$\mathbb{Z}^d$ 上の離散 Gauss 自由場に対する
レベル集合パーコレーションについて

坂川 博宣

慶應義塾大学理工学部

2018 年 8 月 29 日

内容

- 問題設定と初期の結果
- Rodriguez-Sznitman (2013) の証明について
- 断絶確率の漸近挙動
- $\nabla\phi$ 界面モデルに対するレベル集合パーコレーション

問題設定と初期の結果

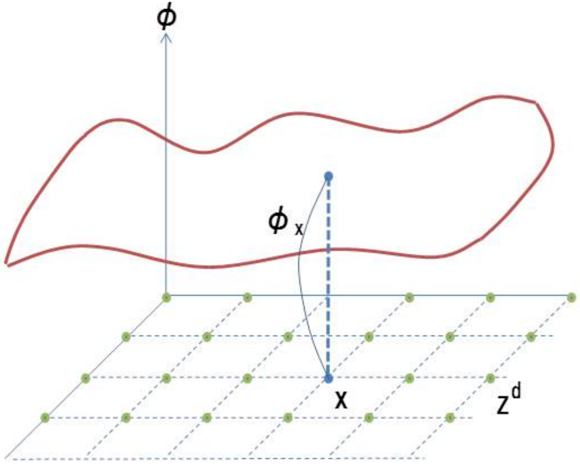
- $\phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$: $\mathbb{Z}^d$ 上の確率場
- P : $\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ 上の ϕ の分布
- $E^{\geq h} = E^{\geq h}(\phi) := \{x \in \mathbb{Z}^d; \phi_x \geq h\}$: 高さ h 以上のレベル集合

問題

事象 $\{0 \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \infty\}$ の実現確率は？

- $\eta(h) := P(0 \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \infty)$
- $h_* = h_*(d) := \inf\{h \in \mathbb{R}; \eta(h) = 0\} \in [-\infty, \infty]$

問題設定と初期の結果



問題設定と初期の結果

注意 1

$\phi = \{\phi_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ が i.i.d.

$\Rightarrow$ パラメーター $\rho = P(\phi_0 \geq h)$ の $\mathbb{Z}^d$ 上の Bernoulli site percolation と同じ

確率場 ϕ が独立でない場合を考えたい

定理 1 (Molchanov-Stepanov (1983))

以下の条件が成り立つならば $h_* < \infty$

任意の有限連結集合 $A \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し

$$P\big(\phi_x \geq h \ \ \forall x \in A\big) \leq Ce^{-\alpha|A|}$$

C, α は A に依らない正定数で，$h \uparrow +\infty$ のとき $\alpha = \alpha(h) \uparrow +\infty$ かつ $C = C(h) < +\infty$ を満たすもの

$\big(\because$ Peierls argument $\big)$

問題設定と初期の結果

Q. 定理 1 の条件はいつ成り立つか？

$\phi = \{\phi_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$: $\mathbb{Z}^d$ 上の Gauss 確率場とする
$\forall h > 0$ に対し

$$\begin{aligned} P(\phi_x \geq h \ \ \forall x \in A) &\leq P\Big(\frac{1}{|A|}\sum_{x \in A} \phi_x \geq h\Big) \\ &\leq \exp\Big\{-\frac{h^2|A|^2}{2\mathrm{Var}\big(\sum_{x \in A} \phi_x\big)}\Big\} \end{aligned} \tag{1}$$

($\because$ Gaussian tail estimate : $P(Z \geq h) \leq e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}$ for $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$)

問題設定と初期の結果

<u>正質量 **Gauss** 自由場の場合</u>

$\phi = \{\phi_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d} \sim \mathcal{N}(0, (m^2 I - \Delta)^{-1}) \ \ (m > 0)$

I : $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ 単位行列, Δ : $\mathbb{Z}^d$ 上の離散 Laplacian

補題 1

$d \geq 1$ とする．ある定数 $C_1 = C_1(d, m), C_2 = C_2(d, m) > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$0 < E\big[\phi_0 \phi_x\big] \leq C_1 e^{-C_2 |x|}$$

$\because$ RW 表現 : $E\big[\phi_0 \phi_x\big] = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{m^2 + 1}\right)^n \mathbb{E}_0\big[I(S_n = x)\big]$

これより任意の $A \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathrm{Var}\big(\sum_{x \in A} \phi_x\big) \leq C|A|$

(1) と合わせれば定理 1 の条件が成立し，従って $h_* < \infty$ となる

また，対称性を考えると $h_* > -\infty$ もいえる

問題設定と初期の結果

零質量 Gauss 自由場 (DGFF) の場合

$\phi = \{\phi_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d} \sim \mathcal{N}(0, (-\Delta)^{-1})$

補題 2

$d \geq 3$ とする．ある定数 $C_1 = C_1(d) > 0$ が存在して次が成り立つ．
$|x| \to \infty$ のとき，

$$E\left[\phi_0 \phi_x\right] \sim \frac{C_1}{|x|^{d-2}}$$

$\because$ RW 表現：$E\left[\phi_0\phi_x\right] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_0\left[I(S_n = x)\right]$

これより $\Lambda_N := [-N, N]^d \cap \mathbb{Z}^d$ に対し，

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^{d+2}} \mathrm{Var}\Big(\sum_{x \in \Lambda_N} \phi_x \Big) = C \in (0, \infty)$$

(1) と合わせると $P(\phi_x \geq h \ \ \forall x \in \Lambda_N) \leq \exp\left\{ -C' h^2 |\Lambda_N|^{1-\frac{2}{d}} \right\}$
この評価からは定理 1 の条件は言えない．

問題設定と初期の結果

注意 2

DGFF に対しては定理 1 の条件は成立しない.

