Gaussian Free Field について

角田 謙吉 (Tsunoda Kenkichi)

大阪大学理学研究科数学専攻

27, Aug, 2018

講演内容

1. 離散&連続 GFF の定義
2. 関連する確率場
3. GFF に関連する研究について
4. 講演のまとめ

1. 離散&連続 GFF の定義

離散 GFF の性質と定義

- $G=(V,E)$ を向きのない連結な有限グラフ, $\partial \subset V$ を初めに与えられているものとし, $\hat{V}=V\setminus\partial$ とおく. ∂ は境界, $\hat{V}$ は内部である. $\{X_n; n\in\mathbb{N}_0\}$ を G 上の単純 RW とする. このとき $d(x):=\deg(x)$ は RW に対する対称測度である. $\tau=\inf\{n\in\mathbb{N}_0 : X_n\in\partial\}$ とする.

Definition 1 (Green 関数)

Green 関数 $G: V\times V\to[0,\infty]$ を次で定義する.

$$G(x,y) \;:=\; \frac{1}{d(y)}\mathbb{E}_x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{X_n=y;\tau>n\}}\right)\;,\quad x,y\in V\;.$$

- Green 関数は対称で半正定値なので次の定義が意味をもつ.

Definition 2 (離散 Gaussian free field)

離散 *Gauss* 自由場 *(discrete Gaussian free field)* とは, 共分散がグリーン関数 G により与えられる平均 0 の *Gauss* 型確率場 $h = (h_x)_{x \in V}$ である.

GFF の幾つかの性質:

1. $G(x, \cdot)$ は $\hat{V} \setminus \{x\}$ で調和, つまり $\Delta G(x, \cdot) = -\delta_x(\cdot)$. ただし Δ は RW に対応するラプラシアンで第一変数に作用する.
2. $x \in \partial, y \in V$ のとき $G(x, y) = 0$. よって $h|_\partial = 0$ a.s.
3. (Markov 性) 任意の $U \subset V$ に対して, U 上の GFFg と, g と独立な U 上の調和関数 ϕ によって $h = g + \phi$ とかける.

GFF の構成法

離散 GFF **の同値な構成法として**, Gibbs **測度による構成法と** Hilbert **空間に基づく構成法がある**.
Gibbs **測度による構成法**:

Proposition 1

GFF **の分布は次で与えられる**: $A \subset \mathbb{R}^V$ **に対して**,

$$\mathbb{P}(h \in A) = \frac{1}{Z} \int_A \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{x \sim y} (h_x - h_y)^2 \right) \prod_{x \in \hat{V}} dh_x \prod_{x \in \partial} \delta_0(dh_x) .$$

ただし Z **は正規化定数である**.

指数の括弧内は, Dirichlet **エネルギー** $\int |\nabla f|^2$ **の離散版で**, **離散ラプラシアン** Δ **により** $\langle f, -\Delta f \rangle$ **の定数倍であることに注意**.

GFF の構成法

Hilbert 空間に基づく構成法:
V 上の関数全体の集合 $\mathcal{H}^V = \{f : V \to \mathbb{R}; h|_\partial \equiv 0\}$ にノルム $\langle f, -\Delta f\rangle^{1/2}$ を極化して得られる内積により Hilbert 空間とする.

Proposition 2

$\{\phi_n : n = 1, \cdots, |\hat{V}|\}$ を $\mathcal{H}^V$ の *Hilbert* 空間としての正規直交基底とし, $Z_1, \cdots, Z_{|\hat{V}|}$ を *i.i.d.* 標準正規確率変数とする. このとき

$$h_x = \sum_{n=1}^{|\hat{V}|} \phi_n(x) Z_n \,, \quad x \in V \,,$$

と定めると, $(h_x)_{x\in V}$ は *GFF* である.

