Gauss膜モデルの漸近挙動について

坂川 博宣 (慶應義塾大学) *

概 要

$\Delta\phi$ モデルと呼ばれる膜/界面の確率モデルにおいて相互作用ポテンシャルを 2 次関数と取った場合に現れる格子上の Gauss 確率場 (Gauss 膜モデル) に対し，その定義と基本的な性質，および現在までに行われている研究を紹介する．

1 はじめに

異なる複数の相が共存している状況で現れる相分離界面の確率モデルの研究は統計力学に関連した確率論における主要な話題の一つであるが，1990 年代後半から非常に盛んに研究が行われてきた確率モデルとして $\nabla\phi$ 界面モデルが挙げられる．これは d 次元正方格子上の Gibbs 確率場で，界面の高さを表す変数 ϕ に対し相互作用が $\nabla\phi$（∇ は離散 gradient）から定まり，エネルギーが (形式的に) 次の形で与えられる．

$$H(\phi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} V(\nabla\phi_x)$$

V は相互作用ポテンシャルである．特に V が 2 次関数の場合は対応する Gibbs 測度は d 次元正方格子上の離散 Gauss 自由場に一致し，このことから Gauss 確率場やランダムウォークの研究にも深く関連して発展してきた．一方で，半屈曲性膜 (semi-flexible membrane) や半屈曲性高分子 (semi-flexible polymer) と呼ばれるものでは，$\nabla\phi$ モデルのように相互作用が界面の傾きだけから決まるのではなくその曲率も考慮に入れる必要があり，エネルギーが (形式的に) 次の形で与えられる．

$$H(\phi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \left\{\kappa_1 V_1(\nabla\phi_x) + \kappa_2 V_2(\Delta\phi_x)\right\} \tag{1.1}$$

ここで V_1, V_2 は相互作用ポテンシャルであり，Δ は $\mathbb{Z}^d$ 上の離散 Laplacian を表す．パラメーター $\kappa_1 > 0$ は lateral tension, $\kappa_2 > 0$ は bending rigidity と呼ばれる量である (cf. [20], [26], [27], [31], etc.)．特に $\kappa_1 > 0$ かつ $\kappa_2 = 0$ の場合は $\nabla\phi$ モデルに一致し，$\kappa_1 = 0$ かつ $\kappa_2 > 0$ の場合は $\Delta\phi$ モデルと呼ばれる．雑に言って $\nabla\phi$ モデルでは界面のエネルギーが微視的な界面 ϕ の表面積から定まるのに対し，$\Delta\phi$ モデルでは膜の表面積が保存されエネルギーが ϕ の曲率によって定まる状況を考えている．

$\Delta\phi$ モデルにおいても相互作用ポテンシャルが 2 次関数の場合は対応する Gibbs 測度は特別な共分散行列を持つ Gauss 確率場となる．このモデルは $\nabla\phi$ モデルとの類似性を多く持つ一方でモデル特有の技術的な困難があり，その研究は $\nabla\phi$ モデルと比べて遅れている．以下，Section 2 ではモデルの定義を与え，その基本的な性質を説明する．Section 3, 4 では様々な外場を加えた場合の場の振る舞いについて現在までに行われている研究を紹介する．また，$d = 1$ の場合は $\Delta\phi$ モデルは集積ランダムウォーク (integrated random walk) として表すことができ，Gauss 確率場の研究とは毛色が変わってくるが，1 次元の場合の特性を用いることにより様々な結果が知られている．これについて

*慶應義塾大学理工学部数理科学科, 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, *E-mail address*: sakagawa@math.keio.ac.jp

は Section 5 で簡単に紹介する．以下では C, C' などは考えている系のサイズ (N とする) に依らない正定数を表し, 場所によって変わるものとする (他のパラメーターには依存することもある).

2 モデルの定義と基本的性質

まずは記号を準備する．$\Delta = \{\Delta(x,y)\}_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の離散 Laplacian とする．その核は

$$\Delta(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & |x-y| = 1 \text{ のとき} \\ -1 & x = y \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で与えられ，関数 $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ に対し $(\Delta f)(x) := \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \Delta(x,y)f(y), x \in \mathbb{Z}^d$ と定義する．また，集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ と $k \in \mathbb{N}$ に対し，Λ の幅 k の外部/内部境界を次で定義する．

$$\partial_k^+\Lambda = \{x \notin \Lambda; |y-x| \le k \text{ for some } y \in \Lambda\}$$

$$\partial_k^-\Lambda = \{x \in \Lambda; |y-x| \le k \text{ for some } y \notin \Lambda\}$$

幅 1 のときは単に $\partial^+\Lambda := \partial_1^+\Lambda$, $\partial^-\Lambda := \partial_1^-\Lambda$ と書き，$\overline{\Lambda} := \Lambda \cup \partial^+\Lambda$ と定める．

いま，d 次元正方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上の配置 $\phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ を d 次元超平面 $\mathbb{Z}^d$ から見た $d+1$ 次元空間内の膜/界面の高さを表す変数と解釈し，$\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し次で与えられるエネルギー（Hamiltonian）を考える．

$$H_\Lambda^\Delta(\phi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} V(\Delta\phi_x)\Big|_{\phi\equiv 0 \text{ on } \Lambda^c} = \sum_{x\in\overline{\Lambda}} V(\Delta\phi_x)\Big|_{\phi\equiv 0 \text{ on } \partial_2^+\Lambda} \tag{2.1}$$

$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は相互作用ポテンシャルであり，Λ の外側には 0-境界条件を課している．また，一般性を失うことなく $V(0) = 0$ は仮定してよい．$\Delta\phi$ モデルは対応する $\mathbb{R}^\Lambda$ 上の有限領域 Gibbs 測度として以下で定義される．

$$P_\Lambda(d\phi) = \frac{1}{Z_\Lambda} \exp\{-H_\Lambda^\Delta(\phi)\} \prod_{x\in\Lambda} d\phi_x \tag{2.2}$$

ここで，$d\phi_x$ $(x \in \mathbb{Z}^d)$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を表し，Z_Λ は正規化定数である．$\nabla\phi$ モデルのような最近接相互作用を持つモデルとの違いとして，このモデルでは距離 2 の Markov 性を持ち，外部条件として Λ の外側の距離 2 までの配置が影響を与えることに注意する．特に，$A, B \subset \Lambda$ が $\mathrm{dist}(A,B) > 2$ を満たすならば $\{\phi_x\}_{x\in A}$ と $\{\phi_x\}_{x\in B}$ は条件付き測度 $P_\Lambda(\,\cdot\,|\sigma(\{\phi_x; x \notin A\cup B\}))$ の下で独立となる．

以下, Section 4 の終わりまで相互作用ポテンシャルが 2 次関数 $V(r) = \frac{1}{2}r^2$ の場合を考える．このとき，Hamiltonian (2.1) を変形すると次が成り立つ．

$$\begin{aligned} H_\Lambda^\Delta(\phi) &= \frac{1}{2}\sum_{x\in\overline{\Lambda}} \Big(\sum_{y\in\Lambda} \Delta(x,y)\phi_y\Big)\Big(\sum_{z\in\Lambda} \Delta(x,z)\phi_z\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{y\in\Lambda}\sum_{z\in\Lambda} \Delta^2(y,z)\phi_y\phi_z \\ &= \frac{1}{2}\langle \phi, \Delta_\Lambda^2\phi\rangle_\Lambda \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\Lambda$ は $l^2(\Lambda)$ 内積である．$\Delta^2 = \Delta\Delta$ は $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ 行列の積であり Δ_Λ^2 は Δ^2 の $\Lambda\times\Lambda$ への制限を表す．同様に Δ_Λ は Δ の $\Lambda\times\Lambda$ への制限を表す．特に $\Delta_\Lambda^2 \ne (\Delta_\Lambda)^2$ であることに注意しておく．この式から相互ポテンシャルが 2 次関数で 0-境界条件の場合は有限 Gibbs 測度 P_Λ は平均 (ベクトル) 0, 共分散行列 $(\Delta_\Lambda^2)^{-1}$ を持つ Λ 上の Gauss 場に他ならないことが分かる．これは Gauss 膜モデル (Gaussian membrane model, 以下 GMM と略記) と呼ばれる．

