$\mathbb{Z}^d$ 上の離散 Gauss 自由場に対するレベル集合パーコレーションについて

坂川 博宣 (慶應義塾大学) *

概 要

$\mathbb{Z}^d$ 上の離散 Gauss 自由場に対するレベル集合パーコレーションについて，初期の結果から現在までに行われている研究の一部とそれらの鍵となるアイデアを簡単に紹介する．

1 問題設定と初期の結果

$\phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の確率場，つまり実数値確率変数の族とし，P を $\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ 上のその分布とする．$h \in \mathbb{R}$ に対し $E^{\geq h} = E^{\geq h}(\phi) := \{x \in \mathbb{Z}^d; \phi_x \geq h\}$ を高さ h 以上のレベル集合として，原点 $0 \in \mathbb{Z}^d$ が $E^{\geq h}$ の無限クラスターに含まれるという事象を $\{0 \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \infty\}$ で表し，この実現確率について考えたい．直観的なイメージとしては，ϕ が (ランダムな) 地面の高さを表しているとして高さ h のレベルまで水につかった時に，水面上に現れている陸地を伝って無限遠点まで行ける確率は？という問題である．いま，$\eta(h) := P(0 \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \infty)$ とするとこれは $h \in \mathbb{R}$ について単調非増加であり，

$$h_* = h_*(d) := \inf\{h \in \mathbb{R}; \eta(h) = 0\} \in [-\infty, \infty]$$

が定義できる．特に $|h_*| < \infty$ のときパーコレーション転移が起こるという．ϕ が独立同分布の確率場の時はこれはパラメーター $\rho = P(\phi_0 \geq h)$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の Bernoulli サイトパーコレーションの問題に他ならない．考えたいのは確率場 ϕ が独立でない場合である．この問題は最初は Molchanov-Stepanov によって考えられたが (cf. [14], [13, Chapter 8])，そこでは非自明な相転移の存在のために次のような十分条件が与えられている．

定理 1.1 ([14])**.** 以下の条件が成り立つならば $h_* < \infty$：任意の有限連結集合 $A \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し

$$P\big(\phi_x \geq h \ \ \forall x \in A\big) \leq Ce^{-\alpha|A|}$$

ここで C, α は A に依らない正定数で，$h \uparrow +\infty$ のとき $\alpha = \alpha(h) \uparrow +\infty$ かつ $C = C(h) < +\infty$ を満たすものとする．

この定理の証明は場が独立な場合のパーコレーションで用いられる Peierls の議論と同様である．問題は定理の条件がいつ成り立つかということであるが，これは場の相関が弱い場合に成立する．

以下では C, C' などは考えている系のサイズ (N とする) に依らない正定数を表し, 場所によって変わるものとする (他のパラメーターには依存することもある). いま, 例として $\phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ が $\mathbb{Z}^d$ 上の平均（ベクトル）0 の Gauss 確率場の場合を考える．雑な評価としては任意の $h \geq 0$ に対し

$$P(\phi_x \geq h \ \ \forall x \in A) \leq P\Big(\frac{1}{|A|}\sum_{x\in A}\phi_x \geq h\Big) \leq \exp\Big\{-\frac{h^2|A|^2}{2\mathrm{Var}\big(\sum_{x\in A}\phi_x\big)}\Big\} \tag{1.1}$$

*慶應義塾大学理工学部数理科学科, 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, *E-mail address*: sakagawa@math.keio.ac.jp

が成り立つ．最後の不等式は Gauss 確率変数に対する末尾確率の評価を用いた．

正質量 Gauss 自由場 (massive Gaussian free field) の場合

$m > 0$ とし，$\{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ を平均（ベクトル）0，共分散行列 $(m^2 I - \Delta)^{-1}$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の Gauss 確率場とする．ここで I は $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ 単位行列であり，$\Delta = \{\Delta(x,y)\}_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ は $\mathbb{Z}^d$ 上の離散 Laplacian を表す．その核は

$$\Delta(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & |x-y| = 1 \text{ のとき} \\ -1 & x = y \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

で与えられ，関数 $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ に対し $(\Delta f)(x) := \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \Delta(x,y) f(y), x \in \mathbb{Z}^d$ と定義する．正質量 Gauss 自由場は任意の $d \geq 1$ で存在し，相関関数が次のような指数的減衰することが知られている (cf. [8, Chapter 8], [9, Section 3])．

補題 1.1. $d \geq 1$ とする．ある定数 $C_1 = C_1(d,m), C_2 = C_2(d,m) > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し次が成り立つ．

$$0 < E\big[\phi_0\phi_x\big] \leq C_1 e^{-C_2|x|}$$

これより任意の $A \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathrm{Var}\Big(\sum_{x\in A} \phi_x\Big) \leq C|A|$ が成り立つ．ただし C は集合 A に依らない正定数である．(1.1) と合わせれば定理 1.1 の条件が成立し，従って $h_* < \infty$ となる．また，対称性を考えると $h_* > -\infty$ もいえる．