Bolthausen-Deuschel-Zeitouni (1995) では次が示されている.

任意の $d \geq 3$, $h \in \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}\log N} P\big(\phi_x \geq h \ \forall x \in \Lambda_N\big) = -2G\mathrm{Cap}([-1,1]^d)$$

ここで

$$G = (-\Delta)^{-1}(0,0) \in (0,\infty)$$

$$\mathrm{Cap}([-1,1]^d)$$

$$= \inf\Big\{ \frac{1}{2d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_c f(r)|^2 dr; f \in H^1(\mathbb{R}^d), f \geq 1_{[-1,1]^d} \Big\}$$

問題設定と初期の結果

以後 $\phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d} \sim \mathcal{N}(0, (-\Delta)^{-1})$ $(d \geq 3)$ に対し考える

定理 2 (Bricmont-Lebowitz-Maes (1987))

$h_*(3) < \infty$ かつ任意の $d \geq 3$ に対し $h_*(d) \geq 0$

注意 3

$h_* \geq 0$ は

対称性，平行移動不変性，$\mathbf{1}$-step Markov 性，FKG 不等式, ($+$ α)

を満たす $\mathbb{Z}^d$ 上の確率場 $\{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ に対し成立

問題設定と初期の結果

Proof of $h_* \geq 0$.

$h > 0$ とする．ある $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \varepsilon &< P(\phi_0 \geq -h) \\ &\leq P\big(0 \overset{\geq -h}{\longleftrightarrow} \partial^+\Lambda_N\big) + P\big(\phi_0 \geq -h,\ 0 \overset{\geq -h}{\not\leftrightarrow} \partial^+\Lambda_N\big)\end{aligned}$$

$C_{\max}^{<-h}$: 高さ $< -h$ の maximal contour　とすると FKG 不等式より

$$\begin{aligned}(\text{第 2 項}) &= \sum_{\Gamma \subset \Lambda_N} P\big(\phi_0 \geq -h \mid C_{\max}^{<-h} = \Gamma\big) P\big(C_{\max}^{<-h} = \Gamma\big) \\ &\leq \sum_{\Gamma \subset \Lambda_N} P\big(\phi_0 \geq -h \mid \phi \equiv -h \text{ on } \Gamma\big) P\big(C_{\max}^{<-h} = \Gamma\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

以上より，任意の $N \geq 1$ に対し　$P\big(0 \overset{\geq -h}{\longleftrightarrow} \partial^+\Lambda_N\big) \geq \varepsilon > 0$

□

Rodriguez-Sznitman (2013) の結果

定理 3 (Rodriguez-Sznitman (2013))

任意の $d \geq 3$ に対し $h_*(d) < \infty$ かつある $h_0 > 0$ が存在して任意の d:十分大に対し $h_*(d) \geq h_0$

また，P の平行移動不変性と相関関数 $G(x, y) := (-\Delta)^{-1}(x, y)$ が $|x - y| \to \infty$ のとき 0 に減衰することから場の混合性が成り立ち，これより次の 0-1 法則が成り立つ

定理 4 (Rodriguez-Sznitman (2013))

$d \geq 3$ のとき次が成立する．

$$P\left(E^{\geq h}\text{が無限クラスターを含む}\right) = \begin{cases} 1 & h < h_*\text{のとき} \\ 0 & h > h_*\text{のとき} \end{cases}$$

更に $h < h_*$ のとき P-a.s. で $E^{\geq h}$ の中の無限クラスターは 1 つ

Rodriguez-Sznitman (2013) の証明のアイデア

$h_* < \infty$ について

DGFF の難しい点 $\leftrightarrow$ 場の長距離相関

命題 1 (Popov-Ráth (2015))

$d \geq 3$ とする．
$A \cap B = \phi$, $\mathrm{dist}(A, B) \geq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}$
を満たす任意の有限集合 $A, B \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し次が成り立つ．

$$\sup_{f,g}\left\{\mathrm{Cov}_P(f(\phi), g(\phi))\right\} \asymp \frac{\left(\mathrm{cap}(A)\mathrm{cap}(B)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\mathrm{dist}(A, B)\right)^{d-2}}$$

ここで，$\sup_{f,g}$ は $f, g : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to [0, 1]$ で
f は $\mathcal{F}_A$-可測な関数，g は $\mathcal{F}_B$-可測な関数に対し取る．
$\mathcal{F}_A := \sigma(\{\phi_x; x \in A\}) \ \ (A \subset \mathbb{Z}^d)$
$\mathrm{cap}(A) := \sum_{x \in A} \mathbb{P}_x(\widetilde{H}_A = +\infty)$: A の容量

$\Lambda_N := [-N, N]^d \cap \mathbb{Z}^d$ に対しては

$$C_- N^{d-2} \le \mathrm{cap}(\Lambda_N) \le C_+ N^{d-2}$$

$\Lambda_N(x) := x + \Lambda_N \ (x \in \mathbb{Z}^d)$
$f : \Omega \to [0, \infty)$: $\mathcal{F}_{\Lambda_N(x)}$-可測有界関数
$g : \Omega \to [0, \infty)$: $\mathcal{F}_{\Lambda_N(y)}$-可測有界関数
と取り, $|x - y| = MN$ ($M > 2$ を固定) とすると

$$\text{命題 1} \ \Rightarrow \ \mathrm{Cov}_P(f(\phi), g(\phi)) \le \frac{C}{M^{d-2}}$$

$N \to \infty$ としてもこれは 0 に収束しない!