注意 2.1. Gibbs 測度の定義 (2.2) においては $H_\Lambda^\Delta(\phi)$ ではなく $\beta H_\Lambda^\Delta(\phi)$ ($\beta > 0$ は逆温度) を考える方が自然かもしれないが，ポテンシャルが 2 次関数の場合は簡単な変数変換 $\sqrt{\beta}\phi \leftrightarrow \phi$ を行えば定数倍の違いがあるだけなので $\beta = 1$ と考える．2 次関数の係数についても同じである．

注意 2.2. $\nabla\phi$ モデルにおいて相互ポテンシャルが 2 次関数で 0-境界条件を課した Hamiltonian は次で与えられる．

$$H_\Lambda^\nabla(\phi) := \frac{1}{8d}\sum_{\substack{\{x,y\}\cap\Lambda\neq\emptyset \\ |x-y|=1}}(\phi_x-\phi_y)^2\Big|_{\phi\equiv 0 \text{ on } \partial^+\Lambda} = \frac{1}{2}\langle\phi, (-\Delta_\Lambda)\phi\rangle_\Lambda \tag{2.4}$$

最後の等号は部分和の公式による．従って対応する有限 Gibbs 測度は平均 0, 共分散行列 $(-\Delta_\Lambda)^{-1}$ を持つ Λ 上の Gauss 場となる．これは離散 Gauss 自由場 (discrete Gaussian free field, 以下 DGFF と略記) と呼ばれ，次の相関関数のランダムウォーク表現が成り立つことがよく知られている (cf. [16, Chapter 8], [17, Section 3], etc.).

$$(-\Delta_\Lambda)^{-1}(x,y) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{\infty} I(S_n = y, n < \tau_\Lambda)\Big] \tag{2.5}$$

ここで $\{S_n\}_{n\geq 0}$ は $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークであり, $\mathbb{P}_x, \mathbb{E}_x$ は出発点を $x \in \mathbb{Z}^d$ としたときの分布，期待値を表す．$\tau_A = \inf\{n \geq 0; S_n \notin A\}$ は $A \subset \mathbb{Z}^d$ からの脱出時刻である．

$\Delta^2(x,y)$ は $x \neq y$ のとき正と負の両方の値を取り得るため，(2.3) より分かる重要な性質として P_Λ は強磁性的もしくは反強磁性的なスピン系ではないということが挙げられる．特に格子上のスピン系の解析での基本的な道具である FKG 不等式などの相関不等式や，確率場の単調性の成立条件 (cf. [19, Appendix B], etc.) を P_Λ は満たさない．また，格子上の Gauss 場の解析の道具として有用な相関関数のランダムウォーク表現も DGFF の場合と異なり成立しない (cf. [18, Chapter13])．これらのことから GMM は DGFF と比べて数学的に非常に扱いにくいモデルであるといえる．

以下では $\Lambda = \Lambda_N := [-N,N]^d \cap \mathbb{Z}^d$ の場合は P_{Λ_N} を P_N, Δ_{Λ_N} を Δ_N のように添え字を単に N と書くものとする．まずランダムウォーク表現 (2.5) より $(-\Delta_N)^{-1}$ の振る舞いとして次がよく知られている (cf. [25, Proposition 6.3.5]).

$$(-\Delta_N)^{-1}(0,x) = \begin{cases} N+1-|x| \quad d=1 \text{ のとき} \\ C_2(\log N - \log(|x|+1)) + O(|x|^{-1}) \quad d=2 \text{ のとき} \\ C_d(|x|^{2-d} - N^{2-d}) + O(|x|^{1-d}) \quad d\geq 3 \text{ のとき} \end{cases}$$

$C_d > 0$ は次元にのみ依存した定数である．これより $d \geq 3$ の場合は $N \to \infty$ のとき

$$(-\Delta_N)^{-2}(0,0) = \sum_{x\in\Lambda_N}((-\Delta_N)^{-1}(0,x))^2 \asymp C\sum_{r=1}^{N} r^{d-1}\Big(\frac{1}{r^{d-2}}\Big)^2 = C\sum_{r=1}^{N} r^{-d+3}$$

であり，同様の計算が $d = 1,2$ でもできる．$(-\Delta_N)^{-2}$ に対してはより詳しい評価が可能であり，$(-\Delta_N)^{-2}$ と $(\Delta_N^2)^{-1}$ を比較することにより次が成り立つ (cf. [24, Section 4]).

命題 2.1.

$$\mathrm{Var}_{P_N}(\phi_0) = (\Delta_N^2)^{-1}(0,0) = \begin{cases} G + O(N^{4-d}) \quad d \geq 5 \text{ のとき} \\ \frac{8}{\pi^2}\log N + O(1) \quad d = 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$C_- N^{4-d} \le \mathrm{Var}_{P_N}(\phi_0) \le C_+ N^{4-d} \quad d = 1, 2, 3 \text{ のとき}$$

ここで $G := (-\Delta)^{-2}(0,0)$ であり，これは $d \ge 5$ のとき有限となる．また，C_-, C_+ は次元に依存した (異なる) 正定数である．

注意 2.3. $d = 2, 3$ における $(\Delta_N^2)^{-1}$ のより詳しい評価が最近 Müller-Schweiger [29] によって与えられているが，いずれにせよ $d = 2, 3$ では $\mathrm{Var}_{P_N}(\phi_0)$ の正確な振る舞いは証明されていない．

この評価より P_N の下で，$d \ge 5$ のときは $N \to \infty$ としても分散が有限なので場は局在 (localized) であるといい，$d \le 4$ では $N \to \infty$ のとき分散が発散するので場は非局在 (delocalized) であるという．$d \ge 3$ のときの GMM の分散の振る舞いは $d-2$ 次元での DGFF の分散の振る舞いに一致する (cf. [16], [17])．また，命題 2.1 より $d \ge 5$ の場合のみ対応する無限領域 Gauss 測度 $Q_\infty \sim \mathcal{N}(0, (-\Delta)^{-2})$ が存在し，更に次の DLR 方程式も成立する (cf. [32, Section 2])．任意の $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し

$$Q_\infty\big(\ \cdot \ \big|\ \mathcal{F}_{\Lambda^c}\big)(\psi) = P_\Lambda^\psi(\ \cdot\ ) \ \text{ for } Q_\infty\text{- a.e. } \psi$$

ただし $A \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathcal{F}_A := \sigma(\{\phi_x; x \in A\})$ と定め，P_Λ^ψ は有限 Gibbs 測度の定義 (2.1), (2.2) で境界条件を $\psi \in \mathbb{R}^{\partial_2^+ \Lambda}$ と取ったものである．Q_∞ の大きな特徴としては，場の相関関数の減衰が多項式オーダーであり長距離相関を持つことが挙げられる．これによって場が独立，もしくは相関関数が指数的減衰を示すような場合とは異なる様々な現象が現れる．

命題 2.2 ([32])**.** $d \ge 5$ とする．ある定数 $\gamma_d > 0$ が存在して次が成り立つ．

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{(-\Delta)^{-2}(0,x)}{|x|^{4-d}} = \gamma_d$$