注意 1.1. この議論は正質量 Gauss 自由場に限ったものではない．(1.1) と同様の評価は ϕ が指数モーメントを持てば可能であり, [2] では更に場の相関関数に対するいくつかの仮定を加えた下で定理 1.1 の条件が成り立つことを示している．

零質量 Gauss 自由場 (massless Gaussian free field) の場合

$\{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ を平均（ベクトル）0，共分散行列 $(-\Delta)^{-1}$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の Gauss 確率場とする．これは $d \geq 3$ の場合のみ存在し，相関関数に対し次の漸近挙動が成り立つことが知られている (cf. [8], [9])．

補題 1.2. $d \geq 3$ とする．ある定数 $C_1 = C_1(d) > 0$ が存在して $|x| \to \infty$ のとき次が成り立つ．

$$E\big[\phi_0\phi_x\big] \sim \frac{C_1}{|x|^{d-2}} \tag{1.2}$$

特に $\Lambda_N := [-N,N]^d \cap \mathbb{Z}^d$ に対し，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d+2}} \mathrm{Var}\Big(\sum_{x\in\Lambda_N} \phi_x\Big) = C \in (0,\infty) \tag{1.3}$$

(1.1) と (1.3) を組み合わせると得られるのは

$$P(\phi_x \geq h \ \ \forall x \in \Lambda_N) \leq \exp\Big\{-C' h^2 |\Lambda_N|^{1-\frac{2}{d}}\Big\}$$

であり，この評価からは定理 1.1 の条件は言えない．

注意 1.2. 実際のところ零質量 Gauss 自由場に対しては定理 1.1 の条件は成立しない．例えば Bolthausen-Deuschel-Zeitouni [1] では次が示されている．任意の $d \geq 3$, $h \in \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}\log N} \log P\big(\phi_x \geq h \ \forall x \in \Lambda_N\big) = -2G\mathrm{Cap}([-1,1]^d)$$

ここで $G := (-\Delta)^{-1}(0,0)(\in (0,\infty))$ であり，

$$\mathrm{Cap}([-1,1]^d) = \inf\Big\{ \frac{1}{2d}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_c f(r)|^2 dr; f \in H^1(\mathbb{R}^d), f \geq 1_{[-1,1]^d} \Big\}$$

∇_c は $\mathbb{R}^d$ 上の連続な gradient である．

以下 $d \geq 3$ とし，$\{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の零質量 Gauss 自由場とする．これは離散 Gauss 自由場 (discrete Gaussian free field, 以下 DGFF と略記) とも呼ばれる．相関が非常に強いことを考えると $h_* < \infty$ は直観的にも自明ではない．任意の $h \in \mathbb{R}$ に対し $\{0 \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \infty\}$ が正の確率で起きても良さそうである．DGFF の長距離相関が引き起こす現象の一つとして例えば次のようなエントロピー的反発と呼ばれる現象が知られている．

定理 1.2 ([1], [3])**.** $d \geq 3$ とし，$P_N^+(\,\cdot\,) := P(\,\cdot\,|\phi_x \geq 0 \;\; \forall x \in \Lambda_N)$ と定義すると以下が成り立つ．

1. $$\lim_{N\to\infty} \max_{x\in\Lambda_N} \Big| \frac{E^{P_N^+}[\phi_x]}{\sqrt{\log N}} - \sqrt{4G} \Big| = 0$$

2. 正数列 $\{a_N\}_{N\geq 1}$ で $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{a_N}{\sqrt{4G\log N}} = 1$ かつ $N \to \infty$ のとき $P_N^+(\,\cdot\, + a_N) \Rightarrow P$ を満たすものが存在する．

つまり DGFF に対し Λ_N 上で場を正に条件付けると場が $\sqrt{4G\log N}$ の高さまで持ち上げられ，かつこの高さの移動の効果を除くと場の形はあまり変わらない．また，P_N^+ の定義で条件を $\{\phi_x \geq h \;\forall x \in \Lambda_N\}$ $(h \in \mathbb{R})$ と変えても全く同じ主張が成り立つ．

DGFF に対するレベル集合パーコレーションを最初に考えたのは Bricmont-Lebowitz-Maes [2] であり，彼らは次を示している．

定理 1.3 ([2])**.** $h_*(3) < \infty$ かつ任意の $d \geq 3$ に対し $h_*(d) \geq 0$.

この結果以降の約 25 年間は $E^{\geq h}$ の代わりに $\{x \in \mathbb{Z}^d; |\phi_x| \geq h\}$ のパーコレーションについて調べた結果 Garet [10] があるぐらいでしばらく停滞する状況が続いたが，2010 年代に入り Rodriguez-Sznitman [20] によって次が示された．

定理 1.4 ([20])**.** 任意の $d \geq 3$ に対し $h_*(d) < \infty$ かつある $h_0 > 0$ が存在して任意の d:十分大に対し $h_*(d) \geq h_0$.