- これまで離散 GFF について簡単にみた．離散 GFF とは共分散がグリーン関数によって与えられる Gauss 型確率場のことであり，Gibbs 測度や Hilbert 空間としても構成することができる．
- 次に説明するのはこれの連続版に対応するものであるが，どの方法によっても明らかに構成できるものではないことに注意する．例として Gauss 型確率場による構成法の場合，共分散構造を指定すればよいが，G は対角線において特異性を有するためその存在は自明ではない．
- 正確な定義に移る前に，関数空間値の確率変数として構成したいものをみる．後に明らかになるが，そのように構成できるのは 1 次元のときのみである．以降 $D \subset \mathbb{R}^d$ は領域とする．

- $L^2(D)$-値確率変数 h であって，任意の $f \in C_0^\infty(D)$ に対して $\langle h, f\rangle$ が平均 0 分散 $\langle f, f\rangle_\nabla$ となるものが構成できたとしよう．ここで

$$\langle f, g\rangle = \int_D f(x)g(x)dx \,, \langle f, g\rangle_\nabla = \int_D \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)dx \,.$$

- このとき $f, g \in C_0^\infty(D)$ に対して，$\langle h, f\rangle = \langle h, (-\Delta)^{-1} f\rangle_\nabla$ であるから，$\langle h, f\rangle$ と $\langle h, g\rangle$ の共分散は

$$\langle(-\Delta)^{-1} f, (-\Delta)^{-1} g\rangle_\nabla = \langle(-\Delta)^{-1} f, g\rangle \,.$$

$(-\Delta)^{-1} f(x)$ は Green 関数により $\int_D G(x, y)f(y)dy$ とかけるので，

$$\langle(-\Delta)^{-1} f, g\rangle = \int_{D\times D} f(x)g(y)G(x, y)dxdy \,.$$

- f と g をそれぞれ x, y での近似 $\varrho_{x,\varepsilon}, \varrho_{y,\varepsilon}$ とし，$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば

$$\mathrm{Cov}[h(x), h(y)] = G(x, y) \,, x, y \in \mathbb{R}^d \,.$$

連続 GFF の定義

抽象 Wiener **空間による構成法**:

- H **を** Hilbert **空間とし**, $|\cdot|$ **を** H **上のノルムで** "**可測**" **なものとする**. H **の** $|\cdot|$ **による完備化を** B **とし**, B **上の線形汎関数全体を** B^* **とすれば**, $B^* \subset H \subset B$ **である**. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **は** H **の内積及び** B **と** B^* **のペアリングとする**.

Theorem 3 (Gross, '67)

上記の設定の下で, B **上の確率測度** P **であって**, h **を** P **を分布として持つ確率変数としたとき**, **任意の** $f \in B^*$ **に対して** $\langle h, f \rangle$ **が平均** 0, **分散** $\langle f, f \rangle$ **となるものが唯一つ存在する**.

- $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}, -\lambda_1 \leq -\lambda_2 \leq \cdots \uparrow \infty$ を Δ の $L^2(D)$ 上の固有値とし, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ を対応する固有関数とする. $a \in \mathbb{R}$ に対し, Sobolev 空間 $\mathcal{L}_a(D)$ を次で定義する:

$$\mathcal{L}_a(D) \;=\; \{f = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j ; \sum_{j=1}^{\infty} (-\lambda_j)^{-2a} \beta_j^2 < \infty\} \, .$$

内積 $\langle f, g \rangle_a = \langle (-\Delta)^{-a} f, (-\Delta)^{-a} g \rangle$ により, $\mathcal{L}_a(D)$ は Hilbert 空間. $a > 0$ のとき $\mathcal{L}_a(D)$ は超関数の空間であることに注意.

- $a = -1/2$ とすると, $f, g \in C_0^{\infty}(D)$ に対し

$$\langle f, g \rangle_{-1/2} \;=\; \langle (-\Delta)^{1/2} f, (-\Delta)^{1/2} g \rangle \;=\; \int_D \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx \; ,$$

となる. これは Dirichlet エネルギーそのもの. $\mathcal{L}_{-1/2}(D)$ は通常 $H_0^1(D)$ や $W_0^{1,2}(D)$ などと書かれる. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1/2} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla}$ である.

Proposition 4

D を有界領域とすると次が成立.

1. $a \leq b$ ならば $\mathcal{L}_a(D) \subset \mathcal{L}_b(D)$.
2. $a < b - d/4$ ならば $\|\cdot\|_b$ は $\mathcal{L}_a(D)$ 上の可測なノルム.
3. $(\mathcal{L}_b(D))^* = \mathcal{L}_{-b}(D)$.

