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/en/publi-01.html)

[SW] G. Segal - G. Wilson: Loop groups and equations of KdV type, Publ. IHES, 61 (1985), 5 - 65.

[Z] V. E. Zakharov, Kinetic equation for solitons, Sov. Phys. JETP 33:538–541 (1971).

[Z1] V. E. Zakharov: Turbulence in Integrable Systems, Studies in Applied Mathematics 122:219–234,(2009).

[KM] 小谷眞一・俣野博: 微分方程式と固有関数展開，岩波書店 (2006)

[T] Shunichi Tanaka: Korteweg-de Vries Equation; Asymptotic Behavior of Solutions, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10(1975), 367-379

[SA] H. Segur and M. J. Ablowitz, Asymptotic solutions of nonlinear evolution equations and a Painléve transcendent, Phys. D 3, (1981), 165–184

[GT] K. Grunert- G. Teschl: Long-time Asymptotics for the Korteweg-de Vries Equation via Nonlinear Steepest Descent, Math. Phys. Anal. Geom. 12, 287–324 (2009).

[SK1] S. Kotani: Construction of KdV flow I -$\tau-$function via Weyl function-, to appear in Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry dedicated to the 95th birthday of V. A. Marchenko.

[SK2] S. Kotani: Construction of KdV flow II in preparation

[SK3] S. Kotani: One-Dimensional Random Schrödinger Operators and Herglotz Functions, Taniguchi Symp. PMMP Katata 1985, 219-250.

[EVY] B. Eichinger-T. VandenBoom-P. Yuditskii: KdV hierarchy via Abelian coverings and operator identities, arXiv

[CKSTT] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao: Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on R and T, Journal of the AMS, 16 (2003), 705-749

[KT] T. Kappeler, P. Topalov: Global wellposedness of KdV in $H^{-1}(\mathbb{T},\mathbb{R})$: Duke Math. Journal 135(2006), 327-360.