また，P の平行移動不変性と相関関数 $G(x,y) := (-\Delta)^{-1}(x,y)$ が $|x-y| \to \infty$ のとき 0 に減衰することから場の混合性が成り立ち，これより次の 0-1 法則が成り立つ．

定理 1.5 ([20])**.** $d \geq 3$ のとき次が成立する．

$$P\big(E^{\geq h}\text{が無限クラスターを含む}\big) = \begin{cases} 1 & h < h_*\text{のとき} \\ 0 & h > h_*\text{のとき} \end{cases}$$

更に $h < h_*$ のとき P-a.s. で $E^{\geq h}$ の中の無限クラスターは 1 つとなる．

次節では定理 1.4 の証明の鍵となるアイデアを簡単に紹介したい．

2 Rodriguez-Sznitman [20] の証明のアイデア

2.1 $h_* < \infty$ について

DGFF に対するレベル集合パーコレーションの問題の最大の難点は補題 1.2 のように場が長距離相関を持つことにあるが，より一般の相関の評価として次が知られている．$A \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し，$\mathrm{cap}(A) := \sum_{x\in A} \mathbb{P}_x(\widetilde{H}_A = +\infty)$ で A の容量を定義する．$\{S_n\}_{n\geq 0}$ は $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークであり，$\mathbb{P}_x, \mathbb{E}_x$ は出発点を $x \in \mathbb{Z}^d$ としたときの分布，期待値を表す．$\widetilde{H}_A := \inf\{n \geq 1; S_n \in A\}$ は $A \subset \mathbb{Z}^d$ への到達時刻である．

命題 2.1 ([16])**.** $d \geq 3$ とする．次元のみに依存した定数 $0 < C_- \leq C_+ < \infty$ が存在し，$A \cap B = \phi$, $\mathrm{dist}(A,B) \geq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}$ を満たす任意の有限集合 $A, B \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し次が成り立つ．

$$C_- \frac{\big(\mathrm{cap}(A)\mathrm{cap}(B)\big)^{\frac{1}{2}}}{\big(\mathrm{dist}(A,B)\big)^{d-2}} \leq \sup_{f,g}\big\{\mathrm{Cov}_P(f(\phi), g(\phi))\big\} \leq C_+ \frac{\big(\mathrm{cap}(A)\mathrm{cap}(B)\big)^{\frac{1}{2}}}{\big(\mathrm{dist}(A,B)\big)^{d-2}}$$

ここで，$\sup_{f,g}$ は $f, g : \Omega \to [0,1]$ で f は $\mathcal{F}_A$-可測な局所関数，g は $\mathcal{F}_B$-可測な局所関数に対し取るものとする．ただし，$A \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathcal{F}_A := \sigma(\{\phi_x; x \in A\})$ とする．

いま, $\Lambda_N := [-N,N]^d \cap \mathbb{Z}^d$ に対しては $CN^{d-2} \leq \mathrm{cap}(\Lambda_N) \leq C'N^{d-2}$ が成り立つ (cf. [12, Chapter 6])．そこで $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\Lambda_N(x) := x + \Lambda_N$ と定義し，$f : \Omega \to [0,\infty)$ を $\mathcal{F}_{\Lambda_N(x)}$-可測な有界局所関数, $g : \Omega \to [0,\infty)$ を $\mathcal{F}_{\Lambda_N(y)}$-可測な有界局所関数として，$M > 2$ を固定して $|x-y| = MN$ と取る．このとき，命題 2.1 より f, g の相関関数の評価としては $\mathrm{Cov}_P(f(\phi), g(\phi)) \leq CM^{-d+2}$ 以上は期待できず，特にこの右辺は $N \to \infty$ としても 0 に収束しない．このような状況の下で $h_c < \infty$, つまり $h \in \mathbb{R}$ が十分大きいときは $E^{\geq h}$ のパーコレーションが起きないことの証明で鍵となるのが非干渉不等式 (decoupling inequality) と呼ばれる次の評価である．

命題 2.2 ([20], [16])**.** $d \geq 3$, $A, B \Subset \mathbb{Z}^d$, $A \cap B = \phi$ とし $f : \Omega \to [0,\infty)$ を $\mathcal{F}_A$-可測な有界局所関数とする．任意の $h \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ に対し次が成り立つ．

$$E^P\big[f \cdot 1_{\Omega_+^h(B)}\big] \leq E^P\big[f\big]P\big(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\big) + \|f\|_\infty |B| \exp\Big\{-\frac{\gamma^2}{4 \max_{x\in A, y\in B} G(x,y)}\Big\}$$

ただし $A \subset \mathbb{Z}^d$, $h \in \mathbb{R}$ に対し $\Omega_+^h(A) := \{\phi_x \geq h \ \forall x \in A\}$ と定義する．

