

ランダムシュレーディンガー作用素の 準位統計とその周辺

中野 史彦*

概要

ランダムシュレーディンガー作用素におけるこれまでの研究について概観した後, スペクトルのバルク近傍における準位統計の話題を中心に解説する.

目次

1	概観	1
2	ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計	3
2.1	d次元格子モデル	3
2.2	1次元系	5
2.3	その他の話題	9

1 概観

ランダムシュレーディンガー作用素 (RSO) は, 不純物を含む媒質中の電子の挙動を調べることを動機として研究が始められたもので, 大まかには次の2つに分けられる.

(1) 離散モデル:

$$(H\phi)(n) := \sum_{|y-x|=1} \phi(y) + V(x)\phi(x), \quad \phi \in l^2(\mathbf{Z}^d).$$

*〒 171-8588 豊島区目白 1-5-1 学習院大学理学部

ここで $\{V(n)\}_{n \in \mathbf{Z}^d}$ は i.i.d. である.

(2) 連続モデル:

$$(H\psi)(x) := -\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x), \quad \psi \in L^2(\mathbf{R}^d).$$

$V(x)$ はランダムポテンシャルで, 合金型: $V(x) := \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} a_n f(x-n)$, ポアソン型: $V(x) := \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} f(x-X_n)$, 及びこれらの変形がよく研究されている. ここで, f は適当な性質を満たす可測関数で, 原子核が電子に及ぼすポテンシャルを表し, $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}^d}$ は i.i.d., $\{X_n\}$ はポアソン点過程.

以下, これらのモデルについて行われてきた研究を概観する.

(1) スペクトル理論

(H が「可測に」定義されているところの) 確率空間上にエルゴード的なシフト T が存在し, H が T について共変的である場合には, 次が成り立つ. 「ある閉集合 $\Sigma(\subset \mathbf{R})$ が存在して $\sigma(H) = \Sigma$, a.s. 更に閉集合 Σ_{\sharp} , $\sharp = ac, sc, pp$ が存在して $\sigma_{\sharp}(H) = \Sigma_{\sharp}$, a.s., $\sharp = ac, sc, pp$.」また, 1次元系においては精緻な一般論が構成されている [17].

(2) アンダーソン局在

ランダムポテンシャルに対する適当な仮定のもと, 次が成り立つ.

「ある区間 $I_{loc}(\subset \Sigma)$ が存在して, 確率1において I_{loc} における H_{ω} のスペクトルは連続成分を持たず, 稠密に分布する固有値からなり, 対応する固有関数は指数的に減衰する.」

典型例では Σ はいくつかの閉区間の和集合からなるが, 例えば I_{loc} はその区間端点近傍にとることができる. 証明には1次元的方法, グリーン関数が指数減衰する確率の詳細評価による方法 (MSA), 及びグリーン関数の分数モーメントの指数減衰による方法 (FMM) が知られている. スケーリング理論 [3] に基づく予想は「(i) $d = 1$ ならば $I_{loc} = \sigma(H)$, (ii) $d = 2$ ならば $I_{loc} = \sigma(H)$, (iii) $d \geq 3$ ならば $\sigma_{ac}(H) \neq \emptyset$ 」であるが, 現在 (i) 以外は未解決である.

(3) 累積状態密度

Λ を (モデル (1), (2) に応じて) \mathbf{Z}^d の有限格子または \mathbf{R}^d の立方体とし, H_{Λ} を H を Λ 上に制限してディリクレ境界条件を課したものとする. 確率1で極限

$$N(E) := \lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda|} \#\{\text{eigenvalues of } H_{\Lambda} \leq E\}$$

がすべての $E \in \mathbf{R}$ について存在し, 非減少かつ deterministic な関数となる¹. N のことを **Integrated Density of States (IDS)**, 対応する \mathbf{R} 上

¹ランダム行列理論での経験分布の濃収束に対応する.