Rodriguez-Sznitman (2013) の証明のアイデア

命題 2 (Decoupling inequality)

$d \geq 3$, $A, B \Subset \mathbb{Z}^d$, $A \cap B = \phi$

$f : \Omega \to [0, \infty)$: $\mathcal{F}_A$-可測有界関数

任意の $h \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ に対し次が成り立つ.

$$E^P\left[f \cdot 1_{\Omega_+^h(B)}\right] \leq E^P\left[f\right] P\left(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\right) + \|f\|_\infty |B| \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{4 \max_{x \in A, y \in B} G(x, y)}\right\}$$

ここで $\Omega_+^h(A) := \{\phi_x \geq h \ \forall x \in A\}$ ($A \subset \mathbb{Z}^d$, $h \in \mathbb{R}$)

注意 4

f:単調非減少のときは FKG 不等式により次の下からの評価が成立

$$E^P\left[f \cdot 1_{\Omega_+^h(B)}\right] \geq E^P\left[f\right] P\left(\Omega_+^h(B)\right)$$

Rodriguez-Sznitman (2013) の証明のアイデア

特に前述の設定のように $\mathrm{dist}(A, B) \geq MN$ として $f = \mathbf{1}_{\Omega_+^h(A)}$ と取れば任意の $\gamma > M^{-\frac{d}{2}+1}$ に対し

$$\begin{aligned} P\big(\Omega_+^h(A)\big)P\big(\Omega_+^h(B)\big) &\leq P\big(\Omega_+^h(A) \cap \Omega_+^h(B)\big) \\ &\leq P\big(\Omega_+^h(A)\big)P\big(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\big) + |B|e^{-CN^{d-2}} \end{aligned}$$

DGFF において事象 $\Omega_+^h(A)$ を考えたとき，
パラメーターを少しだけ変えるとその相関が大きく変わる

注意 5

命題 2 はもう少し一般化可能
$\Omega_+^h(B) \leftrightarrow \sigma\big(\{\mathbf{1}_{\{\phi_x \geq h\}}; x \in B\}\big)$-可測増加事象 でよい

Decoupling inequality $\Rightarrow$ renormalization argument が可能
(ただしこの不等式の利用は delicate (sprinkling argument))

Rodriguez-Sznitman (2013) の証明のアイデア

定理 5 (Rodriguez-Sznitman (2013))

$d \geq 3$ とする.

1. $h_{**} = h_{**}(d) := \inf\{h \in \mathbb{R};\ \exists \alpha > 0$ に対し
$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha} P(\Lambda_N \xleftrightarrow{\geq h} \partial^{+}\Lambda_{2N}) = 0\}$$
と定義すると, $h_{**}(d) < \infty$.
2. 任意の $h > h_{**}(d)$ に対しある正定数 $C_1, C_2 > 0$, $\rho \in (0,1)$ が存在して任意の $N \geq 1$ に対し
$$P(0 \xleftrightarrow{\geq h} \partial^{+}\Lambda_N) \leq C_1 e^{-C_2 N^{\rho}}$$
が成り立つ.

特に定義より $h_{*} \leq h_{**}$ であり, 結果として任意の $d \geq 3$ に対し $h_{*}(d) < \infty$ がわかる.

Decoupling inequality の証明

$A, B \Subset \mathbb{Z}^d$, $A \cap B = \phi$,　$f : \Omega \to [0, \infty)$: $\mathcal{F}_A$-可測有界関数
$\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, $\Lambda \supset A, B$ を取り，$P_\Lambda \sim \mathcal{N}(0, (-\Delta_\Lambda)^{-1})$ とする

$$
\begin{aligned}
E^{P_\Lambda}\left[f \cdot 1_{\Omega_+^h(B)}\right] &= E^{P_\Lambda}\left[f \cdot E^{P_\Lambda}\left[1_{\Omega_+^h(B)} \,\middle|\, \mathcal{F}_A\right]\right] \\
&= E^{P_\Lambda}\left[f(\phi) \cdot P_\Lambda\left(\Omega_+^h(B) \,\middle|\, \mathcal{F}_A\right)(\phi)\right]
\end{aligned}
$$

示したいこと

高確率で $P_\Lambda\left(\Omega_+^h(B) \,\middle|\, \mathcal{F}_A\right)(\phi)$ は $P_\Lambda\left(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\right)$ に “近い”

Key idea

DGFF の Markov 性 : $A \subset \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ に対し

DGFF on $\Lambda \setminus A$ with ψ-boundary condition on A

$\overset{d}{=}$ harmonic extension of ψ to $\Lambda \setminus A$

$+$ DGFF on $\Lambda \setminus A$ with $\mathbf{0}$-boundary condition on A

Decoupling inequality の証明

直交分解：$\phi_x = E^{P_\Lambda}\left[\phi_x \,\middle|\, \mathcal{F}_A\right](\phi) + \left(\phi_x - E^{P_\Lambda}\left[\phi_x \,\middle|\, \mathcal{F}_A\right](\phi)\right)$
に対し次が成り立つ

$$\begin{aligned} m_x^A(\phi) &:= E^{P_\Lambda}\left[\phi_x \,\middle|\, \mathcal{F}_A\right](\phi) \\ &= \sum_{y \in A} \phi_y \mathbb{P}_x\left(S_{H_{A \cup \Lambda^c}} = y\right) \\ &= \mathbb{E}_x\left[\phi(S_{H_A}); H_A < H_{\Lambda^c}\right] \end{aligned}$$