- $a = -1/2$ とすると 2 の条件は $b > (d-2)/4$ となる. 具体的には $d = 1$ のとき $b > -1/2$, $d = 2$ のとき $b > 0$ である.
- Gross の定理において, $H = \mathcal{L}_a(D)(= H_0^1(D)), B = \mathcal{L}_b(D)$ とすれば, B-値確率変数 h が存在し, 任意の $f \in C_0^\infty(D)$ に対して, $\langle h, f \rangle$ が平均 0, 分散 $\langle f, f \rangle_\nabla$ となるものが存在する.
$(C_0^\infty(D) \subset (\mathcal{L}_b(D))^* \subset \mathcal{L}_{-1/2}(D) \subset \mathcal{L}_b(D))$
- このように抽象 Wiener 空間に対する Gross の定理を用いたとしても, $d = 1$ を除き h を関数空間値の確率変数として実現できない.

連続 GFF の構成法

- これまでの議論を鑑みて連続 GFF を, "$H = \mathcal{L}_{-1/2}(D)$ によりパラメータ付けられた確率変数の族" と定義する.
- 文献によっては他の関数空間でパラメータ付けされていることもある. 以下でみるのは Green 関数が意味を持つように設定している.
- 本講演では 2 次元の連続 GFF が主になるため, 少しの間 2 次元に話題を制限して連続 GFF をみていこう.

- 初めに何故 2 次元が特別なのかをみる.
- D, D' を $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の領域とし, $T : D \to D'$ を全単射とする.
- T が並行移動か回転のときには明らかに

$$\int_{D'} \nabla(f_1 \circ T^{-1}) \cdot \nabla(f_2 \circ T^{-1}) dx = \int_D \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 dx .$$

- T が縮小・拡大 $g(x) = cx, c > 0$ のときには

$$\int_{D'} \nabla(f_1 \circ T^{-1}) \cdot \nabla(f_2 \circ T^{-1}) dx = c^{d-2} \int_D \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 dx .$$

- よって $d = 2$ であれば Dirichlet エネルギーは縮小・拡大変換について不変. T が共形写像 (全単射かつ正則) のときも成立することは確認できる.

- $D \subset \mathbb{C}$ を有界領域とし, $\{B_t\}$ を 2 次元ブラウン運動とする. D で吸収される BM の推移確率密度を $p_t^D(x,y)$ とする.
- Green 関数 $G(x,y) = G_D(x,y)$ を次で定める:

$$G(x,y) \ := \ \pi \int_0^\infty p_t^D(x,y)dt \ .$$

Green 関数の幾つかの性質:

1. $G_{\mathbb{H}}(x,y) = \log |(x-\bar{y})/(x-y)|$. ($\mathbb{H}$ は上半平面)
2. $G(x,\cdot)$ は $D \setminus \{x\}$ で調和, つまり $\Delta G(x,\cdot) = -2\pi\delta_x(\cdot)$.
3. $T : D \to T(D)$ が共形写像であれば, 任意の $x,y \in D$ に対して

$$G_{T(D)}(T(x), T(y)) \ = \ G_D(x,y) \ .$$

4. $y \to x$ のとき, $G(x,y) = -\log(|x-y|) + \log R(x;D) + o(1)$. ただし $R(z;D)$ は共形半径: $R(z;D) = |f'(0)|, f : \mathbb{D} \to D, f(0) = z$.

- $D \subset \mathbb{C}$ を有界領域とする．一般には Green 関数が意味を持てばよい.
- $\mathcal{M}_+$ を D 上のコンパクトな台を持つ測度 ρ で,

$$\int_{D\times D} G_D(x,y)\rho(dx)\rho(dy) \ < \ \infty \ ,$$

をみたすもの全体とし,

$$\mathcal{M} \ = \ \{\rho = \rho_+ - \rho_- : \rho_\pm \in \mathcal{M}_+\} \ ,$$

とする.

- $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$ に対して

$$\Gamma(\rho_1,\rho_2) = \int_{D\times D} G_D(x,y)\rho_1(dx)\rho_2(dy)$$

とする.