のボレル測度 ν のことを **Density of States Measure(DS)** という。ランダムポテンシャルの有無に応じて N の $E_0 := \inf \sigma(H)$ 近傍での挙動は大きく異なる。

$$N(E) \stackrel{E \downarrow E_0}{\sim} \begin{cases} (E - E_0)^{d/2} & (V = 0) \\ \exp(-c(E - E_0)^{-d/2}) & (V \neq 0) \end{cases}$$

$V \neq 0$ のときのこの特異性は、直観的には次のような議論により理解できる。簡単のため $E_0 = 0$ とする。 H が $E \sim L^{-2}$ のオーダーの固有値を持つためには、サイズ L の立方体上でランダムポテンシャルの値がその平均値に比べ十分小さくなる必要があるが、大偏差原理によりその確率は $\exp(-(const.)L^d) \sim \exp(-(const.)E^{-d/2})$ のオーダーである。連続モデルでは、Donsker-Varadhan の大偏差原理を用いた精密な研究があり、 f の遠方での減衰オーダーと $N(E)$ の $E \downarrow E_0$ のときの挙動との関係など興味深い結果が知られている [32]。

(4) 準位統計

$|\Lambda|$ が大きいとき、 H_Λ の固有値は近似的には $N(E)|\Lambda|$ に従って分布しているが、その局所的なゆらぎを調べるのが目的である。最近では 1 次元系、または擬 1 次元系において、ランダム行列理論との関係を中心に議論されている。

(5) その他

量子ホール系（2次元定数磁場を持つランダムシュレーディンガー作用素）におけるホール伝導度の導出、その位相不変量・フレドホルム指数との関係等が 1980 年代から 1990 年代にかけて研究されていたが、近年トポロジカル絶縁体の発見を契機に再び研究が活発化している。

文献：[28, 6, 1] は標準的なテキスト。[8, 16] は格子モデルを扱い (1)~(3) について解説した平易なレビュー。また、(3) については上木直昌氏による解説記事 [32]、(5) については [26] に 2014 年頃迄の文献リストがある。

2 ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計

2.1 d次元格子モデル

$\Lambda := \Lambda_L = \{1, 2, \dots, L\}^d$, $\{E_j(\Lambda)\}_{j=1}^{|\Lambda|}$ を H_Λ の固有値とする。スペクトルの局在領域内部の元 $E_0 \in I^\circ$ を任意にとり², E_0 近傍での H_Λ の固有

² E_0 を **Reference energy** と呼ぶ。本稿では E_0 を $\sigma(H)$ の内点にとる場合のみを考え、エッジ近傍での準位統計は考えない。

値のゆらぎを調べるために、次の点過程を考える³。

$$\xi_L(d\lambda) := \sum_j \delta_{|\Lambda|(E_j(\Lambda) - E_0)}(d\lambda).$$

ξ_L の $L \rightarrow \infty$ のときの挙動を調べたい。 $N(E)$ をマクロ極限, $\lim_{L \rightarrow \infty} \xi_L$ をミクロ極限とみなすこともできる。南就将氏 [22] は次の重要な結果を証明した。

Theorem 2.1 [22]

$n(E) := \frac{d}{dE} N(E)$ とおく。 $E_0 \in I_{loc}$, $0 < n(E_0) < \infty$ ならば⁴,

$$\xi_L \xrightarrow{d} \text{Poisson}(n(E_0)d\lambda).$$

$E_0 = \inf \sigma(H)$ のときは, unfolding された固有値のなす点過程を考えることで同様の結果が得られている [12]。

対応する固有関数の分布を同時に調べるために, \mathbf{R}^{d+1} 上のランダム測度を次のように定義する。

$$\xi(J \times B) := \text{Tr} (1_B(x) 1_J(H) 1_B(x)), \quad J \subset \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}^d.$$

ここで, 1_B を $l^2(\mathbf{Z}^d)$ 上のかげ算作用素と見なしている。以下, 次の2つのスケールリングを考える。

Macroscopic scaling :

$$\xi_L(J \times B) := \frac{1}{L^d} \text{Tr} (1_{LB}(x) P_J(H) 1_{LB}(x)).$$

Microscopic scaling : reference energy を E_0 として

$$\xi'_L(J \times B) := \text{Tr} (1_{LB}(x) P_{E_0 + L^{-d}J}(H) 1_{LB}(x)).$$

Theorem 2.2 [13, 23]

(1) $\xi_L \xrightarrow{v} dN \times dx$, a.s.