注意 2.4. Gauss 確率場に対する FKG 不等式成立のためにはその相関関数が常に非負となることが必要十分条件であることがよく知られている (cf. [30])．$d \ge 3$ のとき $(-\Delta)^{-1}$ は存在し，$\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークの Green 関数で表せるため各成分は常に正であり，$d \ge 5$ のとき Q_∞ の下では, 任意の $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathrm{Cov}_{Q_\infty}(\phi_x, \phi_y) = (-\Delta)^{-2}(x,y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} (-\Delta)^{-1}(x,z)(-\Delta)^{-1}(z,y) \in (0, \infty)$ となり FKG 不等式は成立する．一方で有限領域の Gauss 測度 $P_\Lambda \sim \mathcal{N}(0, (\Delta_\Lambda^2)^{-1})$ の下では，$\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ の形によって $(\Delta_\Lambda^2)^{-1}(x,y)$ が正，負両方の値をとることがあり得る．つまり $\Delta\phi$ モデルでは相互作用ポテンシャルが 2 次関数で $d \ge 5$ の無限領域 Gibbs 測度を考える場合のみ FKG 不等式の成立が保証されている．

次節以降では GMM で様々な外場を加えた場合に場の局在/非局在がどのように変化するかという問題を考える．

3　ピンニングポテンシャルによる局在化

ここではピンニング (pinning) と呼ばれる場を高さ 0 の周りに引きつけるような非常に弱い力を加えたときに場が局在化するかという問題について考える．一般に，自己ポテンシャル $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を加えた有限 Gibbs 測度は次で定義される．

$$P_\Lambda^U(d\phi) = \frac{1}{Z_\Lambda^U} \exp\big\{-H_\Lambda^\Delta(\phi) - \sum_{x \in \Lambda} U(\phi_x)\big\} \prod_{x \in \Lambda} d\phi_x \tag{3.1}$$

Z_Λ^U は正規化定数である．ここでは角井戸型ピンニングとよばれるポテンシャル $U_1(r) = -bI(|r| \le a)$ ($a \ge 0,\ b \ge 0$) を考え，対応する Gibbs 測度と分配関数 (正規化定数) $P_\Lambda^{U_1},\ Z_\Lambda^{U_1}$ をそれぞれ $P_\Lambda^{a,b}$, $Z_\Lambda^{a,b}$ と書く．また，δ-ピンニングと呼ばれるモデルを次で定義する．

$$\widetilde{P}_\Lambda^\varepsilon(d\phi) = \frac{1}{\widetilde{Z}_\Lambda^\varepsilon} \exp\{-H_\Lambda^\Delta(\phi)\} \prod_{x\in\Lambda} (\varepsilon\delta_0(d\phi_x) + d\phi_x)$$

δ_0 は点 0 における Dirac 測度であり，$\varepsilon \ge 0$ はピンニングの強さを表すパラメーターである．$\widetilde{Z}_\Lambda^\varepsilon$ は正規化定数を表す．特に $\widetilde{P}_\Lambda^\varepsilon$ は $P_\Lambda^{a,b}$ において関係 $2a(e^b - 1) = \varepsilon$ を保って $a \to 0,\ b \to \infty$ と極限を取った弱収束極限として得られることに注意する．このとき以下が成り立つ．

定理 3.1. $d \ge 1$ とする．任意の $a \ge 0,\ b \ge 0,\ \varepsilon \ge 0$ に対し自由エネルギー

$$F(a,b) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|} \log \frac{Z_N^{a,b}}{Z_N}, \quad \widetilde{F}(\varepsilon) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|} \log \frac{\widetilde{Z}_N^\varepsilon}{Z_N}$$

が存在し，次が成り立つ．

(a) $d = 1$ のとき．ある $\varepsilon_c > 0$ が存在して，任意の $\varepsilon > \varepsilon_c$ に対し $\widetilde{F}(\varepsilon) > 0$, かつ任意の $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_c$ に対し $\widetilde{F}(\varepsilon) = 0$ が成り立つ．また，任意の $a > 0$ に対し，ある $b_c = b_c(a) > 0$ が存在して任意の $b > b_c$ に対し $F(a,b) > 0$, かつ任意の $0 \le b \le b_c$ に対し $F(a,b) = 0$ が成り立つ．

(b) $d \ge 2$ のとき．任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\widetilde{F}(\varepsilon) > 0$ となる．また，任意の $a > 0,\ b > 0$ に対し $F(a,b) > 0$ となる．

この結果は δ-ピンニングで $d = 1$ の場合は Caravenna-Deuschel [9] による．それ以外の場合は Sakagawa [35] による．また，Sakagawa [33] でも $d \ge 4$ における δ-ピンニングの場合について論じている．この結果から自由エネルギーが正か 0 かという意味において，GMM では $d = 1$ の場合のみピンニングの強さによって局在/非局在の相転移が起き，$d \ge 2$ ではその強さに関わらず少しでもピンニング効果が加わると場が局在化されることが分かる．特に $d \ge 3$ の時，GMM の分散の挙動は DGFF の $d-2$ 次元の場合に対応する．DGFF でピンニングを加えた場合は任意の $d \ge 1$ で常に局在化することが知られており (cf. [37, Section 5]), このことから GMM では $d \ge 3$ ではピンニングを加えれば常に局在化することが類推される．定理 3.1 で最も興味深いのは $d = 1, 2$ の場合である．特に $d = 2$ ではその大きな揺動に関わらず少しでもピンニングを加えれば場が局在化する．

次に，ピンニングの効果が加わった点の密度の期待値を

$$\rho_N(a,b) := \frac{1}{|\Lambda_N|} E^{P_N^{a,b}} [|\{x \in \Lambda_N; |\phi_x| \le a\}|]$$
$$\widetilde{\rho}_N(\varepsilon) := \frac{1}{|\Lambda_N|} E^{\widetilde{P}_N^\varepsilon} [|\{x \in \Lambda_N; \phi_x = 0\}|]$$

で表すと

$$\frac{1}{|\Lambda_N|} \log \frac{Z_N^{a,b}}{Z_N} = \frac{1}{|\Lambda_N|} \int_0^b \frac{\partial}{\partial b'} \log Z_N^{a,b'} db' = \int_0^b \rho_N(a,b') db'$$
$$\frac{1}{|\Lambda_N|} \log \frac{\widetilde{Z}_N^\varepsilon}{Z_N} = \frac{1}{|\Lambda_N|} \int_0^\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon'} \log \widetilde{Z}_N^{\varepsilon'} d\varepsilon' = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon'} \widetilde{\rho}_N(\varepsilon') d\varepsilon'$$

が成り立つ．このことと定理 3.1 および $\rho_N,\ \widetilde{\rho}_N$ の単調性を組み合わせると次の意味での局在化の表現が得られる．

系 3.1. (a) $d=1$ のとき．ある $\varepsilon_c>0$ が存在して，任意の $\varepsilon>\varepsilon_c$ に対し $\liminf_{N\to\infty}\widetilde{\rho}_N(\varepsilon)>0$, かつ任意の $0\le\varepsilon<\varepsilon_c$ に対し $\lim_{N\to\infty}\widetilde{\rho}_N(\varepsilon)=0$ が成り立つ．また，任意の $a>0$ に対し，ある $b_c=b_c(a)>0$ が存在して任意の $b>b_c$ に対し $\liminf_{N\to\infty}\rho_N(a,b)>0$, かつ任意の $0\le b<b_c$ に対し $\lim_{N\to\infty}\rho_N(a,b)=0$ が成り立つ．