Definition 1

$\rho \in \mathcal{M}$ によってパラメータ付けされた, (ある確率空間上で定義された) 確率変数の族 $h = (\langle h, \rho \rangle)_{\rho \in \mathcal{M}}$ が D 上の GFF とは, 任意の $\rho_1, \cdots, \rho_n \in \mathcal{M}$ に対して $(\langle h, \rho_1 \rangle, \cdots, \langle h, \rho_n \rangle)$ が平均ベクトル 0 で共分散が $Cov(h_{\rho_i}, h_{\rho_j}) = \Gamma(\rho_i, \rho_j)$ である $\mathbb{R}^n$-値 Gauss 確率変数であることをいう.

- 抽象 Wiener 空間による構成のときにみたように, h を H_0^1-値の確率変数 (もしくは関数空間値の確率変数) と定義することはできない.
- $z \in D$ と十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して, $\varrho_{z,\varepsilon}$ を中心 z 半径 ε の球上の一様分布とし, $\rho_{z,\varepsilon}(dx) = \varrho_{z,\varepsilon}(x)dx$ とする. $\rho_{z,\varepsilon} \in \mathcal{M}_+$ である. また $h_\varepsilon(z) = \langle h, \rho_{z,\varepsilon} \rangle$ とおく.

GFF の幾つかの性質:

1. (Markov 性) U を D の開部分集合とし, h を D 上の GFF とする. このとき, U 上の GFFh_0 (U の外では 0 とみなす) と h_0 と独立な U で調和な ϕ によって $h = h_0 + \phi$ とかける.
2. (共形不変性) $\phi : D \to D'$ を共形写像とし, h を D 上の GFF とする. このとき, $h \circ \phi^{-1}$ は D' 上の GFF である.
3. h を D 上の GFF とし, $z \in D$ を固定して $0 < \varepsilon_0 < dist(z, \partial D)$ とする. このとき $t \geq t_0 = \log(1/\varepsilon_0)$ に対して

$$B_t = h_{e^{-t}}(z) ,$$

とおくと, $(B_t, t \geq t_0)$ は B_{t_0} 出発の BM である.

- 後にみる Liouville Quantum Gravity の研究において次にみる thick points は基本的である.

Definition 2 (Thick points)

h を D 上の GFF とし, $\alpha > 0$ とする. $z \in D$ が α-thick であるとは,

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\varepsilon(z)}{\log(1/\varepsilon)} = \alpha \ ,$$

が成立することをいう.

Theorem 3 (Hu-Miller-Peres, '10)

$\mathcal{T}_\alpha$ を α-thick な点全体とすると, 確率 1 で,

$$\dim_H(\mathcal{T}_\alpha) = (2 - \frac{\alpha^2}{2})_+ \ ,$$

が成立する. また $\alpha > 2$ のときは確率 1 で $\mathcal{T}_\alpha = \emptyset$ である.

2. 関連する確率場

- $\phi = \{\phi(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}, \phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ に対して形式的なエネルギーを

$$H(\phi) \equiv \sum_{x \sim y} V(\phi(x) - \phi(y)) ,$$

により定義する．H はハミルトニアンとよばれる．ただし $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はポテンシャル関数である．

- ハミルトニアン H に対する Gibbs 分布を，

$$\mu(d\phi) = \frac{1}{Z} e^{-H(\phi)} d\phi ,$$

とする．ここで Z は正規化定数であり，$d\phi$ は無限次元直積 Lebesgue 測度 $d\phi = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \phi(x)$ である．

- H を定める和は無限和であるし，無限次元の Lebesgue 測度は存在しないので，μ に正確に意味を与える必要がある．

- そのために初めに有界領域 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ でハミルトニアンを考え, 外部条件 $\psi \in \mathbb{R}^{\Lambda^c}$ を与える. このときポテンシャル V に対する適当な仮定 (対称性, 凸性, 滑らかさ) の下で $\mu \equiv \mu_{\Lambda,\psi}$ は定義される.
- 例: ポテンシャルが $V(\eta) = \eta^2, \eta \in \mathbb{R}$ のときは, 対応する μ は (定数倍を除いて) 離散 GFF そのもの.
- この統計力学模型は $\nabla\phi$ 界面模型とよばれるが, 上の例から離散 GFF の拡張になっている. V が 2 次ポテンシャルでなければ, Gibbs 分布の下で ϕ は Gauss でないことに注意.