(2) $E_0 \in I_{loc}$, $0 < n(E_0) < \infty$ ならば, $\xi'_L \xrightarrow{d} \text{Poisson}(n(E_0)d\lambda \times dx)$ 。

Theorem 2.2(1) は固有状態が巨視的には空間上一様に分布していることを意味し, IDS の存在定理の自然な表現と見なせる。一方 Theorem 2.2(2) は Theorem 2.1 の (エネルギー \times 空間) 直積空間への自然な拡張である。実際, Theorem 2.2(2) の証明のアイデアは本質的に [22] によるもので, H を $H \sim \oplus_k H_k$ と局所ハミルトニアン H_k で近似しておいて, H の固有値と $\oplus_k H_k$ のそれとの 1 対 1 対応を構成し, ポアソン収束定理を適用することにより行われる。

³強度を規格化するために $\sum_j \delta_{|\Lambda|(N(E_j) - N(E_0))}$ を考えることもある。この操作を **unfolding** と呼ぶ。

⁴正確には, E_0 においてグリーン関数の指数減衰評価が成り立つと仮定する。

Remark 2.3 *Theorems 2.1, 2.2(2)* の証明の鍵は *Minami's estimate* と呼ばれる次の評価である⁵.

$$\mathbf{E}[N(\Lambda, J)(N(\Lambda, J) - 1)] \leq (\text{Const.})|\Lambda|^2 \cdot |J|^2.$$

$L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の *RSO* においてはこの評価が未だ確立されておらず, 従って得られているのは $\{\xi'_L\}_L$ は相対コンパクトであり, その集積点は無限分解可能であること迄である [24].

2.2 1次元系

2000年代後半頃から, Killip-Stoiciu[15], Valkó-Virág[33], Kritchevski-Valkó-Virág[21] らにより, ベータアンサンブルのスケール極限, 及び減衰項を持つ CMV 行列やシュレーディンガー作用素の準位統計の研究が行われ始めた. 本節ではベータアンサンブルの極限について触れた後, 1次元連続モデルでの同種の研究 [18, 25, 19] を紹介する.

Circular β -ensemble ($\mathbf{C}_\beta\mathbf{E}$) 単位円上の n 個の点 $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$, $\theta \in [-\pi, \pi)$ の分布密度関数を

$$\mathbf{P}(\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n) \propto |\Delta(\{e^{i\theta_j}\})|^\beta$$

と与えるものである⁶. そのスケーリング極限を次で定める.

$$\zeta_\beta^C := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \delta_{n\theta_j}.$$

Killip-Stoiciu [15] は ζ_β^C の特徴付けを次のように与えた. $\lambda > 0$ を任意にとり, $\Psi_t(\lambda)$ を次の SDE の解とする⁷.

$$d\Psi_t(\lambda) = \lambda dt + \frac{2}{\sqrt{\beta t}} \operatorname{Re} \left[(e^{i\Psi_t(\lambda)} - 1) dZ_t \right], \quad \Psi_0(\lambda) = 0.$$

$\{\Psi_t(\lambda)\}_{\lambda > 0}$ を共通の確率空間上で実現することにより, t を固定すると $\lambda \mapsto \Psi_t(\lambda)$ はランダムな増加関数になる. $\theta = \text{unif.}[0, 2\pi)$ を $\{\Psi_t(\lambda)\}_\lambda$ と独立な $[0, 2\pi)$ 上の一様分布とすると, ζ_β^C のアトム集合は $\{\Psi_1^{-1}(2n\pi + \theta)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ と同分布になる.

⁵ $N(\Lambda, J) := \#\{\text{eigenvalues of } H_\Lambda \in J\}$, $J(\subset \mathbf{R})$: 区間.

⁶ $\Delta(\{x_j\})$ はヴァンデルモンドの行列式

⁷ Z_t は複素ブラウン運動

Gaussian β -ensemble ($\mathbf{G}_\beta\mathbf{E}$) 実軸上の n 個の点 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ の分布密度関数を

$$\mathbf{P}(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n) \propto \exp\left(-\frac{\beta}{4} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right) |\Delta(\{\lambda_j\})|^\beta$$

と与えるものである。そのバルクスケーリング極限は次で定められ、**Sine $_\beta$ -process** と呼ばれる⁸。

$$\zeta_\beta^G \stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \delta_{\sqrt{4n - \mu_n^2}(\lambda_j - \mu_n)}.$$

Valkó-Virág [33] は ζ_β^G の特徴付けを次のように与えた。 $\alpha_t(\lambda)$ を次の SDE の解とする。

$$d\alpha_t(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\beta}{4} e^{-\frac{\beta}{4}t} dt + \operatorname{Re} \left[(e^{i\alpha t} - 1) dZ_t \right], \quad \alpha_0(\lambda) = 0.$$