(b) $d\ge 2$ のとき．任意の $\varepsilon>0$ に対し $\liminf_{N\to\infty}\widetilde{\rho}_N(\varepsilon)>0$ となる．また，任意の $a>0,\,b>0$ に対し $\liminf_{N\to\infty}\rho_N(a,b)>0$ となる．

定理 3.1 の証明についてであるが，自由エネルギーの存在は場が距離 2 の Markov 性を持つことを用いた優加法性の議論によって示される．以下では [35] に従って $d\ge 2$ で角井戸型ピンニングを加えた場合に自由エネルギーが正となることのおおまかな証明を与える．

<u>定理 3.1 の証明の概略</u>

まず基本的なアイデアとして ϕ 場と $\nabla\phi$ 場の両方に質量項を加えて場を局在化させるような "正質量"モデルを導入する．$m\ge 0$ に対し，

$$H_{N,m}(\phi)=H_N^{\Delta}(\phi)+2m^2H_N^{\nabla}(\phi)+\frac{1}{2}m^4\sum_{x\in\Lambda_N}(\phi_x)^2$$

で与えられる Hamiltonian を考え，自己ポテンシャル $U:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を持つ対応する有限領域 Gibbs 測度を以下で定義する．

$$P_{N,m}^U(d\phi)=\frac{1}{Z_{N,m}^U}\exp\bigl\{-H_{N,m}(\phi)-\sum_{x\in\Lambda_N}U(\phi_x)\bigr\}\prod_{x\in\Lambda_N}d\phi_x$$

$$Z_{N,m}^U=\int_{\mathbb{R}^{\Lambda_N}}\exp\bigl\{-H_{N,m}(\phi)-\sum_{x\in\Lambda_N}U(\phi_x)\bigr\}\prod_{x\in\Lambda_N}d\phi_x$$

また，自己ポテンシャルを加えない場合は $P_{N,m}$, $Z_{N,m}$ と書く．いま自己ポテンシャルを $U_1(r)=-bI(|r|\le a)$ と取り，任意の $m\ge 0$, U に対し $Z_{N,m}^U\le Z_N^U$ が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned}
F(a,b)&:=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{Z_N^{U_1}}{Z_N}\\
&\ge\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{Z_{N,m}^{U_1}}{Z_N}\\
&\ge\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{Z_{N,m}^{U_1}}{Z_{N,m}}+\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{Z_{N,m}}{Z_N}
\end{aligned}\tag{3.2}$$

と自由エネルギーは下から評価できる．右辺の第 1 項は正質量モデルでピンニングを加えた場合の自由エネルギーであり，第 2 項は 0 以下の量でこれが質量項を加えたコストに対応する．

(3.2) の第 1 項は Jensen の不等式から

$$\log\frac{Z_{N,m}^{U_1}}{Z_{N,m}}=\log E^{P_{N,m}}\Bigl[\exp\bigl\{-\sum_{x\in\Lambda_N}U_1(\phi_x)\bigr\}\Bigr]\ge b\sum_{x\in\Lambda_N}P_{N,m}(|\phi_x|\le a)\tag{3.3}$$

と評価できる．いま，$P_{N,m}$ について考えるが，$H_\Lambda^{\Delta}(\phi)$ の変形として前述のものの他に次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
H_\Lambda^{\Delta}(\phi)&=\frac{1}{2}\sum_{x\in\overline{\Lambda}}(\Delta\phi_x)^2\Big|_{\phi\equiv 0\text{ on }\partial_2^+\Lambda}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{x\in\Lambda}\Bigl(\sum_{y\in\Lambda}\Delta(x,y)\phi_y\Bigr)\Bigl(\sum_{z\in\Lambda}\Delta(x,z)\phi_z\Bigr)+\frac{1}{2}\sum_{x\in\partial^+\Lambda}\Bigl(\sum_{y\in\Lambda}\Delta(x,y)\phi_y\Bigr)\Bigl(\sum_{z\in\Lambda}\Delta(x,z)\phi_z\Bigr)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\langle \phi, (-\Delta_\Lambda)^2\phi\rangle_\Lambda + B_\Lambda(\phi)$$

ここで，

$$B_\Lambda(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\partial^+\Lambda}\Big(\frac{1}{2d}\sum_{\substack{y\in\Lambda\\|x-y|=1}}\phi_y\Big)^2$$

であり，特に $\Lambda = \Lambda_N$ の場合は

$$B_N(\phi) = \sum_{x\in\partial^-\Lambda_N}\frac{r_N(x)}{8d^2}(\phi_x)^2$$

ただし，$r_N(x) = |\{y \in \partial^+\Lambda_N; |y-x| = 1\}|$ である．(2.4) と合わせると質量項を加えた Hamiltonian $H_{N,m}(\phi)$ は

$$\begin{aligned} H_{N,m}(\phi) &= \frac{1}{2}\langle \phi, (-\Delta_N)^2\phi\rangle_N + B_N(\phi) + m^2\langle \phi, (-\Delta_N)\phi\rangle_N + \frac{1}{2}m^4\langle \phi, \phi\rangle_N \\ &= \frac{1}{2}\langle \phi, (m^2 I_N - \Delta_N)^2\phi\rangle_N + B_N(\phi) \end{aligned}$$

と変形できる．I_N は $\Lambda_N \times \Lambda_N$ 単位行列である．つまり $P_{N,m}$ は平均 0, 共分散行列 $(m^2 I_N - \Delta_N)^{-2}$ をもつ $\mathbb{R}^{\Lambda_N}$ 上の Gauss 測度に対し Λ_N の内部境界上だけに 2 次ポテンシャルを加えて得られる Gauss 測度となる．そこで以下のように $\mathbb{R}^{\Lambda_N}$ 上の Gauss 測度を定義する．

$$Q_{N,m}(d\phi) = \frac{1}{\Xi_{N,m}}\exp\big\{-\frac{1}{2}\langle \phi, (m^2 I_N - \Delta_N)^2\phi\rangle_N\big\}\prod_{x\in\Lambda_N} d\phi_x$$

$\Xi_{N,m}$ は正規化定数である．また，$Q_{\infty,m}$ を共分散行列 $(m^2 I - \Delta)^{-2}$ を持つ $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ 上の Gauss 測度とする．I は $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ 単位行列である．特に $Q_{\infty,m}$ は $m > 0$ の時は任意の $d \geq 1$ で存在し，$m = 0$ の時は $d \geq 5$ でのみ存在することに注意する．いま，Brascamp-Lieb 不等式と $(m^2 I_N - \Delta_N)^{-1}$ が N について非減少なことを用いれば，任意の $x \in \Lambda_N$ に対し

$$\mathrm{Var}_{P_{N,m}}(\phi_x) \leq \mathrm{Var}_{Q_{N,m}}(\phi_x) \leq \mathrm{Var}_{Q_{\infty,m}}(\phi_0)$$

が成り立つ．X を平均 0 の正規分布に従う確率変数としたとき $P(|X| \leq a)$ は X の分散に対し単調減少なので (3.3) と組み合わせると

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{Z_{N,m}^{U_1}}{Z_{N,m}} \geq b\, Q_{\infty,m}(|\phi_0| \leq a)$$

を得る．

次に (3.2) の第 2 項の評価であるが，まず前述の考察から

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{Z_{N,m}}{Z_N} \geq \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{\Xi_{N,m}}{\Xi_{N,0}} \tag{3.4}$$

を示すことができる．$\Xi_{N,m}$ は平均 0, 共分散行列 $(m^2 I_N - \Delta_N)^{-2}$ を持つ Gauss 測度の分配関数なので

$$\Xi_{N,m} = (2\pi)^{\frac{|\Lambda_N|}{2}}\sqrt{\det((m^2 I_N - \Delta_N)^{-2})} = (2\pi)^{\frac{|\Lambda_N|}{2}}\det\big((m^2 I_N - \Delta_N)^{-1}\big)$$

であり，$(m^2 I_N - \Delta_N)^{-1}$ は死亡率が $\frac{m^2}{m^2+1}$ で Λ_N の外側で Dirichlet 境界条件のついた $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークの Green 関数に等しいため，次のランダムウォーク表現が成り立つことが知られている (cf. [6, section 4.1], [16, Chapter 8])．

$$\log\Xi_{N,m} = \frac{1}{2}|\Lambda_N|\log(2\pi) - |\Lambda_N|\log(m^2+1) + \sum_{x\in\Lambda_N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(\frac{1}{m^2+1}\big)^n\mathbb{P}_x(S_n = x, n < \tau_{\Lambda_N})$$

これを用いて評価を行うと次が示せる．

補題 3.1. 次元のみに依存した定数 $C_d, \widetilde{C}_d > 0$ が存在して次が成り立つ.