- この有限 Gibbs 分布 $\mu_{\Lambda,\psi}$ は全領域 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ 上の確率測度に拡張できるであろうか?
- $d \geq 3$ ならば可能．具体的には適当な外部条件 ψ を固定し増大列 $\Lambda_\ell \uparrow \mathbb{Z}^d$ を考えて，確率測度の列 $\mu_{\Lambda_\ell,\psi}$ の極限を考える．$d \geq 3$ では $\mathbb{Z}^d$ 上の単純対称 RW が推移的であるため，Green 関数が存在する．そのために無限系の Gibbs 分布が存在する．
- 一方素朴な疑問として，連続 GFF は離散 GFF のスケール極限になっているであろうか?
- 実際連続 GFF は離散 GFF のスケール極限になっていることが示すことができる．しかしながら離散 GFF も連続 GFF も Gauss なので，共分散に関する計算を行う限り，結果としては非常に自然である．
- ただし非 Gauss である $\nabla\phi$ 界面模型のスケール極限が連続 GFF であるかどうかは非自明である．

- (形式的な)Gibbs 測度

$$\frac{1}{Z} \exp\left(- \sum_{x \sim y} V(\phi(x) - \phi(y)) \right) \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} d\phi(x) \,,$$

を考える. ただしポテンシャル $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対しては

$$V(\eta) \;=\; -\log \int \exp\left[-\frac{1}{2} \kappa \eta^2 \right] \varrho(d\kappa) \,,$$

の形を仮定し, ϱ は $(0, \infty)$ 上にコンパクト台を持つ有限測度である.

- $\varepsilon > 0$ と $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して, $\phi_\varepsilon(f)$ を次で定義する:

$$\phi_\varepsilon(f) = \varepsilon^{(-d/2+1)} \int dx f(x) \phi([x/\varepsilon]) \, .$$

Theorem 4 (Biskup-Spohn, '11)

(gradient) Gibbs 測度は傾き 0 で $\mathbb{Z}^d$ の平行移動に関してエルゴード的であるとする. このとき, 任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}[e^{i\phi_\varepsilon(f)}] \; = \; \exp \left[\frac{1}{2} \int dx f(x) (Q^{-1} f)(x) \right] ,$$

が成立する. ここで Q はある 2 階の楕円型作用素である.

関連する確率場について:

- Massive field: $m \geq 0$ **を実数** (mass, **質量**) **として**,

$$\mathrm{Cov}[h(x), h(y)] \;=\; (-\Delta + m^2)^{-1}(x, y)\;.$$

- Fractional field: $s \in \mathbb{R}$ **として**,

$$\mathrm{FGF}_s(\mathbb{R}^d) \;=\; (-\Delta)^{-s/2}\mathcal{W}\;.$$

  $\mathcal{W}$ **は** $\mathbb{R}^d$ **上の** (spatial) white noise. **例**: $d = 1$ **とする**. $s = 1$ **は** $\mathbb{R}$ **上の** BM, $1/2 < s < 3/2$ **は** Hurst **パラメータ** $H = s - 1/2$ **の** FBM.

- Neumann field: **これまでに見たのは** 0-Dirichlet **に対応**. **自然に考えられるように** 0-Neumann GFF **も定義される**.
- GFF **に対する研究は** GFF **より決まる**/**対応する確率場の研究にも応用を持つ**.

3. GFF に関連する研究について

GFF **に関連するトピック**:

- Simple random walk in 2 dimension. (**阿部氏の講演**)
- Level-set percolation, $\Delta\phi$ interface model. (**坂川氏の講演**)
- Liouville quantum gravity.
- Stochastic Loewner evolution.
- Conformal loop ensemble.
- Random planar maps.
- Branching Brownian motion.
- Dirichlet form theory.
- Gaussian and KPZ universality.