$\lambda > 0$ ならば $t \mapsto [\alpha_t(\lambda)/2\pi]$ は非減少関数となり、a.s. で $\alpha_\infty(\lambda) := \exists \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(\lambda) \in 2\pi\mathbf{Z}$ が存在する。区間 $(\lambda_1, \lambda_2]$ 上での Sine $_\beta$ -process は次のように与えられる。

$$\zeta_\beta^G(\lambda_1, \lambda_2] \stackrel{d}{=} \frac{\alpha_\infty(\lambda_2) - \alpha_\infty(\lambda_1)}{2\pi}.$$

証明の方針は、これらの固有値分布を実現するランダム CMV 行列 [14]、ランダムジャコビ行列 [10] を考え、「Prüfer angle の離散版」のなすマルコフ連鎖のスケーリング極限を考察するというものである。上記の2つの SDE は密接に関連しているが、特異性の有無や解の性質は異なっている。一方、Valkó-Virág [34] は Sine $_\beta$ をスペクトルに持つランダムディラック作用素を構成している。

減衰ポテンシャルを持つ1次元連続系 t を空間変数とする $L^2(\mathbf{R})$ 上のシュレーディンガー作用素を次のように考える。

$$H := -\frac{d^2}{dt^2} + a(t)F(X_t) \quad \text{on } L^2(\mathbf{R}).$$

ここで、 $a(t)$ は減衰因子、 $F(X_t)$ はランダムポテンシャルを表す。 $a \in C^\infty(\mathbf{R})$ はなめらかな偶関数かつ $t > 0$ では単調減少とし、次を仮定する。

$$a(t) = t^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0.$$

⁸右辺は $\{\lambda_k/\sqrt{n}\}$ を状態密度 $\sqrt{4 - \lambda^2}d\lambda$ を用いて unfolding して得られる点過程。reference energy μ_n は TW 領域から離れていること： $n^{1/6}(2\sqrt{n} - |\mu_n|) \rightarrow \infty$ を仮定する。

F はトーラス M 上の滑らかな関数 $F \in C^\infty(M)$ で, $\langle F \rangle := \int_M F(x)dx = 0$ を仮定する. $\{X_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ は M 上のブラウン運動である. ポテンシャル $a(t)F(X_t)$ は $-d^2/dt^2$ についてコンパクトであるから, $\sigma(H) \cap (-\infty, 0)$ は離散固有値からなる. $\sigma(H) \cap [0, \infty)$ については次の事実が知られている [20].

- (1) $\alpha > 1/2 \implies \sigma(H) \cap [0, \infty)$ は絶対連続
- (2) $\alpha < 1/2 \implies \sigma(H) \cap [0, \infty)$ は点スペクトル
- (3) $\alpha = 1/2 \implies E_c \in [0, \infty)$ が存在し, $\sigma(H) \cap [0, E_c]$ は点スペクトル, $\sigma(H) \cap [E_c, \infty)$ は特異連続.

準位統計の問題を考えるために, H を有界区間 $[0, L]$ 上に制限してディリクレ境界条件を課したものを $H_L := H|_{[0, L]}$ とし, その正の固有値を $0 < E_{n_0}(L) < E_{n_0+1}(L) < \dots$ とおく. Reference energy $E_0 > 0$ を任意にとり, 次の点過程を考える⁹.

$$\xi_L := \sum_{n \geq n_0} \delta_{L(\sqrt{E_n(L)} - \sqrt{E_0})}.$$

Theorem 2.4 [18, 25, 19]

- (1) *AC case* : $\alpha > 1/2 \implies \xi_L \xrightarrow{d} \xi_{clock} := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{n\pi + \theta}, \exists \theta \in [0, \pi)$
- (2) *Critical Case* : $\alpha = 1/2 \implies \xi_L \xrightarrow{d} \zeta_\beta^C, \beta = \beta(E_0)$
- (2)' *Critical Case* : $\alpha = 1/2 \implies \xi_L \xrightarrow{d} \zeta_\beta^G, \beta = \beta(E_0)$
- (3) *PP case* : $\alpha < 1/2 \implies \xi_L \xrightarrow{d} \text{Poisson}(d\lambda/\pi)$

Remark 2.5 [15] では *CMV* 行列について (1)(2)(3) が¹⁰, [21] では離散シュレーディンガー作用素について (2)' がそれぞれ示されている. また, (1) はより一般のジャコビ行列 [4] や連続系の合金モデル [7] についても示されている.