ここで $H_C := \inf\{n \geq 0; S_n \in C\}$

注意 6

$\{m_x^A(\phi)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ は次の Dirichlet 問題の一意解となる

$$\begin{cases} \Delta m(x) = 0 & x \in \Lambda \setminus A \\ m(x) = \phi(x) & x \in A \\ m(x) = 0 & x \in \Lambda^c \end{cases}$$

Decoupling inequality の証明

$\left\{\phi_x - E^{P_\Lambda}\left[\phi_x \,\middle|\, \mathcal{F}_A\right](\phi)\right\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ under $P_\Lambda\left(\,\cdot\,\middle|\,\mathcal{F}_A\right)(\phi)$

$\overset{d}{=} \mathcal{N}(0, (-\Delta_{\Lambda\setminus A})^{-1})$

($A \cup \Lambda^c$ 上では a.s. で 0. 条件 $\{\phi_y\}_{y\in A}$ にはよらない)

$\left\{m_x^A(\phi)\right\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ と $\left\{\phi_x - E^{P_\Lambda}\left[\phi_x \,\middle|\, \mathcal{F}_A\right](\phi)\right\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ は独立

いま,

$\phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$, $\widetilde{\phi} = \{\widetilde{\phi}_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$: indep. copy

$\phi \sim P_\Lambda$, $\widetilde{\phi} \sim \widetilde{P}_\Lambda$ $(= \mathcal{N}(0, (-\Delta_\Lambda)^{-1}))$

$\overline{\phi} = \{\overline{\phi}_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d} \sim \overline{P}_{\Lambda\setminus A} = \mathcal{N}(0, (-\Delta_{\Lambda\setminus A})^{-1})$, ϕ, $\widetilde{\phi}$ と独立

とする

ここで $\gamma > 0$ として

$$(\phi, \widetilde{\phi}) \in \mathcal{E} := \left\{ (\phi, \widetilde{\phi}); m_x^A(\widetilde{\phi}) - m_x^A(\phi) \geq -\gamma,\ \forall x \in B \right\}$$

が与えられたとすると

(注. $\mathcal{E}$ は $\sigma(\{\phi_x; x \in A\}) \otimes \sigma(\{\widetilde{\phi}_x; x \in A\})$-可測)

$$\begin{aligned} P_\Lambda\big(\Omega_+^h(B) \,\big|\, \mathcal{F}_A\big)(\phi) &= \overline{P}_{\Lambda \setminus A}\big(\overline{\phi}_x + m_x^A(\phi) \geq h,\ \forall x \in B\big) \\ &\leq \overline{P}_{\Lambda \setminus A}\big(\overline{\phi}_x + m_x^A(\widetilde{\phi}) \geq h - \gamma,\ \forall x \in B\big) \\ &= \widetilde{P}_\Lambda\big(\widetilde{\phi}_x \geq h - \gamma,\ \forall x \in B \,\big|\, \mathcal{F}_A\big)(\widetilde{\phi}) \end{aligned}$$

これより,

$$
\begin{aligned}
&E^{P_\Lambda \otimes \widetilde{P}_\Lambda}\Big[f(\phi) P_\Lambda\big(\Omega_+^h(B) \,\big|\, \mathcal{F}_A\big)(\phi) 1_{\mathcal{E}}(\phi, \widetilde{\phi}) \Big] \\
&\quad \le E^{P_\Lambda \otimes \widetilde{P}_\Lambda}\Big[f(\phi) \widetilde{P}_\Lambda\big(\widetilde{\phi}_x \ge h - \gamma,\ \forall x \in B \,\big|\, \mathcal{F}_A\big)(\widetilde{\phi}) 1_{\mathcal{E}}(\phi, \widetilde{\phi}) \Big] \\
&\quad \le E^{P_\Lambda}[\, f \,] P_\Lambda\big(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\big)
\end{aligned}
$$

以上を組み合わせれば次が得られる.

$$
\begin{aligned}
&E^{P_\Lambda}\big[f \cdot 1_{\Omega_+^h(B)} \big] \\
&\quad = E^{P_\Lambda \otimes \widetilde{P}_\Lambda}\Big[f(\phi) P_\Lambda\big(\Omega_+^h(B) \,\big|\, \mathcal{F}_A\big)(\phi) \big(1_{\mathcal{E}}(\phi, \widetilde{\phi}) + 1_{\mathcal{E}^c}(\phi, \widetilde{\phi}) \big) \Big] \\
&\quad \le E^{P_\Lambda}[\, f \,] P_\Lambda\big(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\big) + \|f\|_\infty P_\Lambda \otimes \widetilde{P}_\Lambda(\mathcal{E}^c)
\end{aligned}
$$

$P_\Lambda \otimes \widetilde{P}_\Lambda(\mathcal{E}^c)$ の評価は $m_x^A(\phi)$ の RW 表現 + Gaussian tail による

Rodriguez-Sznitman (2013) の証明のアイデア

$h_* > 0$ (d : 十分大) について

Key idea

2-scale decomposition of DGFF

$$G(x,y) := (-\Delta)^{-1}(x,y) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n\geq 0} I(S_n = y)\Big] \text{ より,}$$