Liouville Quantum Gravity

- しばらく $D \subset \mathbb{C}$ を有界領域, h を D 上の GFF とする.
- LQG では次の Liouville 測度を解析することが目標である:

$$e^{\gamma h(z)} dz \ ,$$

  ただし $\gamma \in [0, \infty)$ は定数である.
- しかしながら *GFF* は関数として実現することはできなかった. (実際は超関数として定義されていた) そのため指数関数と超関数の合成は定義することができない.
- Liouville 測度を意味付けるためには滑らかなもので近似する必要があるが, そもそも定義できないことを考えると, 適当な繰り込み (renormalization) が必要であると予想される. (cf. KPZ 方程式)

- **そのために** $\varepsilon > 0$ **に対して**, $\{h_\varepsilon(z) = (\langle h, \rho_{z,\varepsilon}\rangle : z \in D\}$ **の定義を思い出しておく**. (h **の中心** z **半径** ε **による円上での平均**)
- **ここで** $\varepsilon > 0$ **に対して** D **上のランダム測度** μ_ε **を**

$$\mu_\varepsilon(dz) \ = \ e^{\gamma h_\varepsilon(z)} \varepsilon^{\gamma^2/2} dz \ ,$$

により定義する. $\varepsilon^{\gamma^2/2}$ **は正規化定数である**.

Theorem 5 (Duplantier-Sheffield, '11)

$0 < \gamma < 2$ **に対して**, $\varepsilon = 2^{-k}$ **に沿って**, **ランダム測度** μ_ε **はあるランダム測度** μ **に確率** 1 **で弱収束する**. **また**

$$\mathbb{E}[\mu(A)] \ = \ \int_A R(z; D)^{\gamma^2/2} dz \in (0, \infty) \ .$$

($R(z; D)$ **は共形半径**: $R(z; D) = |f'(0)|, f : \mathbb{D} \to D, f(0) = z$.)

- $h_\varepsilon(z)$ の分散は,

$$\mathrm{Var} h_\varepsilon(z) = \log(1/\varepsilon) + \log R(z; D) ,$$

と計算されるので, $h_\varepsilon(z)$ の Gaussianity より

$$\mathbb{E}[\mu_\varepsilon(A)] = \int_A R(z; D)^{\gamma^2/2} dz \in (0, \infty) .$$

- 定理の証明は基本的に L^2-Cauchy 性を示すことである．しかし $\gamma < \sqrt{2}$ と $\gamma \geq \sqrt{2}$ で証明が変わる (前者が easy)．後者の場合 tilting lemma を使う必要になり, その副産物として次も示される．

Theorem 6 (Duplantier-Sheffield, '11)

確率 1 で正規化された *Liouville* 測度の下,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\varepsilon(z)}{\log(1/\varepsilon)} = \gamma .$$

- 先の結果より Liouville 測度 $\mu = \mu_\gamma$ は $\mathcal{T}_\gamma$ に集中していることが分かる.
- Hu 達の結果 $\dim_H(\mathcal{T}_\gamma) = (2 - \gamma^2/2)_+$ を思い出すと, $\gamma = 2$ で相転移を起こしていることが分かる. $\gamma = 2$ の臨界的な場合も Liouville 測度が構成されていることが知られている.
- 話は変わって連続 GFF は共形不変であった. Liouville 測度に対しては, これが共形共変の形に伝播する.

Theorem 7 (conformal covariance)

$f : D \to D'$ を共形写像, h を D 上の GFF とする. このとき, $h' = h \circ f^{-1}$ は D' 上の GFF であり, 対応する Liouville 測度をそれぞれ $\mu_h, \mu_{h'}$ とすると,

$$\mu_h \circ f^{-1} \; = \; e^{\gamma Q \log |(f^{-1})'|} \mu_{h'} \; ,$$

ただし $Q = \gamma/2 + 2/\gamma$ である.

KPZ formula

- KPZ formula(Knizhnik-Polyakov-Zamolodchikov) とは, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ におけるランダム集合の通常の意味のスケール指数と量子的な意味のスケール指数の間の満たす関係式のことである.
- $A \subset D$ をランダムな集合とする. このとき, A の (Euclidean) スケール指数が $x \in [0, 1]$ であるとは, 次が成立することである:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathbb{P}(\{z \in D : B(z, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\})}{\log(\varepsilon^2)} = x .$$

ただし $\mathbb{P}$ は z について D 上の一様分布及び A についての平均である.

- (形式的) A_ε を A の ε-近傍とすると, $\mathbb{E}|A_\varepsilon| \sim \varepsilon^{2x}$ となるが, これは A が $\varepsilon^{-(2-2x)}$ 個の半径 ε の球で覆われることを意味する. つまり A の Hausdorff 次元が

$$\dim_H(A) = 2 - 2x = 2(1 - x) ,$$

となる.