$\alpha = 1/2$ のとき, $\beta(E_0)$ はリアプノフ指数¹¹ の逆数に等しい: $\beta(E_0) = 1/\gamma(E_0)$. $\beta(E_0)$ と $\sigma(H) \cap [0, \infty)$ との関係を図 1 に示す.

$\beta(E)$ は E について単調増加で $\lim_{E \downarrow 0} \beta(E) = 0, \lim_{E \uparrow \infty} \beta(E) = \infty$ であるから, 定理 2.4 の系として $\zeta_\beta^C \stackrel{d}{=} \zeta_\beta^G, \forall \beta > 0$ が得られる. [34] ではこの事実のより見通しの良い別証明が両者の間のカップリングの構成により行われている.

⁹ H の IDS は $N(E) = \pi^{-1}\sqrt{E}$ であることを考慮して, unfolding を行なった.

¹⁰[15] での (3) の証明は定理 2.1 の方法に基づいており, Prüfer angle を用いて Minami's estimate が示されている.

¹¹ここでは, $H\phi = E_0\phi$ の解の減衰オーダーを $\phi(x) \sim |x|^{-\gamma(E_0)}$ の意味で表す指数.

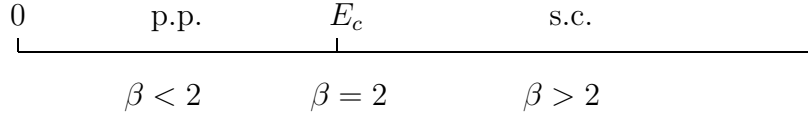


図 1: スペクトルと $\beta(E_0)$ との関係.

Remark 2.6

- (1) $Sine_\beta \xrightarrow{\beta \uparrow \infty} \xi_{clock} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2n\pi + unif[0, 2\pi]}$ であることは容易にわかる.
- (2) Allez-Dumaz [2] は $Sine_\beta \xrightarrow{\beta \downarrow 0} Poisson(d\lambda/2\pi)$ を示している.
- (3) Benaych-Georges-Péché [5], Trinh-Nakano [27] は $G_\beta E$ の n 点のなす点過程 ξ_n において同様の問題を考え, $n\beta = const$ という関係を保ちながら $n \uparrow \infty, \beta \downarrow 0$ とするとき $\xi_n \xrightarrow{d} Poisson(n(E_0)d\lambda)$ であることを示した. ここで, $n(E_0)$ は対応するジャコビ行列の状態密度.

定理 2.4 の証明の方針は, やはり Prüfer angle の挙動を調べることである. 以下にその概略を説明する. x_t を方程式 $H_L x_t = \kappa^2 x_t$ ($\kappa > 0$) の解とし, Prüfer 変数を用いて書き表す.

$$\begin{pmatrix} x_t \\ x'_t/\kappa \end{pmatrix} = r_t \begin{pmatrix} \sin \theta_t(\kappa) \\ \cos \theta_t(\kappa) \end{pmatrix}, \quad \theta_0(\kappa) = 0.$$

relative Prüfer phase $\Psi_L(\lambda)$ を次のように定義する.

$$\Psi_L(\lambda) := \theta_L(\kappa_\lambda) - \theta_L(\kappa_0), \quad \kappa_0 := \sqrt{E_0}, \quad \kappa_\lambda := \kappa_0 + \frac{\lambda}{L}.$$

$\theta_L(\kappa_0) = m(\kappa_0, L)\pi + \phi(\kappa_0, L)$, $m(\kappa_0, L) \in \mathbf{Z}$, $\phi(\kappa_0, L) \in [0, \pi)$ と書くと, スツルムの振動定理により, ξ_L のアトムのなす集合は

$\{\Psi_L^{-1}(n\pi - \phi(\kappa_0, L)) \mid n \geq n(L) - m(\kappa_0, L)\}$ に等しい. よって, この問題は $(\Phi_L(\lambda), \phi(\kappa_0, L))$ の同時分布の挙動を調べることに帰着される. L の代わりに n と書いて, 次のスケーリングを考える. $\Psi_t^{(n)}(\lambda) := \theta_{nt}(\kappa_\lambda) - \theta_{nt}(\kappa_0)$, $n > 0, t \in [0, 1]$. $\theta_t(\kappa)$ の満たす積分方程式により,

$$\Psi_t^{(n)}(\lambda) \sim \lambda t + \frac{1}{2\kappa_0} Re \int_0^{nt} a(s) (e^{2i\theta_s(\kappa_\lambda)} - e^{2i\theta_s(\kappa_0)}) F(X_s) ds.$$