$d \to \infty$ のとき $G(x,y) \approx \delta(x,y)$

$\Rightarrow$ d : 十分大に対し

DGFF $\phi \overset{d}{=}$ (i.i.d. Gaussian field ψ) + (small perturbation ξ)

- ψ-場の level set percolation は Bernoulli site percolation と比較可能
- d : 十分大のとき，ξ-場には Molchanov-Stepanov の定理の議論可能

h_*, h_{**} について

$$h_*(d) := \inf\{h \in \mathbb{R}; P(0 \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \infty) = 0\}$$

$$h_{**}(d) := \inf\{h \in \mathbb{R};\ \exists \alpha > 0 \text{ に対し } \lim_{N\to\infty} N^\alpha P(\Lambda_N \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \partial^+\Lambda_{2N}) = 0\}$$

$h_* = h_{**}$ と予想されるが未解決

定理 6 (Drewitz-Rodriguez (2015))

$$\lim_{d\to\infty} \frac{h_*(d)}{\sqrt{2G\log d}} = \lim_{d\to\infty} \frac{h_{**}(d)}{\sqrt{2G\log d}} = 1$$

定理 7 (Drewitz-Prévost-Rodriguez (2018))

任意の $d \geq 3$ に対し $h_*(d) > 0$

断絶確率の漸近挙動

$M > 1$ を固定

$$A_N^h = \{\phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}; \Lambda_N \overset{\geq h}{\not\leftrightarrow} \partial^+ \Lambda_{[MN]}\}$$

$: \Lambda_N$ から $\partial^+ \Lambda_{[MN]}$ への $E^{\geq h}$ の最近接パスが存在しない

$$\lim_{N \to \infty} P(A_N^h) = \begin{cases} 1 & h > h_{**} \text{ のとき} \\ 0 & h < h_* \text{ のとき} \end{cases}$$

Q. $P(A_N^h)$ の $N \to \infty$ での振る舞い？

断絶確率の漸近挙動

定理 8 (Sznitman (2015), Nitzschner (2018))

$d \geq 3$ とする.

1. 任意の $h \leq h_{**}$ に対し
$$\varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\big(A_N^h\big) \geq -\frac{1}{2}(h_{**}-h)^2 \mathrm{Cap}([-1,1]^d)$$
2. ある $\overline{h} \leq h_*(\leq h_{**})$ が存在して，任意の $h \leq \overline{h}$ に対し
$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\big(A_N^h\big) \leq -\frac{1}{2}(\overline{h}-h)^2 \mathrm{Cap}([-1,1]^d)$$

注意 7

$\overline{h}$ について分かっているのは $\overline{h} > -\infty$ のみ．$\overline{h} \geq 0$ すら不明

断絶確率の漸近挙動

$D \subset \Lambda := [-1,1]^d$：区分的に滑らかな境界を持つ領域
$\mathrm{dist}(\partial D, \Lambda^c) \geq \delta > 0$
$D_N := N\overline{D} \cap \mathbb{Z}^d$

命題 3 (Nitzschner (2018))

$\overline{h} = h_* = h_{**}$ を仮定する.
$h < h_*$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{1}{|D_N|}\sum_{x\in D_N} \phi_x \leq -(h_* - h) + \varepsilon \;\Big|\; A_N^h\Big) = 1$$

（仮定が成り立つとして）
$h < h_*$ の時に高さ h 以上のレベル集合パーコレーションが起きないと条件付けた下では場が $h_* - h$ だけ下に押し下げられる

エントロピー的反発

定理 9 (Bolthausen-Deuschel-Zeitouni (1995))

$d \geq 3$ とする．任意の $\alpha > -\sqrt{4G}$ に対し，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}\log N} \log P\big(\Omega_+^{\alpha_N}(\Lambda_N)\big) = -(\alpha + \sqrt{4G})^2 \mathrm{Cap}([-1,1]^d)$$

ただし $\alpha_N := \alpha\sqrt{\log N}$ とする．

エントロピー的反発

定理 10 (Bolthausen-Deuschel-Zeitouni (1995))

$d \geq 3$ とする．任意の $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$ に対し

$$\lim_{N \to \infty} \min_{x \in \Lambda_{\varepsilon N}} P\Big(\Big| \frac{\phi_x}{\sqrt{\log N}} - \sqrt{4G} \Big| \leq \delta \Bigm| \Omega_+^0(\Lambda_N) \Big) = 1$$

DGFF で Λ_N 上で正に条件付けると，
場が全体に $\sqrt{4G \log N}$ だけ上に押し上げられる

$P(A_N^h)$, $P(\Omega_+^{\alpha_N}(\Lambda_N))$ の下界の証明について

Idea : measure change argument

$f_N : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ finite support に対し $\widetilde{P}_N$ を以下で定義する

$$\frac{d\widetilde{P}_N}{dP} = \exp\left\{\mathcal{D}(f_N, \phi) - \frac{1}{2}\mathcal{D}(f_N, f_N)\right\}$$

ただし，$f, g : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathcal{D}(f,g) := \frac{1}{4d} \sum_{\substack{\{x,y\} \\ |x-y|=1}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$$

注意 8

- 任意の $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し，$E^P\left[\mathcal{D}(f,\phi)\phi_x\right] = f(x)$
- $E^P\left[\left(\mathcal{D}(f,\phi)\right)^2\right] = \mathcal{D}(f,f)$
- Cameron-Martin formula より