注意 2.1. f が単調非減少のときは FKG 不等式により次の下からの評価が成立する．

$$E^P\big[f \cdot 1_{\Omega_+^h(B)}\big] \geq E^P\big[f\big]P\big(\Omega_+^h(B)\big)$$

特に前述の設定のように $\mathrm{dist}(A,B) \geq MN$ として $f = 1_{\Omega_+^h(A)}$ と取れば，相関関数の評価 (1.2) と合わせると任意の $\gamma > M^{-\frac{d}{2}+1}$ に対し

$$P\big(\Omega_+^h(A)\big)P\big(\Omega_+^h(B)\big) \leq P\big(\Omega_+^h(A) \cap \Omega_+^h(B)\big) \leq P\big(\Omega_+^h(A)\big)P\big(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\big) + |B|e^{-CN^{d-2}}$$

となり, DGFF において事象 $\Omega_+^h(A)$ を考えたとき，パラメーターを少しだけ変えるとその相関が大きく変わることがわかる．このような評価を利用することで Bernoulli パーコレーションにおいて用いられるような renormalization の議論 (cf. [11]) が展開でき，結果として次が示される．

定理 2.1 ([20])**.** $d \geq 3$ とする.

1. $h_{**} = h_{**}(d) := \inf\bigl\{h \in \mathbb{R};\ \exists \alpha > 0$ に対し $\lim_{N\to\infty} N^{\alpha} P(\Lambda_N \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \partial^{+}\Lambda_{2N}) = 0\bigr\}$ と定義すると, $h_{**}(d) < \infty$. ここで $A \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\partial^{+}A := \{x \notin A; |y-x| = 1 \text{ for some } y \in A\}$ は A の外部境界を表し, $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ に対し $\{A \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} B\}$ は A から B への $E^{\geq h}$ の最近接パスが存在するという事象を表す.

2. 任意の $h > h_{**}(d)$ に対しある正定数 $C_1, C_2 > 0$, $\rho \in (0,1)$ が存在して任意の $N \geq 1$ に対し
$$P(0 \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \partial^{+}\Lambda_N) \leq C_1 e^{-C_2 N^{\rho}} \tag{2.1}$$
が成り立つ.

特に任意の $N \geq 1$ に対し $\eta(h) \leq P(\Lambda_N \overset{\geq h}{\longleftrightarrow} \partial^{+}\Lambda_{2N})$ なので定義から $h_* \leq h_{**}$ が成り立ち, 結果として任意の $d \geq 3$ に対し $h_*(d) < \infty$ がわかる.

注意 2.2. 命題 2.2 は [20] で定理 2.1 の証明中に出てくる評価を簡単に書き直したものである. Popov-Ráth [16] では DGFF に対する非干渉不等式を命題 2.2 よりもう少し一般化して示している. また, 現在では DGFF のレベル集合に限らず非干渉不等式を満たすような一般の長距離相関を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の確率場に対するパーコレーションの研究も進んでいる (cf. [5], [17], [21], etc.). 特に $d \geq 4$ の場合は (2.1) は $\rho = 1$ で成り立つ.

命題 2.2 の証明自体は難しくなく, DGFF の持つ Markov 性やランダムウォーク表現などの基本的な道具を用いるものであり DGFF になじむのによいと思われる. 最後に付録として載せておく.

2.2 $h_* > 0$ について

[20] では d が十分大きいときに $\mathbb{Z}^d$ 内の 2 次元 slab $\mathbb{Z}^2 \times [0, L_0) \times \{0\}^{d-3}$ (ただし $L_0 > 0$ は十分大) で正の高さのレベル集合のパーコレーションが正の確率で起こること (従って $h_c > 0$) を示している. そこで以下では $K := \mathbb{Z}^3 \times \{0\}^{d-3}$ 上で考える. まず相関関数のランダムウォーク表現 $G(x,y) := (-\Delta)^{-1}(x,y) = \mathbb{E}_x\bigl[\sum_{n \geq 0} I(S_n = y)\bigr]$ より, $d \to \infty$ のとき $G(x,y) \approx \delta(x,y)$ に着目すると次を満たすような数列 $\sigma^2(d)$ と共分散行列 G' が取れる (cf. [20, Lemma 3.1]).

- 任意の $x, y \in K$ に対し $G(x,y) = \sigma^2(d)\delta(x,y) + G'(x,y)$
- $\frac{1}{2} \leq \sigma^2(d) < 1$ かつ $\lim_{d\to\infty} \sigma^2(d) = 1$
- G' を核とする $l^2(K)$ 上の畳み込み作用素のスペクトル半径 $\rho(G') \leq \frac{C}{d}$

そこで次の 2 つの独立な K 上の Gauss 場を考える. $\psi = \{\psi_x\}_{x \in K}$ を各点で平均 0, 分散 $\sigma^2(d)$ の独立同分布な正規分布に従う Gauss 場, $\xi = \{\xi_x\}_{x \in K}$ を平均 0, 共分散行列 $E[\xi_x \xi_y] = G'(x,y)$ $x, y \in K$ を持つ Gauss 場とする. このとき K 上の DGFF $\phi = \{\phi_x\}_{x \in K}$ は $\phi = \psi + \xi$ in law と分解できる (これは 2-スケール分解とも呼ばれる). 2 つの Gauss 場 ξ, ψ に対しては次がいえる.