- $\mu = \mu_\gamma$ を Liouville 測度とする．$\delta > 0$ に対して，$r(\delta)$ を $\mu(B(z, r(\delta))) = \delta$ なるものとし，$B^\delta(z) = B(z, r(\delta))$ とする．
- $A \subset D$ をランダムな集合とする．このとき，A の (quantum) スケール指数が $\Delta \in [0, 1]$ であるとは，次が成立することである:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathbb{P}(\{z \in D : B^\delta(z) \cap A \neq \emptyset\})}{\log(\delta)} = \Delta \, .$$

ただし $\mathbb{P}$ は z について正規化された Liouville 測度及び h, A についての平均である．

Theorem 8 (KPZ formula)

A は GFF と独立であるとする．このとき，A が (Euclidean) スケール指数 x を持てば，A の (quantum) スケール指数 Δ が存在し，次が成立する:

$$x = \frac{\gamma^2}{4}\Delta^2 + (1 - \frac{\gamma^2}{4})\Delta \, .$$

- 先のように量子的な球を定義した理由は, D に Liouville 測度を備えた空間に距離が導入されていないことに起因する.
- D に Liouville 測度を備えた空間が (形式的に) 距離空間であると考え, その Hausdorff 次元を D_γ としよう. このとき以前と同じ考察により,

$$\dim_H(A) \;=\; D_\gamma(1-\Delta)\;,$$

と考えられる.
- 物理学者により

$$D_\gamma \;=\; 1+\frac{\gamma^2}{4}+\sqrt{(1+\frac{\gamma^2}{4})^2+\gamma^2}\;,$$

が予想されている. $\gamma=\sqrt{8/3}$ のときには $D_\gamma=4$ であるが, これは正しいことが知られている.

Stochastic Loewner Evolution

- stochastic Loewner evolution とは $\mathbb{C}$ 内のある非横断的なランダム曲線である. パラメータ $\kappa \geq 0$ の SLE を $SLE(\kappa)$ とする.
- ランダムウォークのスケール極限がブラウン運動であるように, SLE は多くのランダムな離散非交差曲線のスケール極限になっている.

SLE の幾つかの性質:

1. 共形不変性と領域 Markov 性を満たす.
2. 確率 1 で $SLE(\kappa)$ は, $0 \leq \kappa \leq 4$ のとき単純, $4 < \kappa < 8$ のときループを持ちループの内点は全て含まれるが空間充填ではない, $8 \geq \kappa$ のとき空間充填である.
3. (Beffara) 確率 1 で $\dim_H(SLE(\kappa)) = \min(2, 1 + \kappa/8)$.

- GFF と SLE は密接していることをこれからみていく. 初めに Schramm-Sheffield による結果を紹介する.
- 領域 $D \subset \mathbb{C}$ は境界 ∂D が $\partial D = \partial_+ \cup \partial_-$ と分解されているとし, $N \in \mathbb{N}$ に対し $D_N = D \cap (N^{-1}\mathbb{T}^2)$ とする ($\mathbb{T}^2$ は 2 次元の三角格子).

Theorem 9 (Schramm-Sheffield, '09)

境界条件 $h|_{\partial_\pm} = \pm\sqrt{\pi/8}$ を持つ D_N 上の離散 GFF の 0-境界線は, $N \to \infty$ で $SLE(4)$ に分布収束する.

KPZ relation の応用

- LERW をループ除去ランダムウォークとする．
Lawler-Schramm-Werner により，2 次元 LERW は $SLE(2)$ に収束することが示されている．$\dim_H(SLE(2)) = 1 + 2/8 = 5/4$ に注意．
- 一方 LERW と一様全域木 (UST) の関係と UST に関する結果を用いると，$\Delta = 1/2$ であることが分かる．また付随する Liouville 測度のパラメータは $\gamma = \sqrt{2}$ となる．
- 故に KPZ relation より

$$x = \frac{\gamma^2}{4}\Delta^2 + (1 - \frac{\gamma^2}{4})\Delta = 3/8 ,$$

となるが，これは Beffara による結果

$$\dim_H(SLE(2)) = 5/4 = 2 - 2x ,$$

と確かに合致している．

Coupling of GFF and SLE

- h を $\mathbb{H}$ 上の Neumann GFF とし,

$$h_0 = h + \phi\,, \quad \phi(z) \;=\; \frac{2}{\gamma}\log|z|\,, z \in \mathbb{H}\,.$$