(a)

$$\limsup_{N\to\infty}\Big\{-\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{\Xi_{N,m}}{\Xi_{N,0}}\Big\} \le J_d(m) := \begin{cases} C_d m(1+o(1)) & d=1 \text{ のとき} \\ C_d m^2|\log m|(1+o(1)) & d=2 \text{ のとき} \\ C_d m^2(1+o(1)) & d\ge 3 \text{ のとき}\end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned}\max_{x\in\Lambda_N}\mathrm{Var}_{Q_{N,m}}(\phi_x) &\le \mathrm{Var}_{Q_{\infty,m}}(\phi_0) \\ &= \sigma_d^2(m) := \begin{cases}\widetilde{C}_d m^{-4+d}(1+o(1)) & d=1,2,3 \text{ のとき} \\ \widetilde{C}_d|\log m|(1+o(1)) & d=4 \text{ のとき} \\ \widetilde{C}_d(1+o(1)) & d\ge 5 \text{ のとき}\end{cases}\end{aligned}$$

ここで，$o(1)$ は $m\downarrow 0$ のとき 0 に収束する量を表す.

すると，(3.4) と補題 3.1 より任意の $m>0$ に対し次を得る.

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{Z_{N,m}}{Z_N} \ge -J_d(m)$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned}F(a,b) := \lim_{N\to\infty}\frac{1}{|\Lambda_N|}\log\frac{Z_N^{U_1}}{Z_N} &\ge b\,Q_{\infty,m}(|\phi_0|\le a) - J_d(m) \\ &\ge \frac{2ab}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2(m)}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_d^2(m)}} - J_d(m)\end{aligned}$$

ここで補題 3.1 より $d\ge 2$ の場合は $m\downarrow 0$ のとき $\frac{1}{\sqrt{\sigma_d^2(m)}} \gg J_d(m)$ であり，$a>0$, $b>0$ ならば $m>0$ を十分小さくとれば $F(a,b)>0$ となることが分かる. □

続いて Hamiltonian (1.1) に対応する $\nabla\phi$ と $\Delta\phi$ の両方からエネルギーが定まるモデルを考える. $\kappa_1>0$, $\kappa_2>0$ を固定し，$\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し

$$\mathcal{H}_\Lambda(\phi) := \kappa_1 H_\Lambda^\nabla(\phi) + \kappa_2 H_\Lambda^\Delta(\phi) \tag{3.5}$$

と定める. $H_\Lambda^\Delta(\phi)$, $H_\Lambda^\nabla(\phi)$ はそれぞれ (2.1), (2.4) で定義された Hamiltonian である. 自己ポテンシャル $U:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と δ-ピンニングを加えた $\mathbb{R}^{\Lambda_N}$ 上の Gibbs 測度の分配関数は以下で定義される.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_N^U &= \int_{\mathbb{R}^{\Lambda_N}}\exp\Big\{-\mathcal{H}_N(\phi) - \sum_{x\in\Lambda_N}U(\phi_x)\Big\}\prod_{x\in\Lambda_N}d\phi_x \\ \widetilde{\mathcal{Z}}_N^\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^{\Lambda_N}}\exp\big\{-\mathcal{H}_N(\phi)\big\}\prod_{x\in\Lambda_N}(\varepsilon\delta_0(d\phi_x)+d\phi_x)\end{aligned}$$

また，$\mathcal{Z}_N := \mathcal{Z}_N^0 = \widetilde{\mathcal{Z}}_N^0$ を外場を加えない場合の Gibbs 測度の分配関数とする. このとき次が成り立つ.

定理 3.2. 自己ポテンシャル $U_1(r) = -bI(|r| \le a)$ を考える．任意の $a \ge 0$, $b \ge 0$, $\varepsilon \ge 0$ に対し自由エネルギー

$$\mathcal{F}(a,b) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|} \log \frac{\mathcal{Z}_N^{U_1}}{\mathcal{Z}_N},\ \widetilde{\mathcal{F}}(\varepsilon) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_N|} \log \frac{\widetilde{\mathcal{Z}}_N^{\varepsilon}}{\mathcal{Z}_N}$$

が存在し, 任意の $d \ge 1$, $a > 0$, $b > 0$, $\varepsilon > 0$ に対し $\mathcal{F}(a,b) > 0$, $\widetilde{\mathcal{F}}(\varepsilon) > 0$ となる．

この結果は $d = 1$ で δ-ピンニングの場合は Borecki-Caravenna [8] によって示されており，それ以外の場合は [35] による．特にこのモデルでは任意の $d \ge 1$ で少しでもピンニング効果を加えると場が局在化され, これは DGFF の場合と同じである．直感的に言うと，$\nabla\phi$ から定まるエネルギーが小さければ，自動的に $\Delta\phi$ から定まるエネルギーは小さくなる．従って Hamiltoian (3.5) に対応する Gibbs 測度の下では $H_\Lambda^\nabla(\phi)$ の方が $H_\Lambda^\Delta(\phi)$ を支配すると考えられ，結果として $H_\Lambda^\nabla(\phi)$ のみのモデルと同様の振る舞いとなる．

自由エネルギーの正値性による局在化の表現に引き続いて期待されるのが，場の分散や共分散の評価といった高さ変数 ϕ に関する局在/非局在の特徴付けであるが，GMM で得られている結果は非常に限られている．現在までにきちんと証明されているのは Bolthausen-Cipriani-Kurt [5] による $d \ge 5$ で δ-ピンニングを加えた場合には場の相関関数が指数的減衰をするという次の評価のみである．

定理 3.3 ([5])**.** $d \ge 5$, $\varepsilon > 0$ とする．ある $C_1 = C_1(d,\varepsilon) > 0, C_2 = C_2(d,\varepsilon) > 0$ が存在して任意の $x, y \in \Lambda_N$ に対し, $|E^{\widetilde{P}_N^\varepsilon}[\phi_x\phi_y]| \le C_1 e^{-C_2|x-y|}$ が成り立つ．

DGFF では対応する結果が Bolthausen-Velenik [7] などで示されているが (cf. [37, Section 5])，以下では 2 つのモデルにおける証明の違いを簡単に説明したい．いま，任意の可測関数 $f : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned}
E^{\widetilde{P}_N^\varepsilon}[f] &= \frac{1}{\widetilde{Z}_N^\varepsilon} \int f(\phi) \exp\{-H_N(\phi)\} \prod_{x\in\Lambda_N} (\varepsilon\delta_0(d\phi_x) + d\phi_x) \prod_{x\notin\Lambda_N} \delta_0(d\phi_x) \\
&= \sum_{A\subset\Lambda_N} \varepsilon^{|A|} \frac{1}{\widetilde{Z}_N^\varepsilon} \int f(\phi) \exp\{-H_N(\phi)\} \prod_{x\in\Lambda_N\setminus A} d\phi_x \prod_{x\in A\cup\Lambda_N^c} \delta_0(d\phi_x) \\
&= \sum_{A\subset\Lambda_N} \varepsilon^{|A|} \frac{Z_{\Lambda_N\setminus A}}{\widetilde{Z}_N^\varepsilon} E^{P_{\Lambda_N\setminus A}}[f]
\end{aligned}$$