- $\mathbb{Z}^3$ 上の Bernoulli サイトパーコレーションの臨界確率 $p_c^{\mathrm{site}}(\mathbb{Z}^3) \in (0, \frac{1}{2})$ より $h_0 > 0$: 十分小を $P(\psi_0 \geq 2h_0) > p_c^{\mathrm{site}}(\mathbb{Z}^3)$ と取れ, このとき ψ-場に対する高さ $2h_0$ 以上のレベル集合 $E^{\geq 2h_0}(\psi)$ のパーコレーションについては $\mathbb{Z}^3$ 上の super critical な Bernoulli サイトパーコレーションと比較ができる (ここで 2 次元 slab 内でのサイトパーコレーションの結果を用いる).

- d が十分大きいとき ξ-場の相関は小さく Molchanov-Stepanov の定理と同様の議論が可能

すると，例えば $\mathbb{Z}^d$ の box 内で $E^{\geq 2h_0}(\psi)$ の最近接パスによる横断があり，かつその上では常に $\xi \geq -h_0$ となる確率などの評価が可能であり，結果として $E^{\geq h_0}(\phi)$ のパーコレーションが起こる確率の評価ができる．

3 関連する話題

$d \geq 3$ における DGFF と類似の長距離相関を持つランダム交錯 (random interlacement) モデルの空集合 (vacant set) に対するパーコレーションの研究の進展 (cf. [22], [6], [18], etc.) にも関係して，Rodriguez-Sznitman の結果 [20] 以降 DGFF に対するレベル集合パーコレーションの研究は急速に進んでいる．前述の 2 つの臨界値 h_*, h_{**} に関するものとしては例えば次が挙げられる．

- Drewitz-Prévost-Rodriguez [4] では任意の $d \geq 3$ で $h_*(d) > 0$ となることを示している．
- $h_* = h_{**}$ が予想されるがこれは未解決である．Drewitz-Rodriguez [7] では $d \to \infty$ のとき $h_*(d) \sim h_{**}(d) \sim \sqrt{2G \log d}$ となることを示している．

以下では筆者が特に興味を持った関連する話題を 2 つ簡単に紹介したい．

3.1 断絶確率の漸近挙動

$M > 1$ を固定し，Λ_N から $\partial^+\Lambda_{[MN]}$ への $E^{\geq h}$ の最近接パスが存在しないという事象 $A_N^h := \{\phi; \Lambda_N \overset{\geq h}{\not\leftrightarrow} \partial^+\Lambda_{[MN]}\}$ を考える．$h > h_{**}$ のとき (2.1) より $\lim_{N\to\infty} P(A_N^h) = 1$ であり，また，$h < h_*$ のときは定義より $\lim_{N\to\infty} P(A_N^h) = 0$ となる．そこで興味が持たれるのが $h < h_*$ のときの $P(A_N^h)$ の $N \to \infty$ での振る舞いであるが，Sznitman [23], Nitzschner [15] では次を示している．

定理 3.1 ([23], [15])**.** $d \geq 3$ とする．

1. 任意の $h \leq h_{**}$ に対し，

$$\varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\big(A_N^h\big) \geq -\frac{1}{2}(h_{**} - h)^2 \mathrm{Cap}([-1,1]^d)$$

 が成り立つ．

2. ある $\overline{h} \leq h_*(\leq h_{**})$ が存在して，任意の $h \leq \overline{h}$ に対し，

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N^{d-2}} \log P\big(A_N^h\big) \leq -\frac{1}{2}(\overline{h} - h)^2 \mathrm{Cap}([-1,1]^d)$$

 が成り立つ．

もし $\overline{h} = h_* = h_{**}$ が成り立てば，上下の評価が一致し $P(A_N^h)$ の正確な漸近挙動が得られたことになるが，指数 $\overline{h}$ は証明中で（技術的に）定義される量であり，分かっているのは $\overline{h} > -\infty$ のみで，$\overline{h} \geq 0$ すら今のところ不明である．[15] では更に定理 1.2 のエントロピー的反発を連想させるような次のことを示している．いま，$D \subset \Lambda := [-1,1]^d$ を区分的に滑らかな境界を持ち $\mathrm{dist}(\partial D, \Lambda^c) \geq \delta > 0$ を満たす領域とし，$D_N := N\overline{D} \cap \mathbb{Z}^d$ と定義する．