伊藤の公式から導かれる関係式 [20]

$$\begin{aligned} e^{2i\kappa s} F(X_s) ds &= d(e^{2i\kappa s} g_\kappa(X_s)) - e^{2i\kappa s} \nabla g_\kappa(X_s) dX_s \\ g_\kappa &:= (L + 2i\kappa)^{-1} F, \quad L : \text{generator of } \{X_s\} \end{aligned}$$

を用いて部分積分を繰り返すと,

$$\Psi_t^{(n)}(\lambda) \sim \lambda t + n^{\frac{1}{2}-\alpha} \frac{1}{2\kappa_0} \operatorname{Re} \int_0^t s^{-\alpha} (e^{2i\Psi_s^{(n)}(\lambda)} - 1) \nabla g_\kappa dX_s.$$

あとは第二項の挙動を調べれば良いが, $(\frac{1}{2} - \alpha)$ の正負に応じて次のようになる.

- (1) AC case ($\alpha > \frac{1}{2}$) : $\Psi_t^{(n)}(\lambda) \rightarrow \lambda t$, a.s.
- (2) Critical Case ($\alpha = \frac{1}{2}$) : $\Psi_t^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{d} \Psi_t(\lambda)$: solution to SDE,
- (3) PP case ($\alpha < \frac{1}{2}$) : $\Psi_t^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{d}$ Poisson jump process ¹².

2.3 その他の話題

(1) **Random Band Matrices** : ランダムジャコビ行列 (局在系) とランダム行列 (非局在系) との間をつなぐモデルとして考案されたもので, 1次元系において各サイトから距離 W 以内の点にランダムなホッピングを許すものである. N をシステムサイズ, $W = O(N^\alpha)$ ($0 < \alpha < 1$) とおいたとき, 物理学者により「固有関数は $\alpha < 1/2$ のときに局在, $\alpha > \frac{1}{2}$ のときに非局在」と予想されている [11]. 現時点では $\alpha < 1/8$ ならば局在することが証明され [30], 最近になって $\alpha > 1/2$ ならば ξ_L の相関関数が GUE のそれに収束することが示されたようである [31].

(2) **Shape of eigenvectors** : 固有関数の漸近形をより具体的に求める研究が critical coupling constant を持つ 1次元格子上的ランダムシュレーディンガー作用素 [29], ホワイトノイズをポテンシャルに持つ 1次元連続系 [9] において最近なされており, 大変興味深い.

参考文献

- [1] Aizenman, A., Warzel, S., : Random Operators, Disorder Effects on Quantum Spectra and Dynamics, Graduate Studies in Mathematics **168**, AMS 2015.
- [2] Allez, R., Dumaz, L., : From sine kernel to Poisson statistics, Electron. J. Probab. **19**(2014), 1-25.

¹²さらに

$$\Psi_t^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{d} \pi \int_{[0,t] \times [0,\lambda]} \hat{P}(dsd\lambda'), \quad \hat{P} := \text{Poisson}(\pi^{-1} 1_{[0,1]}(s) dsd\lambda')$$

が成り立つので, 定理 2.2(2) と類似の結果が成り立つと予想される.