特に $\mathcal{A} = \mathcal{A}_N(\phi) := \{x \in \Lambda_N; \phi_x = 0\}$ をランダムなピン留め領域とすると $A \subset \Lambda_N$ に対し,

$$\widetilde{P}_N^\varepsilon(\mathcal{A} = A) = \varepsilon^{|A|} \frac{Z_{\Lambda_N\setminus A}}{\widetilde{Z}_N^\varepsilon} =: \zeta_N^\varepsilon(A)$$

これより

$$E^{\widetilde{P}_N^\varepsilon}[\phi_x\phi_y] = \sum_{A\subset\Lambda_N} \zeta_N^\varepsilon(A) E^{P_{\Lambda_N\setminus A}}[\phi_x\phi_y] \tag{3.6}$$

と表現できる．ここまでは $\nabla\phi$ モデル, $\Delta\phi$ モデルどちらでも成立する．

<u>DGFF の場合</u>
共分散のランダムウォーク表現より

$$E^{P^\nabla_{\Lambda_N\setminus A}}[\phi_x\phi_y] = (-\Delta_{\Lambda_N\setminus A})^{-1}(x,y) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n\ge 0} I(S_n = y, n < \tau_{\Lambda_N\setminus A})\Big]$$

(3.6) と組み合わせると

$$E^{\widetilde{P}_N^{\varepsilon,\nabla}}\left[\phi_x\phi_y\right] = \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}_x\Big[I(S_n = y, n < \tau_{\Lambda_N})\zeta_N^{\varepsilon}(\mathcal{A}\cap S_{[0,n]} = \phi)\Big]$$

ただし，$S_{[0,n]} := \{S_k; 0\leq k\leq n\}$ とする．ここで $\widetilde{P}_N^{\varepsilon}$ の下でのピン留め領域の分布 $\{\zeta_N^{\varepsilon}(A); A\subset\Lambda_N\}$ は次のように Bernoulli 測度と比較ができる (cf. [7]): ν_ρ をパラメーター $\rho\in(0,1)$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の Bernoulli 測度とする．ν_ρ の下では $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\sigma) := \{x\in\mathbb{Z}^d; \sigma_x = 1\}$ $(\sigma = \{\sigma_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d})$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\rho_\pm = \rho_\pm(d,\varepsilon) > 0$ が存在して任意の $B\subset\Lambda_N$ に対し $\nu_{\rho_-}(\mathcal{A}\cap B = \phi)\leq\zeta_N^{\varepsilon}(\mathcal{A}\cap B = \phi)\leq\nu_{\rho_+}(\mathcal{A}\cap B = \phi)$ が成り立つ．以上から相関関数の評価として

$$E^{\widetilde{P}_N^{\varepsilon,\nabla}}\left[\phi_x\phi_y\right] \leq \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}_x\Big[I(S_n = y)(1-\rho_+)^{|S_{[0,n]}|}\Big]$$

が得られ，結果としてランダムウォークの問題に帰着される．

GMM の場合

GMM でも $d\geq 5$ ではピン留め領域の分布と Bernoulli 測度の比較は可能である．一方で，共分散 $E^{P^{\Delta}_{\Lambda_N\setminus A}}\left[\phi_x\phi_y\right] = (\Delta^2_{\Lambda_N\setminus A})^{-1}(x,y)$ のランダムウォーク表現は成立しない．そこで [5] の証明では各 $x\in\Lambda_N$ に対し，関数 $\mathbb{Z}^d\ni y\mapsto G_A^N(x,y) := (\Delta^2_{\Lambda_N\setminus A})^{-1}(x,y)$ が次の bi-Laplacian に対する Dirichlet 問題

$$\begin{cases}\Delta^2 G_A^N(x,y) = \delta(x,y) & y\in\Lambda_N\setminus A \text{ のとき}\\ G_A^N(x,y) = 0 & y\in A\cup\Lambda_N^c \text{ のとき}\end{cases}\tag{3.7}$$

の解であることを利用している．解の適当な離散 Sobolev ノルムの解析的評価とパーコレーションの議論を組み合わせることで，(Bernoulli 測度に従う) ランダムな Dirichlet 境界条件を加えた場合に (3.7) の解が高確率で指数的減衰することを示し，結果として相関関数の指数的減衰を証明している．

4　エントロピー的反発およびその他の話題

続いてピンニングの反対に高さ 0 のレベルに固い壁が置かれ，場が正に条件付けられた場合の振る舞いについて考える．集合 $A\subset\mathbb{Z}^d$ に対し $\Omega^+(A) := \{\phi;\ \phi_x\geq 0\ \forall x\in A\}$ と定義する．問題とするのは $P_N(\ \cdot\ |\Omega^+(\Lambda_N))$ の下での場の挙動であり，これは (3.1) で自己ポテンシャルとして $U(r) = \infty\cdot I(r < 0)$ と取った場合に対応する．この問題は DGFF に対しては非常に詳しく調べられているが (cf. [19], [17], [37])，GMM に対しても対応する結果がかなり得られている．

まず, 最初のステップとして調べるべきは $\Omega^+(\Lambda_N)$ の実現確率であるが，その振る舞いは次元に応じて大きく異なる．いま，$D\subset\Lambda := [-1,1]^d$ を区分的に滑らかな境界を持ち $\mathrm{dist}(\partial D,\Lambda^c)\geq\delta > 0$ を満たす領域とし，$D_N := N\overline{D}\cap\mathbb{Z}^d$ と定義する．このとき次が成り立つ．

定理 4.1. (a) $d\geq 5$ のとき

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{d-4}\log N}\log P_N\big(\Omega^+(D_N)\big) = -4G\mathrm{Cap}_\Lambda^{\Delta}(D)$$

ここで $G := (-\Delta)^{-2}(0,0)(\in(0,\infty))$ であり，

$$\mathrm{Cap}_\Lambda^{\Delta}(D) = \inf\Big\{\frac{1}{(2d)^2}\int_\Lambda|\Delta_c f(r)|^2 dr; f\in H_0^2(\Lambda), f\geq 1_D\Big\}$$

$$H_0^2(\Lambda) = \{f\in H^2(\mathbb{R}^d);\ f = 0 \text{ on } \Lambda^c\}$$

Δ_c は $\mathbb{R}^d$ 上の連続な Laplacian である．

(b) $d=4$ のとき

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{(\log N)^2}\log P_N\big(\Omega^+(D_N)\big)=-8\gamma\mathrm{Cap}_\Lambda^\Delta(D)$$

ここで $\gamma:=\frac{8}{\pi^2}$ である．

(c) $d=2,3$ のとき

$0<\varepsilon<1$ とする．ある $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ と $C=C(\varepsilon)>0$ が存在して，任意の $N\in\mathbb{N}$ と $x\in\Lambda_{\varepsilon N}$ に対し次が成り立つ．

$$P_N\big(\phi_y\ge 0\ \forall y\in\Lambda_{\delta N}(x)\big)\ge C$$

ここで $\Lambda_{\delta N}(x):=x+\Lambda_{\delta N}$.