命題 3.1 ([15])**.** $\overline{h} = h_* = h_{**}$ を仮定する．$h < h_*$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} P\Big(\frac{1}{|D_N|}\sum_{x\in D_N}\phi_x \le -(h_* - h) + \varepsilon \;\Big|\; A_N^h\Big) = 1$$

が成り立つ．

これは雑に言うと，(仮定が成り立つとして）$h < h_*$ の時に高さ h 以上のレベル集合パーコレーションが起きないと条件付けた下では場が全体に $h_* - h$ だけ下に押し下げられることを意味している．

3.2 $\nabla\phi$ 界面モデルに対するレベル集合パーコレーション

DGFF は $\nabla\phi$ 界面モデルと呼ばれる相分離界面の確率モデルの特別な場合としても現れるが，Rodriguez [19] は $\nabla\phi$ 界面モデルに対するレベル集合パーコレーションの問題について考えている．いま，配置 $\phi = \{\phi_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ は $d+1$ 次元空間内において d 次元超平面 $\mathbb{Z}^d$ から見た界面の高さを表すものとし，$\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ と境界条件 $\psi \in \mathbb{R}^{\partial^+\Lambda}$ に対し ϕ のエネルギー（Hamiltonian）を

$$H_\Lambda^\psi(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\{x,y\}\cap\Lambda\neq\emptyset\\ |x-y|=1}} V(\phi_x - \phi_y)\,\Big|_{\phi\equiv\psi \text{ on } \partial^+\Lambda}$$

で与える．$V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は相互作用ポテンシャルであり，次を仮定する．

- 滑らかさ：C^2 級
- 対称性：任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し $V(r) = V(-r)$
- (真の) 凸性：ある正定数 $0 < C_- \le C_+ < \infty$ が存在して任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し $C_- \le V''(r) \le C_+$

次に $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ 上の有限領域 Gibbs 測度を

$$\mu_\Lambda^\psi(d\phi) = \frac{1}{Z_\Lambda^\psi}\exp\big\{-H_\Lambda^\psi(\phi)\big\}\prod_{x\in\Lambda} d\phi_x \tag{3.1}$$

で定義する．Z_Λ^ψ は正規化定数であり，$d\phi_x$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を表す．続いて μ を対応する $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ 上の無限領域 Gibbs 測度，すなわち DLR 方程式：任意の $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ に対し，

$$\mu\big(\,\cdot\,|\mathcal{F}_{\Lambda^c}\big)(\psi) = \mu_\Lambda^\psi(\,\cdot\,) \quad \mu\text{-a.e. } \psi$$

を満たすものとする．

注意 3.1. $d \ge 3$ の場合は無限領域 Gibbs 測度は存在する．実際，この場合は Brascamp-Lieb 不等式より $\{\mu_{\Lambda_N}^0\}_{N\ge1}$ が緊密なことが示せ，更に (適当な部分列に沿った) 極限は DLR 方程式を満たす．ただし，こうして得られた Gibbs 測度の平行移動不変性は不明である (cf. [9, Section 4])．

注意 3.2. 特に相互作用ポテンシャルを $V(r) = \frac{1}{4d}r^2$ と取ると，0-境界条件 $\psi \equiv 0$ の下で μ_Λ^0 は平均 0, 共分散行列 $(-\Delta_\Lambda)^{-1}(x,y) = \mathbb{E}\big[\sum_{n\ge0} I(S_n = y, n < \tau_\Lambda)\big]$ を持つ Λ 上の Gauss 自由場に一致する．ここで $\tau_\Lambda = \inf\{n \ge 0; S_n \notin \Lambda\}$ は $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークの Λ からの脱出時刻である．また，$d \ge 3$ のとき対応する無限領域 Gibbs 測度は $\mathbb{Z}^d$ 上の DGFF $\mathcal{N}(0, (-\Delta)^{-1})$ となる．

[19] では Gibbs 測度 μ が命題 2.2 の非干渉不等式を満たすことを証明し，更に μ の平行移動不変性を仮定したうえで μ の下でのレベル集合パーコレーションについても調べている．特に，非干渉不等式の証明においては Helffer-Sjöstrand 表現とよばれる (動的な) ランダム媒質中のランダムウォークによる有限 Gibbs 測度 (3.1) の下での相関関数の表現 (cf. [9, Section 4]) が重要な役割を果たす．

A　命題 2.2 の証明

以下は [16], [20] の証明を事象 $\Omega_+^h(B)$ に対し適用し分かりやすくしたものである．

まず $A, B \Subset \mathbb{Z}^d$, $A \cap B = \phi$ とし $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{F}_A$-可測な有界局所関数とすると

$$E^P\big[f \cdot 1_{\Omega_+^h(B)}\big] = E^P\Big[f(\phi)E^P\big[1_{\Omega_+^h(B)}\big|\mathcal{F}_A\big](\phi)\Big] = E^P\Big[f(\phi)P\big(\Omega_+^h(B)\big|\mathcal{F}_A\big)(\phi)\Big] \tag{A.1}$$