  $\{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ under $\widetilde{P}_N \overset{d}{=} \{\phi_x + f_N(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ under P

$P(A_N^h)$, $P(\Omega_+^{\alpha_N}(\Lambda_N))$ の下界の証明について

次を用いる

エントロピー不等式

事象 A に対し

$$P(A) \geq \widetilde{P}_N(A) \exp\left\{ -\frac{1}{\widetilde{P}_N(A)} \left(H(\widetilde{P}_N | P) + \frac{1}{e} \right) \right\}$$

ここで

$$H(\widetilde{P}_N | P) := E^{\widetilde{P}_N}\left[\log \frac{d\widetilde{P}_N}{dP} \right] = \frac{1}{2} \mathcal{D}(f_N, f_N)$$

そこで $\lim_{N\to\infty} \widetilde{P}_N(A) = 1$ となるように f_N をうまく取る

$P(A_N^h)$ の下界の証明

$A_N^h = \{\phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}; \Lambda_N \overset{\geq h}{\nleftrightarrow} \partial^+ \Lambda_{[MN]}\}$, $h < h_{**}$ とする

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し，$f_N(x) := f\left(\frac{x}{N}\right)$ $(x \in \mathbb{Z}^d)$ とすると

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} H(\widetilde{P}_N | P) = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \mathcal{D}(f_N, f_N)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_c f(r)|^2 dr$$

$f \leq -(h_{**} - h + \varepsilon) 1_{[-(1+\delta),\ 1+\delta]^d}$ $(\varepsilon > 0, \delta > 0, 1 + \delta < M)$
と取ると [Rodriguez-Sznitman '13] より

$$\widetilde{P}_N(A_N^h) = P\left(\Lambda_N \overset{\geq h - f_N}{\nleftrightarrow} \partial^+ \Lambda_{[MN]}\right)$$
$$\geq P\left(\Lambda_N \overset{\geq h_{**} + \varepsilon}{\nleftrightarrow} \partial^+ \Lambda_{[(1+\delta)N]}\right) \to 1$$

そこでエントロピー不等式で $\liminf_{N\to\infty}$, $\varepsilon \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$ とすればよい

$P\big(\Omega_+^{\alpha_N}(\Lambda_N)\big)$ の下界の証明

$\Omega_+^{\alpha_N}(\Lambda_N) = \big\{\phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}; \phi_x \geq \alpha\sqrt{\log N}\ \forall x \in \Lambda_N\big\}$ とする

$f \geq 1_{[-1,\ 1]^d}$ に対し，$f_N(x) = \beta\sqrt{\log N} f\big(\frac{x}{N}\big)$ $(\beta > \alpha)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}_N(\Omega_+^{\alpha_N}(\Lambda_N)) &= P\big(\phi_x \geq (\alpha-\beta)\sqrt{\log N}\ \forall x \in \Lambda_N\big) \\
&\geq \prod_{x\in\Lambda_N} P\big(\phi_x \geq (\alpha-\beta)\sqrt{\log N}\big) \\
&\geq \left(1 - \exp\Big\{-\frac{(\beta-\alpha)^2}{2G}\log N\Big\}\right)^{cN^d} \\
&\to 1 \quad (\beta > \alpha + \sqrt{2dG} \text{ のとき })
\end{aligned}
$$

注意 9

この方法で示せるのは

$$
\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}\log N} \log P\big(\Omega_+^{\alpha_N}(\Lambda_N)\big) \geq -(\alpha+\sqrt{2dG})^2 \mathrm{Cap}([-1,1]^d)
$$

$\nabla\phi$ 界面モデルに対するレベル集合パーコレーション

$\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, $\psi \in \mathbb{R}^{\partial^+\Lambda}$ に対し

$$H_\Lambda^\psi(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\{x,y\}\cap\Lambda\neq\emptyset \\ |x-y|=1}} V(\phi_x - \phi_y) \Big|_{\phi\equiv\psi \text{ on } \partial^+\Lambda}$$

: $d+1$ 次元界面の配置 $\phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ のエネルギー

相互作用ポテンシャル $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ には C^2 級，対称，狭義凸 を仮定

$$\mu_\Lambda^\psi(d\phi) = \frac{1}{Z_\Lambda^\psi} \exp\{-H_\Lambda^\psi(\phi)\} \prod_{x\in\Lambda} d\phi_x$$

: 有限領域 Gibbs 測度

$\nabla\phi$ 界面モデルに対するレベル集合パーコレーション

$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$：無限領域 Gibbs 測度

任意の $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し，次の DLR 方程式を満たすもの

$$\mu(\,\cdot\,|\mathcal{F}_{\Lambda^c})(\psi) = \mu_\Lambda^\psi(\,\cdot\,) \quad \mu\text{-a.e. } \psi$$

注意 10

$d \geq 3$ の場合は無限領域 Gibbs 測度は存在する

$\Big(\because$ Brascamp-Lieb 不等式より $\{\mu_{\Lambda_N}^0\}_{N\geq 1}$ は tight

(適当な部分列に沿った) 極限は DLR 方程式を満たす $\Big)$

注意 11

μ の平行移動不変性は不明

注意 12

$V(r) = \frac{1}{4d} r^2$ のとき

$\mu_\Lambda^0 = \mathcal{N}(0, (-\Delta_\Lambda)^{-1})$: Λ 上の DGFF

$$\left(\because \ H_\Lambda^0(\phi) = \frac{1}{8d} \sum_{\substack{\{x,y\}\cap\Lambda\neq\emptyset \\ |x-y|=1}} (\phi_x - \phi_y)^2 \Big|_{\phi\equiv 0 \text{ on } \partial^+\Lambda} \right.$$
$$\left. = \frac{1}{2} \langle \phi, \ (-\Delta_\Lambda)\phi \rangle_\Lambda \quad \right)$$