この結果は，$d\ge 5$ の場合は Kurt [22], Sakagawa [32], $d=4$ の場合は Kurt [23], $d=2,3$ の場合は Sakagawa [34] による．また，$d=1$ の場合は次節で触れる．GMM の持つ長距離相関によって Λ_N の内部 D_N で常に場が正となる確率は，場が独立もしくは相関が弱い場合と比べ非常に大きくなることに注意する．

注意 4.1. P_N の下で $\Omega^+(\Lambda_N)$ でなく $\Omega^+(D_N)$ を考えるのは 0-境界条件による影響を避けるためである．境界付近では境界条件の影響で場の相関は弱いと考えられ，上の結果と合わせると $d\ge 2$ では $P_N(\Omega^+(\Lambda_N))\approx e^{-CN^{d-1}}$ と予想されるが，FKG 不等式が成り立たないという技術的な困難によりこれは証明されていない．また，$d=2,3$ の場合の結果が $P_N(\Omega^+(D_N))\ge C>0$ よりも弱い主張となっているのも同じ理由による．

定理 4.1 を用いることで $P_N(\,\cdot\,|\Omega^+(\Lambda_N))$ の下での場の挙動としては次が成り立つことが知られている (cf. [22], [32], [23]).

定理 4.2. $\overline{\phi}_{\varepsilon N}(x):=\frac{1}{|\Lambda_{\varepsilon N}(x)|}\sum\limits_{y\in\Lambda_{\varepsilon N}(x)}\phi_y$ とおく．任意の $0<\varepsilon<1,\delta>0$ に対し次が成り立つ．

(a) $d\ge 5$ のとき

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{x:\Lambda_{\varepsilon N}(x)\subset D_N}P_N\Big(\big|\overline{\phi}_{\varepsilon N}(x)-2\sqrt{2G}\sqrt{\log N}\big|\ge\delta\sqrt{\log N}\ \big|\ \Omega^+(D_N)\Big)=0$$

(b) $d=4$ のとき

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{x:\Lambda_{\varepsilon N}(x)\subset D_N}P_N\Big(\big|\overline{\phi}_{\varepsilon N}(x)-2\sqrt{2\gamma}\log N\big|\ge\delta\log N\ \big|\ \Omega^+(D_N)\Big)=0$$

特に

$$E^{P_N}\big[\max_{x\in\Lambda_N}\phi_x\big]=\begin{cases}O(\sqrt{\log N}) & d\ge 5\text{ のとき}\\ O(\log N) & d=4\text{ のとき}\end{cases}$$

であり，命題 2.1 と合わせると定理 4.2 によって場を正に条件付けると場が $E^{P_N}\big[\max_{x\in\Lambda_N}\phi_x\big]$ と同じオーダーまで持ち上げられることが分かる．この現象はエントロピー的反発と呼ばれる．また，$d=1,2,3$ においては $E^{P_N}\big[\max_{x\in\Lambda_N}\phi_x\big]$ と $\sqrt{\mathrm{Var}_{P_N}(\phi_0)}$ が同じオーダーであり，エントロピー的反発は起こらない (cf. [34]).

その他の多次元における GMM の研究は限られているが，以下のようなものが挙げられる．

- 2 次元の DGFF は相関関数の挙動が log 関数で与えられ，そのフラクタル的な構造から極値の研究が非常に盛んに行われているが (cf. [4]), Cipriani [12] は GMM で対応する 4 次元の場合の極値に対し部分的な結果を得ている．また，Chiarini-Cipriani-Hazra [11] では $d \geq 5$ での GMM や，$d \geq 3$ での DGFF の極値の揺動について調べている．

- Cipriani-Dan-Hazra [13] では格子上の離散 Gauss 膜モデルのスケール極限について調べ，連続な Gauss 膜モデルに対応する $\mathbb{R}^d$ 上の Gauss 確率場への (適当な意味での) 収束について論じている．特に $d \geq 4$ では極限として分数階 Gauss 場 (cf. [28]) が現れる．

- Kurt [24] では一般の狭義凸な相互作用ポテンシャルを持つ非 Gauss 的な $\Delta\phi$ モデルに対し，エントロピー的反発の問題を考えている．

5　1 次元の場合

相互作用ポテンシャル V を持ち，0-境界条件を課した $\Delta\phi$ モデルは $d = 1$ のときは次で定義される．

$$P_N(d\phi) = \frac{1}{\Xi_N} \exp\Big\{-\sum_{x=0}^{N} V(\Delta\phi_x)\Big\} \prod_{x=1}^{N-1} d\phi_x \ \delta_0(d\phi_{-1})\delta_0(d\phi_0)\delta_0(d\phi_N)\delta_0(d\phi_{N+1})$$

Ξ_N は正規化定数である．次に，適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上で $\{X_n\}_{n\geq 1}$ を独立同分布に従う実数値確率変数列でそれぞれの分布が $\mathcal{P}(X_1 \in dx) = \frac{1}{Z}e^{-V(x)}dx$ で与えられるものとする．ここで，$Y_0 := 0$, $Z_0 := 0$, $Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $Z_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)X_i, n \geq 1$ と定めると $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ は原点を出発点とする 1 次元ランダムウォークであり，$\{Z_n\}_{n\geq 0}$ は原点を出発点とし，$\{Y_n\}_{n\geq 0}$ から定まる集積ランダムウォークとなる．このとき次が成り立つ．

命題 5.1. 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ に対し

$$P_N\big(\{\phi_x\}_{1\leq x\leq N-1} \in A\big) = \mathcal{P}\big(\{Z_i\}_{1\leq i\leq N-1} \in A \,\big|\, Z_N = 0, Z_{N+1} = 0\big)$$

これより $d = 1$ における $\Delta\phi$ モデルは (ピン留めされた) 集積ランダムウォークとして表されることがわかる．1 次元の場合は多次元の場合と異なり多くの結果が一般の相互作用ポテンシャル (ただし対称性や，モーメントの条件などはある程度仮定する) に対し得られている．前節までの問題に対応する結果としては以下のようなものが挙げられる．

ピンニング

1 次元の場合は 2 点続けて条件を付けるとその左側と右側の場が独立になることから特に δ-ピンニングを考える場合は Markov 性が利用しやすく，再生理論が有効な解析手法となる．Caravenna-Deuschel [9], [10] では 1 次元の $\Delta\phi$ モデルで δ-ピンニングを加えた場合に起こるピンニング転移や，δ-ピンニングと高さ 0 の壁を両方加えた場合に起こる濡れ転移についてスケール極限による特徴づけなど非常に詳細な解析を行っている．また，Adams-Kister-Weber [1] は δ-ピンニングに加えて，境界条件 $\phi_{-1} = \alpha N^2 - \beta N$, $\phi_0 = \alpha N^2$, $\phi_N = \alpha' N^2$, $\phi_{N+1} = \alpha' N^2 + \beta' N$ を課し，高さ方向に $\frac{1}{N^2}$ 倍，(1 次元の) 空間方向に $\frac{1}{N}$ 倍にスケーリングしたパスに対する大偏差原理を証明している．左右両端の境界条件 2 つずつとピンニングの強さの 5 つのパラメーターがあり，パラメーターの取り方に応じてレート汎関数の minimizer の数が 1 つから 5 つの間で変化する．