ここで DGFF に対しては次のような分解が成り立つ．

補題 A.1. (cf. [20, Lemma 1.2], [8, Chapter 8], etc.) $A \Subset \mathbb{Z}^d$ を固定し，各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し $\mathcal{F}_A$-可測関数 $m_x^A(\phi) := \sum_{y \in A} \phi_y \mathbb{P}_x\big(S_{H_A} = y, H_A < \infty\big)$ を考える．ただし $H_A := \inf\{n \geq 0; S_n \in A\}$ とする．ここで $\mathbb{Z}^d$ 上の確率場 $\psi^A = \{\psi_x^A\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ を $\phi_x = \psi_x^A + m_x^A$ $(x \in \mathbb{Z}^d)$ によって定義すると，P の下で $\{\psi_x^A\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ は $\{m_x^A\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ と独立で，その分布は平均 0, 共分散行列 $(-\Delta_{A^c})^{-1}$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の Gauss 場 (A 上では a.s. で 0) と同分布となる．

特にこれより $P(\ \cdot\ |\mathcal{F}_A)(\phi)$ の下で $\{\phi_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ は平均 $\{m_x^A(\phi)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$, 共分散行列 $(-\Delta_{A^c})^{-1}$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の Gauss 場と同分布となる．いま，$\widetilde{\phi} = \{\widetilde{\phi}_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ を ϕ と独立な DGFF (平均 0, 共分散行列 $(-\Delta)^{-1}$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の Gauss 場) とし，その分布を $\widetilde{P}$ で表す．また，$\overline{\phi} = \{\overline{\phi}_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ を $\phi, \widetilde{\phi}$ と独立で平均 0, 共分散行列 $(-\Delta_{A^c})^{-1}$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ 上の Gauss 場とし，その分布を $\overline{P}_{A^c}$ で表す．ここで

$$(\phi, \widetilde{\phi}) \in \mathcal{E} := \big\{(\phi, \widetilde{\phi}) \in \Omega \times \Omega\,;\, m_x^A(\widetilde{\phi}) - m_x^A(\phi) \geq -\gamma,\ \forall x \in B\big\}\ (\gamma > 0)$$

が与えられたとすると

$$\begin{aligned} P\big(\Omega_+^h(B)\big|\mathcal{F}_A\big)(\phi) &= \overline{P}_{A^c}\big(\overline{\phi}_x + m_x^A(\phi) \geq h,\ \forall x \in B\big) \\ &= \overline{P}_{A^c}\big(\overline{\phi}_x + m_x^A(\widetilde{\phi}) \geq h + m_x^A(\widetilde{\phi}) - m_x^A(\phi),\ \forall x \in B\big) \\ &\leq \overline{P}_{A^c}\big(\overline{\phi}_x + m_x^A(\widetilde{\phi}) \geq h - \gamma,\ \forall x \in B\big) \\ &= \widetilde{P}\big(\widetilde{\phi}_x \geq h - \gamma,\ \forall x \in B\big|\mathcal{F}_A\big)(\widetilde{\phi}) \end{aligned}$$

これより，ϕ と $\widetilde{\phi}$ が独立同分布なことを用いると

$$\begin{aligned} E^{P \otimes \widetilde{P}}\Big[f(\phi)P\big(\Omega_+^h(B)\big|\mathcal{F}_A\big)(\phi)1_{\mathcal{E}}(\phi, \widetilde{\phi})\Big] &\leq E^{P \otimes \widetilde{P}}\Big[f(\phi)\widetilde{P}\big(\widetilde{\phi}_x \geq h - \gamma,\ \forall x \in B\big|\mathcal{F}_A\big)(\widetilde{\phi})1_{\mathcal{E}}(\phi, \widetilde{\phi})\Big] \\ &\leq E^P\big[f(\phi)\big]P\big(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\big) \end{aligned}$$

となる．(A.1) と組み合わせれば次が得られる．

$$\begin{aligned} E^P\big[f \cdot 1_{\Omega_+^h(B)}\big] &= E^{P \otimes \widetilde{P}}\Big[f(\phi)P\big(\Omega_+^h(B)\big|\mathcal{F}_A\big)(\phi)\big(1_{\mathcal{E}}(\phi, \widetilde{\phi}) + 1_{\mathcal{E}^c}(\phi, \widetilde{\phi})\big)\Big] \\ &\leq E^P\big[f(\phi)\big]P\big(\Omega_+^{h-\gamma}(B)\big) + \|f\|_\infty P \otimes \widetilde{P}(\mathcal{E}^c) \end{aligned}$$