- $\kappa \in (0,4)$ とし, $\eta = (\eta_t)_{t\geq 0}$ を GFF h に独立な $SLE(\kappa)$ $(0 \to \infty)$, $g_t : \mathbb{H}\setminus\{\eta_s\}_{s\leq t} \to \mathbb{H}$ を対応する共形写像とし, $\tilde{g}_t(z) = g_t(z) - \xi_t$ とする. (ξ_t は確率 Loewner 方程式の駆動関数)
- $T > 0$ に対して, $\mathbb{H}$ 上の超関数を

$$h_T \;=\; h_0 \circ \tilde{g}_T^{-1} + \left(\frac{2}{\sqrt{\kappa}} + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}\right)\log|(\tilde{g}_T^{-1})'|\,.$$

Theorem 10 (Sheffield, '16)

定数の差を除いて, h_T と h_0 は同分布.

Gaussian and KPZ universality

- KPZ(Kardar-Parisi-Zhang) 方程式とは, 界面成長を記述するある確率偏微分方程式である: $h = h(\omega) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\partial_t h \;=\; \frac{1}{2}\Delta h + \frac{1}{2}(\partial_x h)^2 + \xi \;.$$

  ここで ξ は時空の white noise である.
- この方程式に対して繰り込み解析を行うと, Gaussian universality と KPZ universality とよばれる普遍性クラスの存在が示唆される.
- 1 次元では KPZ 方程式を巡って非常に多くのことが研究されている.
- 一方 2 次元の場合に, Borodin-Ferrari によりある $2+1$ 次元模型において極限で連続 GFF が得られることが示されている.

4. 講演のまとめ

講演のまとめ

1. 離散/連続 Gauss 自由場とは RW/BM の Green 関数を共分散に持つ Gauss 型確率場のこと.
2. GFF の確率場としての振る舞いのみならず, 様々な確率場のスケール極限として現れる普遍的な対象としても研究されている. GFF 自身ではなく GFF より決まる/対応する確率場の研究も発展している.
3. 近年では場の理論との関係から, GFF により決まるランダム幾何の研究が盛んに研究されており, 特に LQG, SLE, CLE などとの繋がりから研究がされている.

Keywords: Gaussian free field, Liouville quantum gravity, Stochastic Loewner evolution, Conformal loop ensembles, Random planar maps, Universality of interacting systems.

参考文献

(注) **タイトルにリンクが貼ってあります**.

1 Introduction to the Gaussian Free Field and Liouville Quantum Gravity: Berestycki **のレクチャーノート**, **離散&連続** GFF **の定義**, GFF **の性質**, Neumann field, LQG, SLE **との** coupling **について**. (p. 4-6, 15-19, 26, 29-35, 38-39)

2 Extrema of the two-dimensional Discrete Gaussian Free Field: Biskup **のレクチャーノート**, **離散** GFF **の定義について**. (p.7)

3 Gaussian free fields for mathematicians: Sheffield **の概説論文**, **連続** GFF **の定義**, Massive field **について**. (p. 9-12, 14, 26)

4 **ミクロからマクロへ** 1, **界面モデルの数理**: **舟木-内山の本**, $\nabla\phi$ **界面模型について**. (p. 21-23)

5 Scaling limit for a class of gradient fields with nonconvex potentials: Biskup-Spohn **の論文について** ([4] **よりも後に出版されたため記載**). (p. 24-25)

6 Fractional Gaussian fields: A survey: Lodhia-Sheffield-Sun-Watson **の概説論文**, Fractional field **について**. (p. 26)

7 Conformal Loop Ensembles and the Gaussian Free Field: Watson **のスライド**, GFF, SLE, CLE **について**. (p. 36-37)

8 Gaussian Free Field in beta ensembles and random surfaces: Borodin **のスライド**, Gaussian universality **について**. (p. 40)