- [3] Abrahams, E., Anderson, P.W., Licciardelloand, D.C., and Ramakrishnan, T.V., : Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673(1979).
- [4] Avila, A., Last, Y., and Simon, B., : Bulk Universality and Clock Spacing of zeros for Ergodic Jacobi Matrices with A.C. spectrum, *Anal. PDE* **3**(2010) no.1, 81-108.
- [5] Benaych-Georges, F., P  ch  , S., : Poisson statistics for matrix ensembles at large temperature, *J. Stat. Phys.* **161**(2010) no.3, 633-656c.
- [6] Carmona, R., Lacroix, J., : *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*, Probability and ites applications, Birkhäuser, 1990.
- [7] Chulaevsky, V., Nakano, F., : Clock statistics for 1d Schrödinger operators, arXiv.1605.08825.
- [8] Cycon, H.L., Froese, R.G., Kirsch, W., Simon, B., : *Schrödinger Operators*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag 1987.
- [9] Dumaz, L, Labb  , C., : Localization of the continuous Anderson Hamiltonian in 1-d, preprint.
- [10] Dumitriu, I., Edelman, A., : Matrix models for beta ensembles, *J. Math. Phys.* **43**(2002)(11), 5830-5847.
- [11] Fyodorov, Y.V., Mirlin, A.D., : Scaling properties of localization in random band matrices, A σ -model approach, *Phys. Rev. Lett.* **67**(18), 2405-2409 (1991).
- [12] Germinet, F., Klopp, F., : Enhanced Wegner and Minami estimates and eigenvalue statistics of random Anderson models at spectral edges, *Ann. Henri Poincaré* **14**(2013) no.5, 1263-1285.
- [13] Killip, R., Nakano, F., : Eigenfunction statistics in the localized Anderson model, *Annales Henri Poincaré*. **8**(2007) no.1, 27-36.
- [14] Killip, R., Nenciu, I., : Matrix models for circular ensembles, *IMRN*(2004), 2665-2701.
- [15] Killip, R., Stoiciu, M., : Eigenvalue statistics for CMV matrices : from Poisson to clock via random matrix ensembles, *Duke Math.* **146**(2009) no. 3, 361-399,
- [16] Kirsch, W., : An invitation to random Schrödinger operators, in *Random Schrödinger Operators*, Panoramas et Synth  ses 25, Société mathématique de France 2008.

- [17] Kotani, S., : Spectral problems of ergodic Schrödinger operators, lecture at Beijing Normal Univ. and Tsinghua Univ., 2015.
- [18] Kotani, S., Nakano, F., : Level statistics for the one-dimensional Schrödinger operator with random decaying potentials, *Interdisciplinary Mathematical Sciences* **17**(2014), 343-373.
- [19] Kotani, S., Nakano, F., : Poisson statistics for 1d Schrödinger operators with random decaying potentials, *Electron. J. Probab.* **22**(2017) no.69, 1-31.
- [20] Kotani, S. Ushiroya, N.: One-dimensional Schrödinger operators with random decaying potentials, *Comm. Math. Phys.* **115**(1988), 247-266.
- [21] Kritchevski, E., Valkó, B., Virág, B., : The scaling limit of the critical one-dimensional random Schrödinger operators, *Comm. Math. Phys.* **314**(2012), 775-806.
- [22] Minami, N., : Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight-binding model, *Comm. Math. Phys.* **177**(1996), 709-725.
- [23] Nakano, F., : Distribution of localization centers in some discrete random systems, *Rev. Math. Phys.* **19**(2007) no.9, 941-965.
- [24] Nakano, F., : Infinite divisibility of random measures for some random Schrodinger operators, *Osaka J. Math.* **46**(2009) no.3, 845-862.
- [25] Nakano, F., : Level statistics for one-dimensional Schrödinger operators and Gaussian beta ensemble, *J Stat. Phys.* **156**(2014), 66-93.
- [26] 中野史彦 : 量子ホール効果の数学的研究の現状、数理物理 2014
- [27] Nakano, F., and Trinh, K. D., : Gaussian beta ensembles at high temperature : eigenvalue fluctuations and bulk statistics, arxiv.1611.09476.
- [28] Pastur, L., Figotin, A., : Spectra of Random and Almost-Periodic Operators, A series of comprehensive studies in Mathematics 297, Springer-Verlag, 1992.
- [29] Rifkind, B., Virág, B., : Eigenvectors of the 1-dimensional critical random Schrödinger operator, to appear in GAFA.
- [30] Schenker, J., : Eigenvector Localization for Random Band Matrices with Power Law Band Width, *Comm. Math. Phys.* **290**(2009), 1065-1097.
- [31] Shcherbina, M. : Local eigenvalue statistics of 1d random band matrices,
- [32] 上木直昌 : 確率解析とランダムシュレーディンガー作用素、数学6 6 巻4号、2014年10月

- [33] Valkó, B. and Virág, V. : Continuum limits of random matrices and the Brownian carousel, *Invent. Math.* **177**(2009), 463-508.
- [34] Valkó, B. and Virág, V. : The Sine $_{\beta}$ operator, *Invent. Math.* **209**(2017), 275-327.