最後に $P \otimes \widetilde{P}(\mathcal{E}^c)$ を評価する．前述のランダムウォーク表現より m_x^A もまた平均 0 の Gauss 確率変数であり，ランダムウォークの Markov 性からその分散は $\mathrm{Var}_P(m_x^A) = \sum_{y \in A} \mathbb{P}_x(S_{H_A} = y, H_A < \infty)G(x, y)$ と表せる．特に $\mathrm{Var}_P(m_x^A) \leq \max_{y \in A} G(x, y)$ である．ここで，$m_x^A(\phi) - m_x^A(\widetilde{\phi}) = \sum_{y \in A}(\phi_y - \widetilde{\phi}_y)\mathbb{P}_x\big(S_{H_A} = y, H_A < \infty\big)$ と $P \otimes \widetilde{P}$ の下で $\phi - \widetilde{\phi}$ は平均 0, 共分散行列 $2(-\Delta)^{-1}$ の Gauss 場となることに注意すると

$$P \otimes \widetilde{P}(\mathcal{E}^c) \leq \sum_{x \in B} P \otimes \widetilde{P}(m_x^A(\phi) - m_x^A(\widetilde{\phi}) < -\gamma) \leq |B| \exp\Big\{-\frac{\gamma^2}{4 \max_{x \in B, y \in A} G(x, y)}\Big\}$$

□

参考文献

[1] E. Bolthausen, J.–D. Deuschel and O. Zeitouni, *Entropic repulsion of the lattice free field*, Comm. Math. Phys., **170** (1995), 417–443.

[2] J. Bricmont, J.L. Lebowitz and C. Maes, *Percolation in strongly correlated systems: the massless Gaussian field*, J. Stat. Phys., **48** (1987), 1249–1268.

[3] J.–D. Deuschel and G. Giacomin, *Entropic repulsion for the free field: pathwise characterization in $d \geq 3$*, Comm. Math. Phys., **206** (1999), 447–462.

[4] A. Drewitz, A. Prévost and P.–F. Rodriguez, *The sign clusters of the massless free field percolate on $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ (and more)*, preprint(2017), arXiv:1708.03285.

[5] A. Drewitz, B. Ráth and A. Sapozhnikov, *On chemical distances and shape theorems in percolation models with long-range correlations*, J. Math. Phys., **55** (2014), no. 8, 083307, 30 pp.

[6] A. Drewitz, B. Ráth and A. Sapozhnikov, *Local percolative properties of the vacant set of random interlacements with small intensity*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **50** (2014), 1165–1197.

[7] A. Drewitz and P.–F. Rodriguez, *High-dimensional asymptotics for percolation of Gaussian free field level sets*, Electron. J. Probab., **20** (2015), 1–39.

[8] S. Friedli and Y. Velenik, Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction, Cambridge University Press, 2017.

[9] T. Funaki, *Stochastic interface models*, In: Lectures on Probability Theory and Statistics, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint -Flour XXXIII-2003 (ed. J. Picard), 103–274, Lect. Notes Math., **1869** (2005), Springer.

[10] O. Garet, *Percolation transition for some excursion sets*, Electron. J. Probab., **10** (2004), 255–292.

[11] G. Grimmett, Percolation, 2nd ed., Springer, 1999.

[12] G. F. Lawler and V. Limic, Random Walk: A Modern Introduction, Cambridge Univ. Press, 2010.

[13] R. Meester and R. Roy, Continuum Percolation, Cambridge Univ. Press, 1996.

[14] S.A. Molchanov and A.K. Stepanov, *Percolation in random fields I, II, III*, Theor. Math. Phys., **55** (1983), 478–484, 592–599 and **67** (1986), 434–439.

[15] M. Nitzschner, *Disconnection by level sets of the discrete Gaussian free field and entropic repulsion*, preprint (2018), arXiv:1802.02518.

[16] S. Popov and B. Ráth, *On decoupling inequalities and percolation of excursion sets of the Gaussian free field*, J. Stat. Phys., **159** (2015), 312–320.

[17] S. Popov, and A. Teixeira, *Soft local times and decoupling of random interlacements*, J. Eur. Math. Soc., **17** (2015), 2545–2593.

[18] P.–F. Rodriguez, *Level set percolation for random interlacements and the Gaussian free field*, Stochastic Process. Appl., **124** (2014), 1469–1502.

[19] P.–F. Rodriguez, *Decoupling inequalities for the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ models*, preprint (2016), arXiv:1612.02385.

[20] P.–F. Rodriguez and A.–S. Sznitman, *Phase transition and level-set percolation for the Gaussian free field*, Comm. Math. Phys., **320** (2013), 571–601.

[21] A. Sapozhnikov, *Random walks on infinite percolation clusters in models with long-range correlations*, Ann. Probab., **45** (2017), 1842–1898.

[22] A.–S. Sznitman, *Random interlacements and the Gaussian free field*, Ann. Probab., **40** (2012), 2400–2438.

[23] A.–S. Sznitman, *Disconnection and level-set percolation for the Gaussian free field*, J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 1801–1843.