$d \geq 3$ のとき $\mu = \mathcal{N}(0, (-\Delta)^{-1})$: $\mathbb{Z}^d$ 上の DGFF

$\nabla\phi$ 界面モデルに対するレベル集合パーコレーション

μ に対し次の decoupling inequality が成り立つ

定理 11 (Rodriguez (2016))

$d \geq 3$ とする．ある正定数 $K, C, C', \alpha > 0$ が存在し，
任意の $N \geq 1$, $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$, $h \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つ．
$x, y \in \mathbb{Z}^d$ を $|x - y| \geq \gamma^{-K} N$ を満たすものとすると
任意の $f : \Omega \to [0, \infty)$: $\mathcal{F}_{\Lambda_N(x)}$-可測有界関数
$\mathcal{C}^h(B)$: $\sigma\left(\left\{1_{\{\phi_x \geq h\}}; x \in B\right\}\right)$-可測増加事象, $B \subset \Lambda_N(y)$
に対し

$$E^\mu\left[f \cdot 1_{\mathcal{C}^h(B)}\right] \leq E^\mu\left[f\right]\mu\left(\mathcal{C}^{h-\gamma}(B)\right) + C\|f\|_\infty e^{-C' N^\alpha}$$

$\Rightarrow$ (平行移動不変性を仮定した上で)
μ の下でのレベル集合パーコレーション ($h_* < \infty$, etc.) に応用可

定理 11 の証明について

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \Subset \mathbb{Z}^{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \phi$, $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{\Omega} \to [\boldsymbol{0}, \infty)$: $\mathcal{F}_{\boldsymbol{A}}$-可測有界関数

$\boldsymbol{\Lambda} \Subset \mathbb{Z}^{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{\Lambda} \supset \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を取る

ϕ, $\widetilde{\phi}$: indep. copy $\phi \sim \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{\Lambda}}$, $\widetilde{\phi} \sim \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{\Lambda}}$

いま，“よい”集合 $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ を構成し，任意の $(\phi, \widetilde{\phi}) \in \mathcal{E}$ に対し

$$\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{\Lambda}}\big(\mathcal{C}^{h}(B) \,\big|\, \mathcal{F}_{A}\big)(\phi) \le \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{\Lambda}}\big(\mathcal{C}^{h-\gamma}(B) \,\big|\, \mathcal{F}_{A}\big)(\widetilde{\phi}) \tag{2}$$

が成り立つとすると

$$\begin{aligned}
&E^{\mu^0_\Lambda}\big[f \cdot 1_{\mathcal{C}^h(B)}\big] \\
&= E^{\mu^0_\Lambda \otimes \widetilde{\mu}^0_\Lambda}\Big[f(\phi)\mu^0_\Lambda\big(\mathcal{C}^h(B) \,\big|\, \mathcal{F}_A\big)(\phi)\big(1_{\mathcal{E}}(\phi, \widetilde{\phi}) + 1_{\mathcal{E}^c}(\phi, \widetilde{\phi})\big)\Big] \\
&\le E^{\mu^0_\Lambda \otimes \widetilde{\mu}^0_\Lambda}\big[f(\phi)\mu^0_\Lambda\big(\mathcal{C}^{h-\gamma}(B) \,\big|\, \mathcal{F}_A\big)(\widetilde{\phi})\big] + \|f\|_\infty \mu^0_\Lambda \otimes \widetilde{\mu}^0_\Lambda(\mathcal{E}^c) \\
&\le E^{\mu^0_\Lambda}\big[\,f\,\big]\mu^0_\Lambda\big(\mathcal{C}^{h-\gamma}(B)\big) + \|f\|_\infty \mu^0_\Lambda \otimes \widetilde{\mu}^0_\Lambda(\mathcal{E}^c)
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ をどう構成するか？

$\phi = \{\phi_x\}_{x \in A}$, $\widetilde{\phi} = \{\widetilde{\phi}_x\}_{x \in A}$, $\gamma > 0$ が与えられたとして

境界条件：$\xi(t) = \{\xi_x(t)\}_{x \in A \cup \Lambda^c}$ $(0 \leq t \leq 1)$ を次で定義する.

$$\xi_x(t) = \begin{cases} \gamma t & x \in \Lambda^c \text{ のとき} \\ (1-t)\phi_x + t(\widetilde{\phi}_x + \gamma) & x \in A \text{ のとき} \end{cases}$$

特に

$$\xi_x(0) = \begin{cases} 0 & x \in \Lambda^c \text{ のとき} \\ \phi_x & x \in A \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\xi_x(1) = \begin{cases} \gamma & x \in \Lambda^c \text{ のとき} \\ \widetilde{\phi}_x + \gamma & x \in A \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで $F(t) := \mu^{\xi(t)}_{\Lambda\setminus A}\big(\mathcal{C}^h(B)\big)$ が単調非減少だとすると

$$\begin{aligned}\mu^0_\Lambda\big(\mathcal{C}^h(B)\,\big|\,\mathcal{F}_A\big)(\phi) = F(0) &\le F(1)\\ &= \mu^\gamma_\Lambda\big(\mathcal{C}^h(B)\,\big|\,\mathcal{F}_A\big)(\widetilde{\phi}+\gamma)\\ &= \mu^0_\Lambda\big(\mathcal{C}^{h-\gamma}(B)\,\big|\,\mathcal{F}_A\big)(\widetilde{\phi})\end{aligned}$$

従って (2) が成立する.