エントロピー的反発

1 次元の確率過程が例えば時刻 $[0, T]$ の間ずっと一定の値以上となる確率の $T \to \infty$ での漸近挙動は，生存確率 (survival probability)，または持続確率 (persistence probability) の問題などと呼ばれ古典的な問題であるが，現在でも活発に研究されている (cf. [3])．集積ランダムウォークに対するこの問題は Sinai [36] に端を発するが，最近の結果としては右側の境界条件を付けない場合は Dembo-Ding-Gao [14] によって上下からの評価

$$CN^{-\frac{1}{4}} \leq \mathcal{P}(Z_i \geq 0 \ \ 1 \leq \forall i \leq N-1) \leq C' N^{-\frac{1}{4}}$$

が示され，更には Denisov-Wachtel [15] によって $N \to \infty$ での正確な漸近挙動

$$\lim_{N \to \infty} N^{\frac{1}{4}} \mathcal{P}(Z_i \geq 0 \ \ 1 \leq \forall i \leq N-1) = C \in (0, \infty)$$

が証明された．また $\Delta\phi$ モデルに直接対応する両端に 0-境界条件を付けた場合については Aurzada-Dereich-Lifshits [2] によって 1 次元単純ランダムウォークから定まる集積ランダムウォークの場合には

$$CN^{-\frac{1}{2}} \leq \mathcal{P}(Z_i \geq 0 \ \ 1 \leq \forall i \leq N-1 \mid Z_N = Z_{N+1} = 0) \leq C' N^{-\frac{1}{2}}$$

が示されている．[34] では任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し，ある $C = C(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$P_N\big(\phi_i \geq 0 \ \ -(1-\varepsilon)N \leq \forall\ i \leq (1-\varepsilon)N\big) \geq C$$

となることを示している．$\Delta\phi$ モデルに関連する他の 1 次元の結果としては Hryniv-Velenik [21] では P_N の下で関数型中心極限定理 (ただし，場を高さ方向には $\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}$ 倍，(1 次元の) 空間方向に $\frac{1}{N}$ 倍にスケーリングする) を示し，それを用いて上下に壁を置いて場に制限を加えた場合の自由エネルギーを求めている．

参考文献

[1] S. Adams, A. Kister and H. Weber, *Sample path large deviations for Laplacian models in (1+1)-dimensions*, Electron. J. Probab., **21** (2016), paper no. 62, 36 pp.

[2] F. Aurzada, S. Dereich and M. Lifshits, *Persistence probabilities for a bridge of an integrated simple random walk*, Probab. Math. Statist., **34** (2014), 1–22.

[3] F. Aurzada and T. Simon, *Persistence probabilities* & *exponents*, Levy matters. V, 183–224, Lect. Notes Math., **2149** (2015), Springer.

[4] M. Biskup, *Extrema of the two-dimensional discrete Gaussian free field*, preprint (2018), arXiv:1712.09972v2.

[5] E. Bolthausen, A. Cipriani and N. Kurt, *Exponential decay of covariances for the supercritical membrane model*, Comm. Math. Phys., **353** (2017), 1217–1240.

[6] E. Bolthausen and D. Ioffe, *Harmonic crystal on the wall: a microscopic approach*, Comm. Math. Phys., **187** (1997), 523–566.

[7] E. Bolthausen and Y. Velenik, *Critical behavior of the massless free field at the depinning transition*, Comm. Math. Phys., **223** (2001), 161–203.

[8] M. Borecki and F. Caravenna, *Localization for (1+1)-dimensional pinning models with* $(\nabla + \Delta)$*-interaction*, Electron. Commun. Probab., **15** (2010), 534–548.

[9] F. Caravenna and J.–D. Deuschel *Pinning and wetting transition for (1+1)-dimensional fields with Laplacian interaction*, Ann. Prob., **36** (2008), 2388–2433.

[10] F. Caravenna and J.–D. Deuschel *Scaling limits of (1+1)-dimensional pinning models with Laplacian interaction*, Ann. Prob., **37** (2009), 903–945.

[11] A. Chiarini, A. Cipriani and R.S. Hazra, *Extremes of some Gaussian random interfaces*, J. Stat. Phys., **165** (2016), 521–544.

[12] A. Cipriani, *High points for the membrane model in the critical dimension*, Electron. J. Probab., **18** (2013), 1–17.

[13] A. Cipriani, B. Dan and R.S. Hazra, *The scaling limit of the membrane model*, preprint (2018), arXiv:1801.05663v1.

[14] A. Dembo, J. Ding, and F. Gao, *Persistence of iterated partial sums*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **49** (2013), 873–884.

[15] D. Denisov and V. Wachtel, *Exit times for integrated random walks*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **51** (2015), 167–193.

[16] S. Friedli and Y. Velenik, Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction, Cambridge University Press, 2017.

[17] T. Funaki, *Stochastic interface models*, In: Lectures on Probability Theory and Statistics, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint -Flour XXXIII-2003 (ed. J. Picard), 103–274, Lect. Notes Math., **1869** (2005), Springer.

[18] H.–O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, Walter de Gruyter, 1988.

[19] G. Giacomin, *Aspects of statistical mechanics of random surfaces*, notes of the lectures given at IHP in the fall 2001 (available at the web page of the author).

[20] C. Hiergeist and R. Lipowsky, *Local contacts of membrane and strings*, Physica A, **244** (1997), 164–175.

[21] O. Hryniv and Y. Velenik, *Some rigorous results on semiflexible polymers. I. Free and confined polymers*, Stoch. Proc. Appl., **119** (2009), 3081–3100.

[22] N. Kurt, *Entropic repulsion for a class of Gaussian interface models in high dimensions*, Stoch. Proc. Appl., **117** (2007), 23–34.

[23] N. Kurt, *Maximum and entropic repulsion for a Gaussian membrane model in the critical dimension*, Ann. Prob., **37** (2009), 687–725.

[24] N. Kurt, *Laplacian interface models with strictly convex potential*, Markov Processes Relat. Fields, **18** (2012), 9–30.

[25] G. F. Lawler and V. Limic, Random Walk: A Modern Introduction, Cambridge Univ. Press, 2010.

[26] S. Leiber, *Equilibrium statistical mechanics of fluctuating films and membranes*, Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces, 2nd ed. (2004), 49–101.

[27] R. Lipowsky, *Generic interaction of flexible membranes*, Handbook of Biological Physics, **1** (1995), 521–602.

[28] A. Lodhia, S. Sheffield, X. Sun and S. S. Watson, *Fractional Gausssian fields; A survey*, Probab. Surv., **13** (2016), 1–56.

[29] S. Müller and F. Schweiger, *Estimates for the Green's function of the discrete bilaplacian in dimensions* 2 *and* 3, preprint (2017), arXiv:1712.02587v1.

[30] Pitt, L., *Positively correlated normal variables are associated*, Ann. Prob., **10** (1982), 496–499.

[31] J. J. Ruiz-Lorenzo, R. Cuerno, E. Moro, and A. Sánchez, *Phase transition in tensionless surfaces*, Biological Chemistry, **115** (2005), 187–193.

[32] H. Sakagawa, *Entropic repulsion for a Gaussian lattice field with certain finite range interaction*, J. Math. Phys., **44** (2003), 2939–2951.

[33] H. Sakagawa, *On the free energy of a Gaussian membrane model with external potentials*, J. Stat. Phys., **147** (2012), 18–34.

[34] H. Sakagawa, *On the probability that Laplacian interface models stay positive in subcritical dimensions*, Stochastic analysis on large scale interacting systems, RIMS Kôkyuroku Bessatsu, **B59** (2016), 273–288.

[35] H. Sakagawa, *Localization of a Gaussian membrane model with weak pinning potentials*, preprint.

[36] Y. G. Sinai, *Distribution of some functionals of the integral of a random walk*, Theor. Math. Phys., **90** (1992), 219–241.

[37] Y. Velenik, *Localization and delocalization of random interfaces*, Probab. Surv., **3** (2006) 112–169.