そこで任意の $0 \le t \le 1$ に対し $F'(t) \ge 0$ としたい.

$$\begin{aligned}F'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{Z^{\xi(t)}_{\Lambda\setminus A}}\int_{\mathbb{R}^{\Lambda\setminus A}} 1_{\mathcal{C}^h(B)}(\phi)e^{-H^{\xi(t)}_{\Lambda\setminus A}(\phi)}\prod_{x\in\Lambda\setminus A} d\phi_x\right)\\ &= \mathrm{Cov}_{\mu^{\xi(t)}_{\Lambda\setminus A}}\left(1_{\mathcal{C}^h(B)}(\phi), \frac{d}{dt}\big(-H^{\xi(t)}_{\Lambda\setminus A}(\phi)\big)\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}_{\mu^\psi_\Lambda}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ の RW 表現が有効

Helffer-Sjöstrand 表現

L_Λ^ψ : 次の SDEs に対応する生成作用素

$$\begin{cases} d\phi_t(x) = -\sum_{\substack{y\in\overline{\Lambda} \\ |y-x|=1}} V'(\phi_t(x)-\phi_t(y))dt + \sqrt{2}dw_t(x) \quad x\in\Lambda \\ \phi_t(x) = \psi(x) \quad x\in\partial^+\Lambda \end{cases}$$

注意 13

μ_Λ^ψ は L_Λ^ψ の可逆測度となる

$f:\overline{\Lambda}\to\mathbb{R}$, $f=0$ on $\partial^+\Lambda$ に対し

$$(Q_\Lambda^{\phi,\psi}f)(x) := \sum_{\substack{y\in\overline{\Lambda} \\ |y-x|=1}} V''\big(\phi(x)-(\phi\vee\psi)(y)\big)\big(f(y)-f(x)\big)$$

Helffer-Sjöstrand 表現

$F : \Lambda \times \mathbb{R}^{\Lambda} \to \mathbb{R}$ に対し

$$(\mathcal{L}_{\Lambda}^{\psi})(x,\phi) := (L_{\Lambda}^{\psi} F(x,\,\cdot\,))(\phi) + (Q_{\Lambda}^{\phi,\psi} f(\,\cdot\,\phi))(x) \quad x \in \Lambda, \phi \in \mathbb{R}^{\Lambda}$$

$(X_t, \phi_t)_{t \geq 0}$: $\mathcal{L}_{\Lambda}^{\psi}$ から定まる $\overline{\Lambda} \times \Omega_{\Lambda}^{\psi}$ 上の Markov process

$\mathcal{P}_{x,\phi'}^{\psi}$: 初期分布 $(X_0, \phi_0) \sim \delta_x \otimes \delta_{\phi'}$ とした $(X_t, \phi_t)_{t \geq 0}$ の分布

$\mathcal{P}_{x,\mu_{\Lambda}^{\psi}}^{\psi}$: 初期分布 $(X_0, \phi_0) \sim \delta_x \otimes \mu_{\Lambda}^{\psi}$ とした $(X_t, \phi_t)_{t \geq 0}$ の分布

定理 12 (Helffer-Sjöstrand 表現)

$F = F(\phi)$, $G = G(\phi)$ に対し

$$\mathrm{Cov}_{\mu_{\Lambda}^{\psi}}(F,G) = \sum_{x \in \Lambda} \int_0^{\infty} E_{x,\mu_{\Lambda}^{\psi}}^{\psi} \Big[\partial F(x,\phi_0) \partial G(X_s,\phi_s) I(s < \tau_{\Lambda}) \Big] ds$$

ここで $\partial F(x,\phi) = \dfrac{\partial F}{\partial \phi(x)}$

$\mathcal{E}$ を次のように取ればよい.

$M = M(\gamma) > 0$ (うまく取る) に対し

$$\mathcal{E} = \bigcap_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \bigcap_{(x,\phi')\in B\times\mathbb{Q}^{\Lambda\setminus A}} \Big\{ E^{\xi(t)}_{x,\phi'}\big[\widetilde{\phi}(X_{H_A}) \,\big|\, H_A < H_{\Lambda^c}\big] - E^{\xi(t)}_{x,\phi'}\big[\phi(X_{H_A}) \,\big|\, H_A < H_{\Lambda^c}\big] \geq -M \Big\}$$

注意 14 (DGFF の場合)

$$\mathcal{E} = \bigcap_{x\in B} \Big\{ \mathbb{E}_x\big[\widetilde{\phi}(S_{H_A})\,;\, H_A < H_{\Lambda^c}\big] - \mathbb{E}_x\big[\phi(S_{H_A})\,;\, H_A < H_{\Lambda^c}\big] \geq -\gamma \Big\}$$

注意 15 (平均の RW 表現)

$$E^{\mu^{\widetilde{\phi}\vee 0}_{\Lambda\setminus A}}[\phi_x] = \int_0^1 E^{\widetilde{\phi}\vee 0}_{x,\mu^{(s\widetilde{\phi})\vee 0}_{\Lambda\setminus A}}\big[\widetilde{\phi}(X_{H_A})\,;\, H_A < H_{\Lambda^c}\big]ds$$